Методические ре
и указания

Форма
Ф СО ПГУ 7.18.2/05

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Кафедра информатики и информационных систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам по дисциплине Численные методы
для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы

Павлодар

Лист утверждения
методическим реко
и указаниям

Форма
Ф СО ПГУ 7.18.1/05

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР ____Пфейфер Н.Э.
«___»_________201_г.

Составитель: доцент Даутова А.З.

Кафедра Информатики и информац

Методические рекомендации и указания

к лабораторным работам

по дисциплине Численные методы
для студентов специальности 5В070300 – Информационные системы

Рекомендовано на заседании кафедры
«_____»______________201 _г., протокол №__

Заведующий кафедрой_____________Асаинова А.Ж.

Одобрено УМС _ФФМиИТ_

«____»______________201_г., протокол №____

Председатель УМС_________________ Муканова Ж.Г.

ОДОБРЕНО ОПиМО:
Начальник ОПиМО ________________Варакута А.А.
«____»_____________201_г.

Одобрена учебно-методическим советом университета
«_____»______________201_г. Протокол №____

Целью преподавания дисциплины является обучение учащихся знаниям, умениям навыкам необходимым для освоения и использования методов вычислительной математики в дальнейшей их деятельности в качестве специалиста в области прикладной математики.

Задачами курса является формирования у студентов в систематизированной форме понятия о приближенных (численных) методах решения прикладных задач и подготовить студентов к разработке и применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе познания и использования в практической деятельности законов реального мира, посредством математического моделирования.

Лабораторная работа № 1

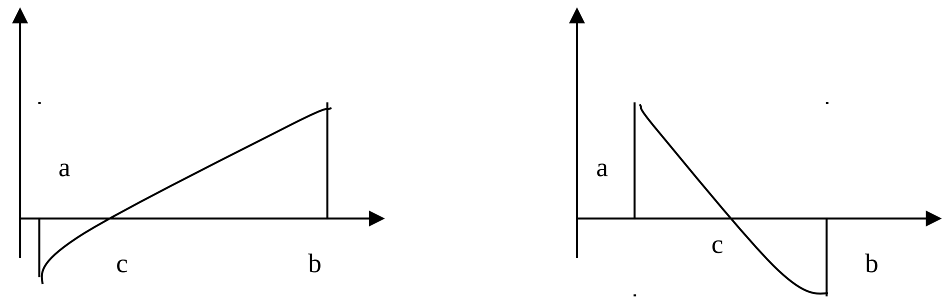
Тема Метод половинного деления

Цель работы: научить численным методам решения нелинейных уравнений, отделения корней и уточнения решения по методу половинного деления

Теория. Решить уравнение – это, значит, установить имеет ли оно корни, сколько корней и найти их значения с заданной точностью. Задача численного нахождения действительных и комплексных корней уравнения обычно состоит из двух этапов: отделение корней, т.е. нахождение достаточно малых окрестностей рассматриваемой области, в которых содержится одно значение корня и уточнение корня, т.е. вычисление корней с заданной степенью точности в некоторой области.

Метод половинного деления

Пусть f(x) на [a,b] имеет единственный корень и f(x) непрерывна. Разделим [a,b] пополам точкой $c=\frac{a+b}{2}$. Если $f(c)\neq 0$, то возможны два случая либо f(x) меняет знак на [a,c], либо на [c,b]



Выбирая в каждом случае тот из отрезков, в котором функция меняет знак и продолжая процесс половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень.

Рассмотренный метод можно использовать как метод решения уравнения с заданной точностью. Действительно, если на каком то этапе получен [□□□] содержащий корень, то, приняв приближенно $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ получим ошибку, не превышающую значение $D=\frac{\beta-\alpha}{2}$. Метод этот связан с трудоемкими вычислениями.

Задание. 1) отделить корни аналитически.

2) отделить корни аналитически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до 0,01.

3) отделить корни графически.

4) отделить корни графически и уточнить один из них методом половинного деления с точностью до 0,01.

1. x-sin(x)=0.25
2. tg(0.58x+0.1)=x^2
3. x-cos(0.387x)=0

4. $tg(0.4x+0.4)=x^2$
5. $lgx-7/(2x+6)=0$
6. $tg(0.5x+0.2)=x^2$
7. $3x-cos(x-1)=0$
8. $x+lgx=0.5$
9. $tg(0.5x+0.1)=x^2$
10. $x^2+4sinx=0$
11. $ctg(1.05x)-x^2=0$
12. $tg(0.4x+0.3)=x^2$
13. $xlgx-1.2=0$
14. $1.8x^2-sin10x=0$
15. $ctgx-x/10=0$
16. $3x-cosx-1=0$
17. $tg(0.44x+0.3)=x^2$
18. $x^2+4sinx=0$
19. $ctgx-x/2=0$
20. $X^2-20sinx=0.$

Образец выполнения задания

$1)\ 5^x-6x-3=0;\quad 2)\ x^4-x^3-2x^2+3x-3=0;$

$3)\ 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+x^2=3x-2;\quad 4)\ x^2\log_{0,5}(x+1)=1.$

1) обозначим $f(x)=5^x-6x-3.$ находим производную $f'(x)=5^x\ln 5-6.$ вычислим корень производной:

$5^x\lg 5-6=0;\quad 5^x=\frac{6}{\lg 5};\quad x\lg 5=\lg 6-\lg(\ln 5);$

$x=\frac{\lg 6-\lg(\ln 5)}{\lg 5}=\frac{0,7782-0,2065}{0,6990}=\frac{0,5717}{0,6990}\approx 0,82.$

Составим таблица знаков функции $f(x)$, полагая x равным:

А) критическим значением функции (корням производной) или близким к ним;

Б) граничным значениям (исходя из области допустимых значений неизвестного):

X	$-\infty$	1	$+\infty$
SIGN F(X)	+	-	+

Так как происходят две перемены знака функции, то уравнение имеет два действительных корня. Чтобы завершить операцию отделения корней, следует уменьшить промежутки, содержащие корни, так чтобы их длина была не больше 1. Для этого составим новую таблицу знаков функции f(x):

x	-1	0	1	2
Sign f(x)	+	-	-	+

Отсюда видно, что корни заключены в следующих промежутках:
$x_1 \in [-1,0]; \; x_2 \in [1,2].$

2) полагая $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3,$ имеем $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3.$
Найдем корни производной:
$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0; \; 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0; \; (x^2 - 1)(4x - 3) = 0; \; x_1 = -1;$
$x_2 = 1; \; x_3 = 3/4.$

Составим таблицу знаков функций f(x**):**

X	-∞	1	3/4	1	+∞
Sign f(x)	+	-	-	-	+

Из таблицы видно, что уравнение имеет два действительных корня :
$x_1 \in [-\infty,-1]; \; x_{2\in} [1,+\infty].$

Уменьшим промежутки, в которых находятся корни:

X	-2 -1	1	2	
Sign f(x)	+	-	-	+

Следовательно, $x_1 \in [-2,-1]; \; x_2 \in [1,2].$

Уточним один из корней, например $x_1 \in [-2,-1],$ методом проб до сотых долей. Все вычисления удобно производить, используя следующую таблицу:

N	A_N^+	B_N^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	X_N^4 $-X_N^3$	$-2X_N^2$	$3X_N$	$F(X_N)$	
0	-2	-1	-1,5	5,0625	3,375	-4,5	-4,5	-3,5625
1	-2	-1,5	-1,75	9,3789	5,3594	-6,125	-5,25	0,3633
2	-1,75	-1,5	-1,63	7,0591	4,3307	-5,3138	-4,89	-1,8140
3	-1,75	-1,63	-1,69	8,1573	4,8268	-5,7122	-5,07	-0,7981
4	-1,75	-1,69	-1,72	8,7521	5,0884	-5,9168	-5,16	-0,2363
5	-1,75	-1,72	-1,73	8,9575	5,1777	-5,9858	-5,19	-0,0406
6	-1,75	-1,73	-1,74	9,1664	5,2680	-6,0552	-5,22	0,1592
7	-1,74	-1,73						

Ответ: $x_1 \approx -1,73$.

3) перепишем уравнение в виде $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -x^2 + 3x - 2.$ обозначив $y_1 = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \; y_2 = -x^2 + 3x - 2$ и построив графики этих функций, мы увидим, что уравнение имеет два корня: $x_1 \approx 1,1$; $x_2 \approx 2,9$.

4) перепишем уравнение в виде $\log_{0.5}(x + 1) = 1/x^2.$ обозначив $y_1 = \log_{0.5}(x + 1), \; y_2 = 1/x^2$ и построив графики этих функций, мы увидим, что уравнение имеет один корень $x_1 \approx -0,8$.

Для уточнения этого корня методом проб выберем промежуток, на концах которого функция $f(x)=x^2\log_{0.5}(x+1)-1$ имеет разные знаки. Составим таблицу:

X	-0,5	-0,8
SIGN F(X)	-	+

Для удобства расчетов перейдем к десятичным логарифмам:
$f(x)=x^2\dfrac{\lg(x+1)}{-0,301}-1$. дальнейшие вычисления производим в таблице:

N	A_n^+	B_n^-	$x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$	X_n^2	$Lg(x_n+1)$	$F(x_n)$
0	-0,8	-0,65	0,4225	-0,4559	-0,360	
1	-0,8	-0,73	0,5329	-0,5686	0,0067	
2	-0,73	-0,69	0,4761	-0,5086	-0,196	
3	-0,73	-0,71	0,5041	-0,5376	-0,099	
4	-0,73	-0,72	0,5184	-0,5528	-0,048	
5	-0,73					
	-0,5					
	-0,65					
	-0,65					
	-0,69					
	-0,71					
	-0,72					

Ответ: $x\approx-0,73$.

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример нелинейного уравнения.
2. Что значит: решить уравнение?
3. Назовите способы отделения корней. В чем суть метода половинного деления?

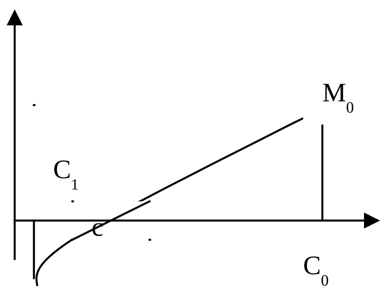
Лабораторная работа № 2

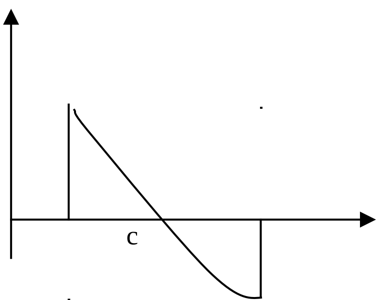
Тема **Метод Ньютона**

Цель работы: **Научить численным методам решения нелинейных уравнений, отделения корней и уточнения решения по методу касательных.**

Теория:

<u>Отличие</u>: на k-той итерации вместо хорды проводится касательная к кривой $y=F(x)$ при $x=c_k$ ищется точка пересечения касательной с точкой абсцисс. Вместо [a,b] указываем некоторое начальное приближение корня $x=c_0$.





Уравнение касательной, проведенной к кривой $y=F(x)$ в точке M_0 с координатами c_0, $F(c_0)$ имеет вид:

$y- F(c_0)=F'(c_0)(x-c_0)$.

Следующее приближение корня c_1 как абсцисса точки пересечения касательной с осью x (y=0).

$C_1=c_0- F(c_0)/ F'(c_0)$ и т.д.

$C_{n+1}=c_n- F(c_n)/ F'(c_n)$, $F'(c_n)\neq 0$.

Для окончания итерационного процесса может быть использовано условие $|F(c_n)|<\varepsilon$ или $|c_{n+1}- c_n|<\varepsilon$. Скорость сходимости выше.

Задание: 1) отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0,001.

2) отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них с точностью до 0,001 методом касательных.

1. $x-\sin(x)=0.25$
2. $tg(0.58x+0.1)=x^2$
3. $x-\cos(0.387x)=0$
4. $tg(0.4x+0.4)=x^2$
5. $lgx-7/(2x+6)=0$
6. $tg(0.5x+0.2)=x^2$
7. $3x-\cos(x-1)=0$
8. $x+lgx=0.5$
9. $tg(0.5x+0.1)=x^2$
10. $x^2+4\sin x=0$
11. $ctg(1.05x)-x^2=0$
12. $tg(0.4x+0.3)=x^2$
13. $xlgx-1.2=0$
14. $1.8x^2-\sin 10x=0$
15. $ctgx-x/10=0$
16. $3x-\cos x-1=0$
17. $tg(0.44x+0.3)=x^2$
18. $x^2+4\sin x=0$
19. $ctgx-x/2=0$
20. $X^2-20SINX=0$.

Образец выполнения задания

1) $tg(0,55x+0,1)=x^2$; 2) $x^3-0,2x^2+0,5x+1,5=0$.

Выше мы отделили один из корней этого уравнения и установили, что он заключен в промежутке [0,6;0,8]. Уточним этот корень методом касательных. Так как f(0,6)>0; f(0,8)<0 и f”(x)<0, то за начальное приближение примем $x_0=0,8$.

Вычисления производим по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Предварительно найдем

$$f'(0,8)=\frac{0,55}{\cos^2(0,44+0,1)}-2\cdot 0,8=\frac{0,55}{0,85772}-1,6=\frac{0,55}{0,7356}-1,6=$$
$$=0,7477-1,6=-0,8523.$$

Составим таблицу:

N	X_n	X_n^2	$0,55x_n+0,1$	$Tg(0,55x_n+0,1)$	$F(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{-0,8523}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	-0,0406	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5643	-0,0018	0,0021
2	0,7503	0,5630	0,5127	0,5630	-0,0000	0

Ответ: $x \approx 0,750$.

2) выше мы установили, что уравнение имеет действительный корень, принадлежащий промежутку [-1,0]. Уточним этот корень методом касательных. Так как f(-1)<0, f(0)>0 и f”(x)<0, то за начальное приближение принимаем $x_0=-1$.

Для вычислений применяем формулу

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Находим $f(x)=x^3-0,2x^2+0,5x+1,5;\quad f'(x)=3x^2-0,4x+0,5.$ для вычислений используем таблицу:

N	X_n	X_n^2	X_n^3	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$h=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-1	1	-1	-0,2	3,9	-0,051
1	-0,949	0,9006	-1,8547	-0,0093	3,5814	-0,0026
2	-0,9464	0,8957	-0,8477	-0,0004	3,5657	-0,00001

Ответ: $x \approx -0,946$.

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример нелинейного уравнения.
2. Что значит: решить уравнение?
3. Назовите способы отделения корней.
4. Условие сходимости по методу касательных.
5. Приведите итерационную формулу метода ньютона?

Лабораторная работа № 3

Тема **Метод простой итерации**

Цель работы: **Научить численным методам решения нелинейных уравнений, отделения корней.**

Теория. Заменим уравнение y=F(x) равносильным x=f(x). Пусть ξ- корень уравнения x=f(x), а x_0- полученное каким-либо способом нулевое приближение к корню ξ. Подставляя x_0 в уравнение x=f(x) имеем

$$X_1=f(x_0)$$
$$X_2=f(x_1)$$
$$X_3=f(x_2),\ \ldots$$

Применяя соотношения $x_n=f(x_{n-1})$ для n=1,2,… образуем числовую последовательность x_0, $x_1,\ldots$, $x_n,\ldots$, которая называется последовательностью приближений.

Теорема (достаточное условие сходимости):

Пусть уравнение x=f(x)имеет единственный корень на [a,b] и выполнены условия:

a) f(x)- определена и дифференцируема на [a,b];
b) f(x)□[a,b] для всех x□[a,b];
c) Существует такое вещественное q, что |f'(x)|□q<1 для всех x□[a,b];

Тогда итерационная последовательность $x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1,2,3,\ldots)$ *сходится* *при* $\forall x_0 \in [a,b]$.

Задание.

1) отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0,001.
2) отделить корни уравнения аналитически и уточнить один из них с точностью до 0,001 методом итераций.

1. x-sin(x)=0.25
2. tg(0.58x+0.1)=x^2
3. x-cos(0.387x)=0
4. tg(0.4x+0.4)=x^2
5. lgx-7/(2x+6)=0
6. tg(0.5x+0.2)=x^2
7. 3x-cos(x-1)=0
8. x+lgx=0.5
9. tg(0.5x+0.1)=x^2
10. x^2+4sinx=0
11. ctg(1.05x)-x^2=0
12. tg(0.4x+0.3)=x^2
13. xlgx-1.2=0
14. 1.8x^2-sin10x=0
15. ctgx-x/10=0
16. 3x-cosx-1=0
17. tg(0.44x+0.3)=x^2
18. x^2+4sinx=0
19. ctgx-x/2=0
20. x^2-20sinx=0.

Образец выполнения задания

1) $2x + \lg(2x+3) = 1$; 2) $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Найдем приближенные значения корней графически; для этого уравнение удобно представить в виде $\lg(2x+3) = 1 - 2x$. Построив график, мы увидим, что уравнение имеет один корень, лежащий в промежутке [0;0,5]. Для уточнения его методом итераций приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$.

Функцию $\varphi(x)$ будем искать из соотношения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k}$, считая, что $|k| \geq q/2$, где $q = \max|f'(x)|$; число k имеет тот же знак, что и $f'(x)$ в промежутке [0;0,5].

Находим $f(x) = 2x + \lg(2x+3) - 1$;

$$f'(x) = 2 + \frac{0{,}8686}{2x+3};$$

$Q = \max\limits_{[0;0,5]} f'(x) = 2 + \frac{0{,}8686}{2\cdot 0 + 3} \approx 2{,}2895$; $f'(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 0{,}5$.

Примем k=2, тогда $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{2} = x - x - \frac{\lg(2x+3)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x+3)$.

За начальное приближение возьмем $x_0 = 0$, все остальные приближения будем определять из равенства $x_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x_n + 3)$.

Вычисления удобно располагать в таблице:

N	X_n	$2x_n+3$	$Lg(2x_n+3)$	$\frac{1}{2}\lg(2x_n+3)$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	3,5228	0,5469	0,2734
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304			

Ответ: $x \approx 0{,}230$.

2. Отделяем корни аналитически. Находим

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3;\quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 7;\quad D = 4 - 21\cdot 4 < 0.$$

Составим таблицу:

X	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Sign f(x)	-	-	+	+

Уравнение имеет действительный корень, лежащий в промежутке [-1,0].

Приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x)| < 1$ при $-1 \leq x \leq 0$. Так как $Q = \max\limits_{[-1,0]}|f'(x)| = f'(-1) = 3 + 4 + 7 = 14$, то можно взять k=10. Тогда

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{k} = x - 0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 - 0{,}7x - 0{,}3 = -0{,}1x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}3.$$

Пусть $x_0=0$, тогда $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. Вычисления располагаем в таблице:

N	X_n	x_n^2	x_n^3	$\varphi(x_n)$
0	0	0	0	-0,3
1	-0,3	0,09	-0,027	-0,3693
2	-0,3693	0,1364	-0,0504	-0,3785
3	-0,3785	0,1433	-0,0542	-0,3795
4	-0,3795	0,1440	-0,0546	-0,3796
5	-0,3796			

Ответ: $x \approx -0{,}380$.

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример нелинейного уравнения.
2. Что значит: решить уравнение?
3. Назовите способы отделения корней.
4. Условие сходимости по методу итераций?
5. Приведите итерационную формулу?

Лабораторная работа № 4

Тема **Метод Гаусса решения систем линейных уравнений**

Цель работы: **Научить численным методам решения систем линейных уравнений**

Теория. Многообразие численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на прямые (точные) и итерационные методы.

Прямые методы характеризуются тем, что дают решение системы за конечное число арифметических действий (операций). Если все операции выполняются точно (без ошибок округления), то решение тоже получается точным. К прямым методам относятся метод Крамера, метод Гаусса и его модификации: метод главного элемента, метод квадратного корня и т.д., метод ортогонализации. Прямые методы применяются на практике для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), как правило, с числами порядка не выше 10^3.

Итерационные методы являются приближенными. Они дают решение системы как предел последовательных приближении, вычисляемых по единообразной схеме. К ним относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксации, градиентные методы и их модификации. На практике итерационные методы применяются для решения СЛАУ с числами порядка 10^6.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n – неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Запись системы в матричном виде

$$Ax = b, \quad где$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ прямоугольная матрица m×n

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Решением системы называется такая упорядоченная совокупность чисел, $x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n,$ которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Система ЛАУ называется совместной, если имеет хотя бы одно решение. Совместная система называется определенной, если имеет единственное решение и неопределенной, если более одного решения. Две системы линейных уравнений называется равносильными (эквивалентными), если каждое решение первой системы является решением второй и наоборот.

Матрица $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ полученная из матрицы А путем добавления столбца свободных членов, называется <u>расширенной.</u>

Система имеет единственное решение, если rang A=rang B.

Система имеет единственное решение, если rang A=n, где n число неизвестных и бесконечно много, если r<n.

Если матрица А- квадратная и ее определитель $\det A \neq 0$, то она называется <u>неособенной (невырожденной).</u>

Квадратная матрица А называется симметричной, если она равна транспонированной ($A = A^T$, то есть $a_{ij} = a_{ji}$)

Матрица А называется <u>ортогональной,</u> если сумма квадратов каждого столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю, то есть $AA^T = E$.

Методом Гаусса называют точный метод решения невырожденной системы ЛАУ, состоящей в том, что последовательным исключением неизвестных систему

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ приводят к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n} x_n = d_2 \\ \vdots \\ \qquad\qquad x_n = d_n \end{cases}$$

решение, которой находят по формулам

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k, \quad x_n = d_n \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1).$$

Пусть исходная система имеет вид

$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$ и $a_{11} \neq 0$, разделим обе части a_{11}, получим

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \text{ где } b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \ (i = 2,3,\dots,n) \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}. (*)$$

С помощью уравнения (*), исключим во всех уравнениях системы, начиная со второго, слагаемые, содержащие x. Для этого умножаем обе части (*) последовательно на коэффициенты $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}$ и вычитаем соответственно из второго,…, n-го уравнения. В результате получаем систему, порядок которой на единицу меньше исходной

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \text{ где}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \qquad (i, j = 2,3,\dots,n)$$

$$b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1 \qquad (i = 2,3,\dots,n)$$

Аналогично преобразуя, в результате n-кратного повторения получим систему с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ \qquad\qquad x_n = d_n \end{cases}$$

, которая эквивалентна исходной и легко решается. Из последнего находим x_n, подставляя x_n в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1}, и так далее.

Коэффициенты $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots$ называют ведущими элементами метода Гаусса. На каждом шаге предполагается, что $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Если $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ мал то, то после деления на этот элемент и вычитания k- го уравнения из последующих возникают большие погрешности вычисления, чтобы избежать этого , на каждом этапе уравнения переставляют таким образом, чтобы на главной диагонали оказался наибольший по модулю элемент k- го столбца.

Задание. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,001. Составить программу

№ вариан-тов	матрица коэффициентов системы A				столбец свобод-ных членов B
	a_1	a_2	a_3	a_4	
1	7.3 10.7 15.6 7.5	12.4 -7.7 6.6 12.2	-3.8 12.5 14.4 -8.3	-14.3 6.6 -8.7 3.7	5.8 -6.6 12.4 9.2

2	8.1 1.1 1.7 1.3	1.2 -1.7 -1.8 1.7	-9.1 7.2 10 -9.9	1.7 -3.4 2.3 3.5	10 1.7 2.1 27.1
3	1.7 20 10 3.3	9.9 0.5 -20 -0.7	-20 -30.1 30.2 3.3	-1.7 -1.1 0.5 20	1.7 2.1 1.8 -1.7
4	1.1 1.3 1.1 1.5	11.3 -11.7 -10.5 -0.5	-1.7 1.8 -1.7 1.8	1.8 1.4 -1.5 -1.1	10 1.3 1.1 10
5	1.4 10 2.2 1.1	2.1 -1.7 34.4 1.3	-3.3 1.1 -1.1 1.2	1.1 -1.5 -1.2 1.4	10 1.7 20 1.3
6	1.7 10 3.5 1.3	-1.3 -1. 3.3 1.1	-1.1 -1.3 1.2 -1.3	-1.2 1.3 1.3 -1.1	2.2 1.1 1.2 10
7	35.8 27.1 11.7 6.3	2.1 -7.5 1.8 10	-34.5 11.7 -6.5 7.1	-11.8 -23.5 7.1 3.4	0.5 12.8 1.7 20.8
8	1.1 -3.3 7.5 1.7	11.2 1.1 1.3 7.5	11.1 30.1 1.1 -1.8	-13.1 -20.1 10 2.1	1.3 1.1 20 1.1
9	30.1 -17.5 1.7 2.1	-1.4 11.1 -21.1 2.1	10 1.3 7.1 3.5	-1.5 -7.5 -17.1 3.3	10 1.3 10 1.7
№ вариан-тов	матрица коэффициентов системы A				столбец свобод-ных членов B
	a_1	a_2	a_3	a_4	
10	4.8 22 15 8.6	12.5 -31.7 21.1 -14.4	-6.3 12.4 -4.5 6.2	-9.7 -8.7 14.4 2.8	3.5 4.6 15 -1.2

11	14.2	3.2	-4.2	8.5	13.2
	6.3	-4.3	12.7	-5.8	-4.4
	8.4	-22.3	-5.2	4.7	6.4
	2.7	13.7	6.4	-12.7	8.5
12	13.2	-8.3	-4.4	6.2	6.8
	8.3	4.2	-5.6	7.7	12.4
	5.8	-3.7	12.4	-6.2	8.7
	3.5	6.6	-13.8	-9.3	-10.8
13	3.3	-2.2	-10	1.7	1.1
	1.8	21.1	1.3	-2.2	2.2
	-10	1.1	20	-4.5	10
	70	-1.7	-2.2	3.3	2.1
14	1.7	-1.8	1.9	-57.4	10
	1.1	-4.3	1.5	-1.7	19
	1.2	-1.4	1.6	1.8	20
	7.1	-1.3	-4.1	5.2	10
15	14.4	-5.3	14.3	-12.7	-14.4
	23.4	-14.2	-5.4	2.1	6.6
	6.3	-13.2	-6.5	14.3	9.4
	5.6	8.8	-6.7	-23.8	7.3
16	8.2	-3.2	14.2	14.8	-8.4
	5.6	-12	15	-6.4	4.5
	5.7	3.6	-12.4	-2.3	3.3
	6.8	13.2	-6.3	-8.7	14.3
17	6.1	6.2	-6.3	6.4	6.5
	1.1	-1.5	2.2	-3.8	4.2
	5.1	-5	4.9	-4.8	4.7
	1.8	1.9	2.0	-2.1	2.2
18	4.3	-12.1	23.2	-14.1	15.5
	2.4	-4.4	3.5	5.5	2.5
	5.4	8.3	-7.4	-12.7	8.6
	6.3	-7.6	1.34	3.7	12.1

№ вариан-тов	матрица коэффициентов системы A				столбец свобод-ных членов B
	a_1	a_2	a_3	a_4	
19	1.3	-1.7	3.3	1.7	1.1
	10	5.5	-1.3	3.4	1.3
	1.1	1.8	-2.2	-1.1	10
	1.3	-1.2	2.1	2.2	1.8

20	1.2 10 2.2 10	1.8 -5.1 -30.1 2.4	-2.2 1.2 3.1 -30.5	-4.1 5.5 5.8 -2.2	1.3 1.2 10 34.1

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 0{,}68x1 + 0{,}05x2 - 0{,}11x3 + 0{,}08x4 = 2{,}15, \\ 0{,}21x1 - 0{,}13x2 + 0{,}27x3 - 0{,}8x4 = 0{,}44, \\ -0{,}11x_1 - 0{,}84x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}06x_4 = -0{,}83, \\ -0{,}08x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}5x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}16. \end{cases}$$

Вычисление производим по схеме единственного деления:

Коэффициенты при неизвестных				Свобод-ные члены	Контрольные суммы Σ	Строчные суммы Σ'
X_1	X_2	X_3	X_4			
0,68	0,05	-0,11	0,08	2,15	2,85	2,85
0,21	-0,13	0,27	-0,8	0,44	-0,01	-0,01
-0,11	-0,84	0,28	0,06	-0,83	-1,44	-1,44
-0,08	0,15	-0,5	-0,12	1,16	0,61	0,61
1	0,0735	-0,1618	0,1176	3,1618	4,1912	4,1912
	-0,1454	0,30398	-0,8247	-0,22398	-0,89015	-0,8901
	-0,8319	0,2622	0,0729	-0,4822	-0,97897	-0,97896
	0,1559	-0,5129	-0,1106	1,4129	0,9453	0,9453
	1	-2,0906	5,6719	1,5404	6,1221	6,1217
		-1,47697	4,79139	0,7992	4,1140	4,1136
		-0,18697	-0,9948	1,1723	-0,00913	-0,0095
		1	-3,2441	-0,5411	-2,7854	-2,7851
			-1,6013	1,0711	-0,5299	-0,5302
			1	-0,6689	0,3309	0,3311
2,8264	-0,3337	-2,7110	-0,6689			
3,8263	0,6664	-1,7119	0,3309			

Ответ: x_1=2,826; x_2=-0,334; x_3=-2,711; x_4=-0,669.

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример систему линейных уравнений 2*2.
2. Что значит решить систему линейных уравнений?
3. Всегда ли система имеет единственное решение?
4. В чем суть метода Гаусса?

Что значит уравнения систем линейно-зависимые?

Лабораторная работа № 5

Тема **Метод вращений**

Цель: Практическое освоение метода вращений

Математическая постановка задачи: Метод вращений – один из вариантов метода Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Система линейных алгебраических уравнений приводится к треугольному виду путем линейного комбинирования уравнений.

Вычислительная схема:

1. Вычисляем $c_{21} = \dfrac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$ $s_{21} = -\dfrac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$ (если $a_{11} = a_{21} = 0$, то $c_{21} = 1$ и $s_{21} = 0$)
2. Первые два уравнения системы (1) заменяются уравнениями
$$c_{21}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) - s_{21}(a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n) = c_{21}b_1 - s_{21}b_2$$
$$s_{21}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + c_{21}(a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n) = s_{21}b_1 + c_{21}b_2$$
После преобразования во втором уравнений коэффициент при $x_1 = 0$.
3. Аналогичным образом обрабатывают преобразованное первое уравнение с третьим исходным уравнением, полученное первое с исходным четвертым и т. д. После (n-1) - го шага процесса приходят к системе вида
$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$
4. Повторяя шаги 1-3 для системы с отброшенным первым уравнением, после $\dfrac{n(n-1)}{2}$ шагов приходят к системе с треугольной матрицей.
5. Обратный ход осуществляется по обычным формулам
$$x_m = \frac{b_m^{(n)} - a_{mm+1}^{(n)}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}^{(n)}x_n}{a_{mm}}, \quad (m = n, n-1, \ldots, 1).$$

Задание:

1. Решить систему линейных уравнений методом вращений

Номера вариантов смотри в лабораторной работе № 4.

2. Сравните результаты, какой метод сходится быстрее и почему?

Лабораторная работа № 6

Тема **Метод Зейделя решения систем линейных уравнений**

Цель работы***:*** **Научить студентов приближенным методам решения систем линейных уравнений**

Задание. Методом Зейделя решить с точностью до 0,001 систему линейных уравнений, приведя ее к виду, удобному для итераций.

Образец выполнения задания

$$\begin{cases} 4,5x1 - 1,8x2 + 3,6x3 = -1,7; \\ 3,1x1 + 2,3x2 - 1,2x3 = 3,6; \\ 1,8x1 + 2,5x2 + 4,6x3 = 2,2. \end{cases}$$

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9; & (I + II) \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7; & (2III + II - I) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4; & (III - II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9; \\ 10x_1 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7; \\ 10x_1 = 1,3x_1 - 0,2x_2 - 4,2x_3 - 1,4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 + 0,19; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97; \\ x_3 = 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 - 0,14. \end{cases}$$

Норма $\|A\|_1$ матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных в правых частях уравнений, равна $\{0,53;\ 0,77;\ 0,57\} = 0,77 < 1$; значит, процесс Зейделя сходится.

Вычисления располагаем в таблице:

N	x_1	x_2	x_3	N	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,14	5	0,2467	1,1138	-0,2237
1	0,2207	1,0703	-0,1915	6	0,2472	1,1143	-0,2241
2	0,2354	1,0988	-0,2118	7	0,2474	1,1145	-0,2243
3	0,2424	1,1088	-0,2196	8	0,2475	1,1145	-0,2243
4	0,2454	1,1124	-0,2226				

Ответ: $x_1 \approx 0,248$; $x_2 \approx 1,115$; $x_3 \approx -0,224$.

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример систему линейных уравнений 2*2.
2. Что значит решить систему линейных уравнений?
3. Всегда ли система имеет единственное решение?

4. В чем суть метода Зейделя?

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Калиткин. Численные методы. М., Наука, 1978.
2. И. С. Бахвалов Численные методы. Ч.1, М., Наука, 1973.
3. Г. И. Марчук Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980.
4. Л. И. Турчак Основы численных методов. М., Наука, 1987.
5. Г. И. Воробьева, А. И. Данилова Практикум по численным методам. М., Наука, 1979.
6. Н. Культин Программирование на Object Pascal в Delphi 5. Спб, БХБ, Санкт-Петербург, 1999.
7. Фаронов В.В. Турбо Паскаль 7.0 Учебный курс.-М., 1998.-433с.