Математикалық физика теориясының іргелі ұғымдарымен таныстыру, негізгі әдістерді үйрету және оларды қолдану білуге дайындау, әр түрлі жеке дара ұғымдар мен зерттеулерді бір жүйеге келтіру нәтижесінде қойылған есептерде шығара білу қабілетін арттыру;

- Студенттердің логикалық ойлау, математикалық пайымдау дәрежелерін және математикалық мәдениетін физика, техника және басқа да жаратылыстану ғылымдарында кезлесетін есептерді шеше алатындай деңгейге жеткізу;

Пәннің міндеттері:

- Математиканың әр түрлі жеке пәндер құралымы емес, тұтас бір ғылым екенін және сол ғылымның ішінде «математикалық физика теңдеулерінің» алатын орны туралы мағлұмат алу;
- Бұл пәннің математикалық аппаратының дұрыстығы, тұтастығы, қуаты қатаң логикалық құрылымға байланысты болса, екіншіден олар практика жүзінде тексеріліп отыратындығын білу;
- Теориялық негіз болып саналатын дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің белгілі топтарына қойылатын Коши есебі және шекаралық есептердің шешімдерінің бар болуы және олардың жалғыздығы туралы мағлұматтарды білуі тиіс.

Математикалық әдістердің ғылым мен техника есептерін шешуде, экономика және басқару ісіндегі ролі өте зор. «Математикалық физика теңдеулері» курсы бірінші ретті және жоғарғы реттідифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйесі теориясын қамтиды. Сонымен қатар есептер мен орнықтылық теориясының элементтері қарастырылады.

26-мысал: Ұзындығы l-ға тең шеттері бекітілген шектің алғашқы уақыттағы пішіні $u = x(l - x)$ параболаға ұқсайды. Шекті бастапқы жылдамдықсыз босатып жібергендегі оның тербеліс заңын табу керек.

Шешуі: Шектің нүктелерінің ауытқуы (2.42) формула арқылы, ал оның коэффициенттері (2.43) формулалар арқылы анықталады. Сол формулалар бойынша $b_k = 0$ болады. Енді a_k коэффициентін есептейік:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \xi(l-\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = \frac{2}{l}\left[-\frac{1}{k\pi}\xi(l-\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l + \frac{l}{k\pi}\int_0^l (l-2\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right] =$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[\frac{l}{k\pi}(l-2\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l+\frac{2l}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right]=-\frac{4l^2}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l=$$

$$=\frac{4l^2}{k^3\pi^3}(1-\cos k\pi)=\frac{4l^2}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Осы мәндерді (2.42) формулаға қойып есептің шешімін аламыз:

$$u=\frac{4l^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}\xi=\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{l}t\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

27-мысал: Шектің шеттері $x=0$ және $x=l$ нүктелерінде қатаң бекітілген. Ауытқулардың алғашқы уақыт мезгіліндегі түрі

$$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l},\ \ 0\le x\le l\ .$$

Бастапқы жылдамдықтар нөлге тең. Шектің ауытқуларын анықтау керек.
Шешуі: Бұл есепті бұрын басқа әдіспен шығарған болатынбыз. Енді Фурье әдісін қолданайық. Ол үшін шектің тербелістерінің теңдеуін

$$u(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l},\ \ (0\le x\le l),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0$$

алғашқы және шекаралық шарттары бойынша интегралдау керек.
Сонда (2.42) және (2.43) формулалар арқылы $b_k=0$ болады да, ал a_k үшін мынадай өрнек алынады:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi \qquad (k=1,2,...)$$

Бұл интеграл $k=1$ мәнінен басқа мәндерінде нөлге тең болады.

$$a_1=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin^2\frac{\pi\xi}{l}d\xi=A.$$

Олай болса есептің шешімі мынаған тең болады.

$$u(x,t)=A\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi a}{l}t.$$

28-мысал: Шеттері $x=0$ және $x=l$ нүктелерінде бекітілген шекті кішкене балғамен ұрғанда оның $\lfloor x_1;x_2\rfloor$ бөлігінің нүктелері v_0 жылдамдық алады. Ұрғанға дейін шек тепе-теңдік күйінде болатын. Шектің $u(x,t)$ ауытқуын табу керек.
Шешуі: Бұл жағдайда

$$\varphi(x)=0,\qquad \psi(x)=\begin{cases}0, & (0\le x<x_1),\\ v_{0,} & (x_1\le x\le x_2),\\ 0, & (x_2<x\le l).\end{cases}$$

Сондықтан (2.43) формула бойынша $a_k=0$ болады.
Енді b_k - ны есептейміз.

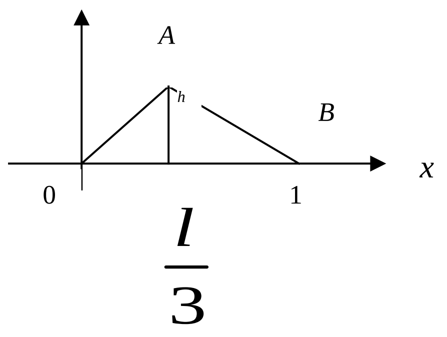
$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2v_0}{k\pi a}\int_{x_1}^{x_2}\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi=-\frac{2lv_0}{k^2\pi^2a}\left(\cos\frac{k\pi x_2}{l}-\cos\frac{k\pi x_1}{l}\right)=$$

$$=4\frac{lv_0}{k^2\pi^2a}\sin\frac{k\pi(x_1+x_2)}{2l}\sin\frac{k\pi(x_2-x_1)}{2l}.$$

Есептің шешімі

$$u(x,t)=4\frac{lv_0}{\pi^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi(x_1+x_2)}{2l}\sin\frac{k\pi(x_2-x_1)}{2l}\cdot\sin\frac{k\pi a}{l}t\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$$

29-мысал: Шеттері $x=0$ және $x=l$ нүктелерінде бекітілген шек $x=\frac{1}{3}l$ нүктесінде тепе-теңдік күйінен h аз қашықтыққа керіледі де бастапқы жылдамдықсыз босатылып жіберіледі. Шектің $u(x,t)$ ауытқуын табу керек.
Шешуі: Бұл жағдайда



$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{3h}{l}x, & (0\le x\le\frac{l}{3}),\\ \frac{3h}{2l}(l-x), & (\frac{l}{3}\le x\le l);\end{cases}$$

$$\psi(x)=0.$$

8-сурет

Осыдан $b_k=0$, ал a_k мәнін есептейміз:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^{l/3}\frac{3h}{l}\xi\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi + \frac{2}{l}\int_0^{l}\frac{3h}{2l}(l-\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi.$$

Мұндағы екі интегралды да бөліктеп интегралдау нәтижесінде мынадай a_k мәнін анықтаймыз:

$$a_k = \frac{6h}{kl\pi}\left[-\xi\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^{l/3} + \int_0^{l/3}\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right] + \frac{3h}{kl\pi}\left[-(l-\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_{l/3}^{l} -\right.$$

$$\left.- \int_{l/3}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi\right] = \frac{9h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{3}.$$

Сонымен,

$$u(x,t) = \frac{9h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{k\pi a}{l}t\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

30-мысал: Бір шеті бекітілген, ал екінші шеті бос цилиндр стерженнің бойымен таралған шағын тербелістерді интегралдау керек.

Шешуі: Стерженнің бойымен таралған тербелістер теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.105)$$

мұндағы $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, E- Юнг модулі, ρ - сызықтық тығыздық. Алғашқы шарттар

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad (0 \le x \le l), \qquad (2.106)$$

түрінде берілсін. Есептің берілуі бойынша шекаралық шарттарды мына түрде жазуға болады:

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0. \qquad (2.107)$$

Бұрынғы есептердегі шекаралық шарттардан бұл шарттар басқаша.
Сондықтан (2.42), (2.43) формулаларды пайдалана алмаймыз.
Енді Фурье әдісінің жалпы түрін пайдаланайық. Алдымен (2.105) теңдеудің тек қана (2.106) шарттарды қанағаттандыратын шешімін

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

көбейтіндісі түрінде іздейік.
Осыны (2.105) теңдеуге қойып және айнымалыларын бөлгеннен кейін мынадай теңдеу аламыз

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}$$

Бұл теңдіктің сол жағы t - ға, ал оң жағы тек x - ке тәуелді. Сондықтан осы тең қатынастардың әрқайсысы тұрақтыға тең болуы керек. Оны $\lambda^2 a^2$ деп белгілеп мынадай дифферииенциялдық теңдеулер аламыз

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Интегралдаудан кейін мынадай шешімдер аламыз:

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x\,;$$
$$T = A \cos \lambda a t + B \sin \lambda at \qquad (2.108)$$

Осыдан (2.108) шартты пайдаланып

$$C=0, \quad \lambda D \cos \lambda l = 0$$

теңдіктеріне келеміз. Соңғы теңдік бойынша λ тек мынадай мәндер қабылдай алады

$$\lambda_k = (2k+1)\frac{\pi}{2l}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Олай болса, стерженнің меншікті тербелістерінің жиілігі:

$$\omega_k = (2k+1)\frac{\pi a}{2l} = (2k+1)\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Әрбір $k = 0,1,2,...$ үшін (2.106) шарттарды қанағаттарндыратын (2.105) теңдеудің шешімін аламыз

$$u_k(x,t) = \sin \lambda_k x (a_k \cos \lambda_k at + b_k \sin \lambda_k at)$$

Есептің шешімін қатар түрінде іздейміз:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t+b_k\sin\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x \qquad (2.109)$$

Енді a_k және b_k коэффициенттері $u(x,t)$ функциясы (2.106) шарттарды қанағаттандыратындай етіп аламыз. Ол үшін (2.109) қатарды (2.106) – ке қойып белгілі Фурье қатарының коэффициенттерін табу әдісін пайдаланып, a_k және b_k коэффициенттерін анықтаймыз

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}xdx,\qquad b_k=\frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}xdx.$$

31-мысал: Мынадай аралас есепті қарастырайық

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=25\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\sin(\omega t)x\,(3-x), \quad 0<x<3, \quad t<0,\\ u(0,t)=u(3,t)=0,\\ u\big|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\end{cases} \qquad (2.110)$$

Шешуі:

А. Берілген есептің (2.110) шеттік шарттарының түрімен байланысты есептің шешімін Штурм –Лиувилль есебінің меншікті функциялары бойынша құрылған қатар түрінде іздейміз.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi}{3}x \qquad (2.111)$$

Берілген теңдеудегі $\sin(\omega t)x\,(3-x)$ функциясын $\sin\frac{k\pi}{3}x$ бойынша қатарға жіктейміз

$$\sin(\omega t)x\,(3-x)=\sin(\omega t)\sum_{k=1}^{\infty}g_k\sin\frac{k\pi}{3}x \qquad (2.112)$$

мұндағы

$$g_k=\frac{2}{3}\int_0^3x(3-x)\sin\frac{k\pi}{3}xdx=\frac{36}{(k\pi)^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Енді (2.111) және (2.112) жіктеулерді (2.110) теңдеуге қойып мынадай дифференциалдық теңдеу аламыз

$$T_k''(t) = -\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 T_k(t) + g_k \sin(\omega t) \qquad (2.113)$$

((2.109) теңдеуді қараңыз).

Ал (2.111) қатарды (2.110) алғашқы шарттарға қойғанда

$$T_k(0) = 0, \qquad T_k'(0) = 0, \qquad (2.114)$$

шарттары алынады.

Дифференциалдық теңдеулер теориясынан (2.113) біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі оның қандайда бір дербес шешімі мен оған сәйкес біртекті теңдеудің шешімінің қосындысынан тұратыны белгілі.

Сондықтан (2.113) теңдеудің жалпы шешімін

$$T_k(t) = T_k^0(t) + T_k^d(t) \qquad (2.115)$$

түрінде құрамыз. Мұндағы $T_k^0(t)$ – сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$T_k^0(t) = C_1 \cos\left(\frac{5k\pi}{3} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{5k\pi}{3} t\right) \qquad (2.116)$$

Ал $T_k^d(t)$ - (2.113) біртекті емес теңдеудің дербес шешімі. Дербес шешімді іздегенде екі жағдайды айырып қарастыру керек - резонансты емес және резонансты жағдайлар.

32-мысал: Берілген біртекті емес аралас есептің шешімін табу керек

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10u = 2\sin 2x \cos x - 10 - 20x, \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2}), \\ u\Big|_{x=0} = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2; \\ u\Big|_{t=0} = 2x + 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Шешуі: Бұл есептегі біртексіздік стационарлық түрде болғандықтан, есептің шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін t - ға тәуелсіз түрде іздеуге болады.

Болашақ $\omega(x)$ шешімді берілген теңдеуге және шекаралық шарттарға қойып мынадай теңдеу аламыз

$$-\frac{d^2\omega}{dx^2}-10\omega=2\sin 2x\cos x-10-20x,\qquad \omega(0)=1,\qquad \omega'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

Бұл есептің шешімінің түрі:

$$\omega(x)=1+2x-\frac{1}{9}\sin x-\sin 3x$$

Енді берілген аралас есепте

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x),$$

немесе

$$u(x,t)=v(x,t)+\left(1+2x-\frac{1}{9}\sin x-\sin 3x\right)$$

ауыстыруын қолданып $v(x,t)$ үшін мынадай біртекті аралас есеп аламыз:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-10v=0,$$

$$v\big|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=0;$$

$$v\big|_{t=0}=\frac{1}{9}\sin x+\sin 3x,\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Бұл есепті шешу үшін Фурье әдісін қолданайық

$$v(x,t)=T(t)X(x),\qquad T''X-TX''-10TX=0,$$

немесе

$$\frac{T''-10^{T}}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

Штурм –Лиувилль есебінің

$$X''+\lambda^2X=0,\qquad X(0)=0,\qquad X'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

меншікті мәндері $\lambda_k^2 = (2k+1)^2 \quad (k = 0,1,2,...)$ және меншікті функциясы $X_k(x) = \sin(2k+1)x$ түрінде анықталады. Енді $\lambda_k^2 = (2k+1)^2$ мәндерін орнына қойып, T_k үшін мынадай теңдеулер және олардың шешімдерін аламыз

$$T_k'' - 10T_k + \lambda^2 T_k = 0$$

$$T_0'' - 9T_0 = 0, \; T_0 = A_0 e^{3t} + B_0 e^{-3t};$$
$$T_1'' - T_1 = 0, \; T_1 = A_1 e^{t} + B_1 e^{-t};$$

....

$$T_k'' + \left[(2k+1)^2 - 10\right] T_k = 0 \qquad (k = 2,3,4,...),$$
$$T_k = A_k \cos\sqrt{(2k+1)^2 - 10}\; t \pm B_k \sin\sqrt{(2k+1)^2 - 10}\; t.$$

Сонда

$$v(x,t) = T_0(t)\sin x + T_1(t)\sin 3x + ... + T_k(t)\sin(2k+1)x =$$
$$= (A_0 e^{3t} + B_0 e^{-3t})\sin x + (A_1 e^{t} + B_1 e^{-t})\sin 3x +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\left[A_k \cos\sqrt{(2k+1)^2 - 10}\; t + B_k \sin\sqrt{(2k+1)^2 - 10}\; t\right]\sin(2k+1)x$$

Алғашқы шартты пайдаланамыз:

$$v(x,0) = \frac{1}{9}\sin x + \sin 3x = (A_0 + B_0)\sin x + (A_1 + B_1)\sin 3x + \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(2k+1)x.$$

Осыдан

$$\frac{1}{9} = A_0 + B_0, \;\; 1 = A_1 + B_1, \;\; 0 = A_k \;\; (k = 2,3,...)$$

теңдіктері алынады. Әрі қарай,

$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 = (3A_0 - 3B_0)\sin x + (A_1 - B_1)\sin 3x + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \sqrt{(2k+1)^2 - 10}\,\sin(2k+1)x$$

теңдіктердің екі жақтарын салыстырып $0 = 3A_0 - 3B_0, \; 0 = A_1 - B_1, \; 0 = B_k\sqrt{(2k+1)^2 - 10}$ теңдіктерін аламыз. Сонымен,

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{18}, \quad A_1 = B_1 = \frac{1}{2}, \quad A_k = B_k = 0 \qquad (k = 2,3,..)$$

Қортындысында, біртекті емес аралас есептің шешімін мына түрде анықтаймыз:

$$u(x,t)=(1+2x)+\frac{1}{18}(e^{3t}+e^{-3t}-2)\sin x+\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}-2)\sin 3x.$$

33–мысал:

Штурм-Лиувиль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табу керек.

$$y''+\lambda y=0,\quad -y'(0)+hy(0)=0,\ y'(a)+hy(a)=0,\ x\in[0,a],\ h>0$$

Шешуі: Maple программасының аналитикалық есептік жүйесін пайдаланайық. Теңдеудің беруін де екі жағдайды қарастырайық:

$\lambda\neq 0$ және $\lambda=0$.

$> eq:=diff\,(y(x),x\$2)+lambda*y(x)=0;$

$> lambda:=0;eq0:=subs(y(x)=y0(x).eq);lambda:='lambda';$

$$eq:=\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)+\lambda y(x)=0\right)$$

$$\lambda:=0$$

$$eq0:=\frac{d^2}{dx^2}y0(x)=0$$

$$\lambda:=\lambda$$

Енді $\lambda\neq 0$ жағдайды қарастырып, берілген теңдеудің жалпы шешімін табайық:

$> assume(a>0):assume(lambda>0);$

$> dsol:=dsolve(eq,y(x)):assign(dsol);$

$$dsol:=y(x)=\_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}x)+\_C2\cos(\sqrt{\lambda\sim}x)$$ Туындыны есептейміз

$> simplify(value(eq));$

$$0=0$$

$> y:=y(x);y1:=simplify(diff\,(y,x));$

$$y:=\_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}x)+\_C2\cos(\sqrt{\lambda\sim}x)$$

$$y1:=\sqrt{\lambda\sim}(\_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}x)+\_C2\cos(\sqrt{\lambda\sim}x))$$

Меншікті мәндерді анықтау үшін теңдеу алайық. Ол үшін шекаралық шарттар бойынша теңдеулер жүйесін құрамыз:

$> eq1:=simplify(subs(x=0,-y1+h*y))=0;$

$> eq2:=simplify(subs(x=a,y1+h*y))=0;$

$eq1:=-\sqrt{\lambda\sim}\,\_C1+h\_C2=0$

$eq2:=\sqrt{\lambda\sim}\,\_C1\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)-\sqrt{\lambda\sim}\,\_C2\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)+$

$h\_C1\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)+h\_C2\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)=0$

Жүйенің матрицасын құрып оның анықтауышын есептейміз:

$> A := linalg[genmatrix](\{eq1, eq2\}.\{\_C1, \_C2\});$

$> Delta := simplify(linalg[det](A));$

$$A := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda\sim}\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - h\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) & -\sqrt{\lambda\sim}\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + h\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) \\ & -\sqrt{\lambda\sim} \end{bmatrix}$$

Анықтауыштың нөлге

$$\Delta := 2h\sqrt{\lambda\sim}\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) + h^2\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) - \lambda\sim\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)$$

тең болуы есептің меншікті мәндерін табу үшін құрылған сипаттамалық теңдеу болып табылады. Алынған анықтауышты теңдеуге түрлендірейік:

$> eq := \exp and(Delta / \cos(lambda\char`^(1/2)*a)) = 0;$

$$eq := 2h\sqrt{\lambda\sim} + \frac{h^2\sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)}{\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)} - \frac{\lambda - \sin(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)}{\cos(\sqrt{\lambda\sim}a\sim)} = 0$$

$> ed := convert(eq, \tan);$

$$eq := 2h\sqrt{\lambda\sim} + h^2\tan(\sqrt{\lambda\sim}a) - \lambda\sim\tan(\sqrt{\lambda\sim}a\sim) = 0$$

Табылған теңдеуді ықшамдау үшін алдымен тангенс бойынша шешіп, содан кейін жаңа айнымалы енгіземіз:

$> solve(eq, \tan(lambda\char`^(1/2)*a));$

$$\frac{2h\sqrt{\lambda\sim}}{-h^2 + \lambda\sim}$$

Енді $\lambda = (\mu / a)^2$ ауыстыруын жасаймыз

$> assume(mu > 0); simplify(subs(lambda = (mu/a)\char`^2, \%));$

$$-\frac{2h\mu\sim a\sim}{h^2 a\sim^2 - \mu\sim^2}$$

Сонымен, формуласы бойынша жаңа айнымалы енгізілген қолайлы. Және де μ мәні $f(\mu) = tg(\mu) - \dfrac{2ha\mu}{\mu^2 - h^2a^2} = 0$ теңдеуімен анықталады.

Maple бойынша осы функцияны анықтайық:

$> f := \tan(mu) - \%;$

$$f := \tan(\mu\sim) + \frac{2h\mu\sim a\sim}{h^2 a\sim^2 - \mu\sim^2}$$

Енді $\mu_k, k = 1,2,3... - f(\mu)$ теңдеуінің оң түбірлері болсын.

Онда есептің меншікті мәндері формуласымен анықталады. Әрі қарай меншікті мәндері $\lambda_k = (\mu_k / a)^2$ функцияларды табайық:

$> \_C2:=slve(eq1,\_C2);$

$> \_C2:=simplify(subs(lambda=(mu/a)^\wedge 2,\_C2));$

$$\_C2:=\frac{\sqrt{\lambda\sim}\,\_C1}{h}$$

$$\_C2:=\frac{\mu\,\_C1}{a\sim h}$$

$> y:=collect(simplify(subs(lambda=(ma/a)^\wedge 2,y)),\_C1);$

$$y:=\frac{\_C1\left(\sin\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right)a\sim h+\mu\sim\cos\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right)\right)}{a\sim h}$$

$> y:=unapply(subs(mu=mu[n],select(has,y,x)),x,n);$

$$y:=(x,n)\to\sin\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right)a\sim h+\mu\sim_n\cos\left(\frac{\mu\sim x}{a\sim}\right)$$

Сонымен есептің меншікті функцияларының түрі:

$$y_n(x)=ah\sin\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)+\mu_n\cos\left(\frac{\mu_n x}{a}\right)$$

Жалпы теория бойынша бұл функциялар *[0, a]* аралығында ортогональ болулары керек. Соны тексерейік

$> Int(y(x,n)*y(x,m),x=0..a);res:=value(\%);$

$$\int_0^{a\sim}\left(\sin\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)a\sim h+\mu\sim_n\cos\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\mu\sim_m x}{a\sim}\right)a\sim h+\mu\sim_m\cos\left(\frac{\mu\sim_m x}{a\sim}\right)\right)dx$$

$$\begin{aligned}res:=&-a\sim(h^2a\sim^2\,\mu\sim_n\cos(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_m)+\mu\sim_n\,\mu\sim_m^{\,2}\cos(\mu\sim_n)\\&\sin(\mu\sim_m)-h^2a\sim^2\,\mu\sim_m\sin(\mu\sim_n)\cos(\mu\sim_m)\\&-a\sim h\mu\sim_n^{\,2}\sin(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_m)-\mu\sim_n^{\,2}\,\mu\sim_m^{\,2}\sin(\mu\sim_n)\cos(\mu\sim_m)+a\sim\\&h\mu\sim_m^{\,2}\sin(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_m))/(\\&\mu\sim_n^{\,2}\,\mu\sim_m^{\,2})\end{aligned}$$

Сипаттамалық $f(\mu)=0$ теңдеуін ескере отырып, алынған нәтижені ықшамдайық:

$> res\_\cos:=solve(Delta,\cos(lambda^\wedge(1/2)*a));$

$$res\_\cos:=\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\sqrt{\lambda\sim}\,a\sim)(-h^2+\lambda\sim)}{h\sqrt{\lambda\sim}}$$

$> simplify($

$> subs(\cos(mu[m])=subs(lambda=(mu[m]/a)^\wedge 2,res\_\cos),res));$

$> simplify(subs($

$> \cos(mu[n]=subs(lambda=(mu[n]/a)^\wedge 2,res\_\cos),\%));$

$$0$$

Бәрі дұрыс. Екі меншікті функциялар жүйесінің нормасын есептейік.

$> Int(y(x,n)^\wedge 2,x=0..a);Norma:=simplify(value(\%));$

$$\int_0^{a\sim}\left(\sin\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)a\sim h+\mu\sim_n\cos\left(\frac{\mu\sim_n x}{a\sim}\right)\right)^2dx$$

$$\begin{aligned}Norma:=&-\frac{1}{2}a\sim(a\sim^2h^2\cos(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_n)-\mu\sim_n^{\,3}-\mu\sim_n^{\,2}\cos(\mu\sim_n)\sin(\mu\sim_n)-h^2a\sim^2\,\mu\sim_n\\&+2a\sim\mu\sim_n\,h\cos(\mu\sim_n)^2-2\mu\sim_m\,a\sim h)/\mu\sim_m\end{aligned}$$

Нәтижені ықшамдаймыз

$> Norma := simlify($

$ubs(\cos(mu[n]\} = subs(lambda = (mu[n]/a)^\wedge 2, res\_cos), Norma));$

$$Norma := -\frac{1}{2} a\sim (2a\sim h + \mu\sim_n{}^2 + h^2 a\sim^2)$$

Енді $\lambda = 0$ санын тексерейік:

$> sol0 := dsolve(eq0, y0(x)); assign(sol0);$

$> simplify(value(rq0));$

$$eq1\_0 := -\_C1 + h\_C3$$

$$eq2\_0 := \_C1 + h(\_C1a + \_C3)$$

$> A0 := lina\lg[genmatrix]\{eq1\_0, eq2\_0\}.\{\_C1, \_C3\});$

$> Delta0 := simplify(lina\lg[\det](A0));$

$$A0 := \begin{bmatrix} -1 & h \\ 1 + ha & h \end{bmatrix}$$

$$\Delta 0 := -2h - ah^2$$

Анықтауышы нөлге тең емес, яғни айқын шешім ғана алынған. Сондықтан $\lambda = 0$ саны есептің меншікті мәні болмайды.

34-мысал: Штурм-Лиувиль есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табу керек.

$y'' + \lambda y = 0, y(a) = 0, y'(b) = 0, x \in [a, b]$

Шешуі: теңдеудің берілуінде алдымен $\lambda \neq 0$ жағдайын қарастырайық

$> eq := diff\,(y(x), x, x) + lambda * y(x) = 0$

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + \lambda y(x) = 0$$

Теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$> dsolve(eq, y(x)); y := unapply(rhs(\%), x);$

$$y(x) = \_C1\sin(\sqrt{\lambda}x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y := x \to \_C1\sin(\sqrt{\lambda}x) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

шекаралық шарттар қойылсын:

$> assume(b > a);$

$> eq := y(a) = 0; eq2 := D[1](y)(b) = 0;$

$$eq1 = \_C1\sin(\sqrt{\lambda}a\sim) + \_C2\cos(\sqrt{\lambda}a\sim) = 0$$

$$eq2 := \_C1\sin(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} - \_C2\sin(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} = 0$$

Коэффициенттер матрицасын құрып, оның анықтауышын есептейік:

$> lina\lg[genmatrix](\{eq1, eq2\}, \{\_C1, \_C2\});$

$> lina\lg[\det](\%); Delta := combine(\%);$

$$\begin{bmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}a\sim) & \cos(\sqrt{\lambda}a\sim) \\ \cos(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} & -\sin(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$-\sin(\sqrt{\lambda}a\sim)\sin(\sqrt{\lambda}b\sim) - \cos(\sqrt{\lambda}a\sim)\cos(\sqrt{\lambda}b\sim)\sqrt{\lambda}$$

$$\Delta := -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a\sim - \sqrt{\lambda}b\sim)$$

Осы анықтауышты нөлге теңестіріп алынған сипаттамалық теңдеудің шешімін табамыз.

$> Delta := select(has, Delta, [\cos]);$

$$\Delta := -\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a\sim -\sqrt{\lambda}b\sim)$$

$> \_EnvAllSolutions := true;$

$> lambda := solve(Delta, lambda);$

$$\lambda = \frac{\pi^2(1+2\_Z1\sim)^2}{4(-b\sim +a\sim)^2}$$

$> lambda := subs(\_Z1 = 'k', lambda);$

$$\lambda = \frac{\pi^2(1+2k)^2}{4(-b\sim +a\sim)^2}$$

Енді меншікті функцияларды анықтаймыз.

$> assume(k, posint); y(x);$

$$\_C1\sin\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k\sim)^2}{(-b\sim +a\sim)^2}}x}{4}\right) + \_C2\cos\left(\frac{\sqrt{4}\sqrt{\frac{\pi^2(1+2k\sim)^2}{(-b\sim +a\sim)^2}}x}{4}\right)$$

$> C1 := solve(eq1, \_C1);$

$$C1 = \frac{\_C2\cos\left(\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim +a\sim)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim +a\sim)}\right)}$$

$> simplify(subs(\_C1 = C1, y(x)));$

$$-\frac{\_C2\left(\cos\left(\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim +a\sim)}\right)\sin\left(\frac{\pi(1+2k\sim)x}{2(-b\sim +a\sim)}\right) - \cos\left(\frac{\pi(1+2k\sim)x}{2(-b\sim +a\sim)}\right)\sin\left(\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim +a\sim)}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi(1+2k\sim)a\sim}{2(-b\sim +a\sim)}\right)}$$

$> combine(\%)$

$$-\frac{\_C2\sin\left(\frac{-\pi a\sim +\pi x - 2\pi a\sim k\sim +2\pi x k\sim}{-2b\sim +2a\sim)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a\sim 1 + 2\pi a\sim k\sim}{-2b\sim +2a\sim)}\right)}$$

$> Yn := unapply(selrct(has, \%,]x]), k, x);$

$$Yn := (x, k\sim) \to \sin\left(\frac{-\pi a\sim +\pi x - 2\pi a\sim k\sim +2\pi x k\sim}{-2b\sim +2a\sim)}\right)$$

Дифференциалдық теңдеуді тексереміз.

$> y := 'y'; Yn(x,k); simplify(subs(y(x) = \%, eq));$

$$\sin\left(\frac{-\pi a\sim +\pi x - 2\pi a\sim k\sim +2\pi x k\sim}{-2b\sim +2a\sim)}\right)$$

$$0 = 0$$

шекаралық шарттарды тексереміз:

$> Yn(a,k) = 0; simplify9D[1](Yn)(b,k)) = 0;$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Меншікті функциялардың $[a,b]$ кесіндісінде ортогональды екендігін тексереміз:

$> assume(n, pos\sin t); assume(m, pos\sin t);$

$> Int(Yn(x,n)*Yn(x,m), x=a..b); simplify(valye(\%));$

$$\int_{a\sim}^{b\sim}\sin\left(\frac{-\pi a\sim+\pi x-2\pi a\sim n\sim+2\pi x n\sim}{-2b\sim+2a\sim)}\right)\sin\left(\frac{-\pi a\sim+\pi x-2\pi a\sim m\sim+2\pi x m\sim}{-2b\sim+2a\sim)}\right)dx$$

$$0$$

Меншікті функциялардың нормасын есептейміз.

$> Norma:=Int(Yn(x,n)\hat{}2; x=a..b); simplify(valye(\%));$

$$Norma:=\int_{a\sim}^{b\sim}\sin\left(\frac{-\pi a\sim+\pi x-2\pi a\sim n\sim+2\pi x n\sim}{-2b\sim+2a\sim)}\right)^2 dx$$

$$\frac{b\sim}{2}-\frac{a\sim}{2}$$

Меншікті функциялардың аргументін қолайлырақ түрге келтіруге болады:

$> Simplify(collect($

$(-Pi*a+Pi*x-2*Pi*a*k+2*Pi*x*k)/(-2*b+2*a), x));$

$$\frac{(1+2k\sim)\pi(-a\sim+x)}{2(-b\sim+a\sim)}$$

Сонымен есептің меншікті мәндері

$$\lambda_k=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, k=1,2,3..,$$

болады да, сол меншікті функциялары –

$$y_k(x)=\sin\left(\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{2(b-a)}\right), k=1,2,3..,$$

Енді $\lambda=0$ жағдайды қарастырайық.

$> lambda:=0; eq;$

$$\lambda:=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x)=0$$

$> dsolve(eq, y(x)); assign(\%); y0:=unapply(y(x),x);$

$$y(x)=\_C1x+\_C2$$

$$y0=x\to\_C1x+\_C2$$

$> eq0\_1:=y0(a)=0; eq0\_2:=D(y0)(b)=0$

$$eq0\_1=\_C1a+\_C2=0$$

$$eq0\_2=\_C1=0$$

$> lina\lg[genmatrix](\{eq0\_1, eq0\_2\}, \{\_C1, \_C2\});$

$> Delta0:=lina\lg[\det](\%)$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & a\end{bmatrix}$$

$$\Delta 0:=-1$$

Бұл жағдайда анықтауыш нөлге тең емес, яғни есептің тек айқын ғана шешімі бар. Олай болса $\lambda=0$ есептің меншікті мәні болмайды.