

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова
Кафедра алгебры и математического анализа

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ СТУДЕНТОВ

дисциплины Методы математической физики

для студентов
специальности(ей) 050604 Физика

Пусть задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом. Пусть задан диаметр $2R$ реактора. Требуется определить R так, чтобы максимизировать линейную плотность потока нейтронов в отражателе.

Рассмотрим теперь задачу о критическом диаметре шарового реактора в предположении, что $\alpha^2 = \alpha(r)$, где $\alpha(r)$ - произвольная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 \leq \alpha(r) \leq A^2, \quad (4.20)$$

где A - фиксированная постоянная. Лапласиан α^2 зависит от коэффициента размножения нейтронов и поэтому определяется концентрацией источника нейтронов. Поэтому ограничение (4.20) имеет определённый физический смысл.

В рассматриваемом случае процесс описывается уравнением

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dN}{dr} \right) + \alpha(r)N = 0, \quad 0 < r < R \quad (4.21)$$

с граничным условием

$$N(R) = 0. \quad (4.22)$$

При этом по физическому смыслу функции $N(r)$ должно выполняться условие

$$0 \leq N(r) < \infty, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (4.23)$$

Задача оптимизации состоит в отыскании кусочно - непрерывного управления $\alpha(r)$ такого, чтобы оно удовлетворяло ограничениям (4.20), соответствующее ему нетривиальное решение задачи (4.21), (4.22) удовлетворяло условию (4.23) и при этом функционал

$$I = \int_0^R dr$$

принимал наименьшее возможное значение. Для решения задачи вводим замену $rN=x$, тогда уравнение (4.21) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \alpha(r)x = 0.$$

Полагая $x = x_1$, $\frac{dx_1}{dr} = x_2$.

Получаем каноническую систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dr} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dr} = -\alpha(r)x_1, \quad 0 < r < R. \quad (4.24)$$

С дополнительными условиями

$$x_1(R) = 0, x_1(0) = 0. \quad (4.25)$$

Первое из условий непосредственно следует из (4.22). Второе получается из условия ограниченности $N(r)$ при $r=0$.

Таким образом, задача оптимизации состоит в отыскании такого допустимого управления в системе (4.24), чтобы соответствующее ему решение задачи (4.24), (4.25) удовлетворяло условию

$$x_1(r) \geq 0 \quad (4.26)$$

и при этом функционал I принимал наименьшее значение.

Для отыскания оптимального управления составляем функцию

$$H = x_2 \psi_1 - \alpha(r) x_1 \psi_2.$$

Тогда внутри области определяемой неравенством (4.26), переменные ψ_1, ψ_2, α связаны соотношениями

$$\frac{d\psi_1}{dr} = d\psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dr} = -\psi_1, \quad (4.27)$$

а оптимальное управление $\alpha_0(r)$ определяется из условия максимума функции H по переменной α , т. е.

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} A^2, & \text{при } \psi_2 x_1 < 0 \\ 0, & \text{при } \psi_1 x_2 > 0 \end{cases}.$$

Согласно условиям трансверсальности ψ_1, ψ_2 удовлетворяют граничным условиям

$$\psi_2(R) = \psi_2(0) = 0 \quad (4.28)$$

Если внутри отрезка $0 \leq r \leq R$ функция $x(r)$, соответствующая оптимальному управлению, выходит на границу области (4.26), то, поскольку в нашем примере $g(x) = x$, находим, что

$$P(x) = (\text{grad } g(x), f) = x_2$$

и, следовательно, условие регулярности в граничных точках не выполняется. В силу этого обстоятельства мы не можем пользоваться принципом максимума для определения оптимального управления в тех точках r , в которых

$$x_1(r) = 0$$

Предположим сначала, что $x_1(r) > 0$ при $0 < r < \varepsilon$, где ε – некоторая положительная постоянная. Если при этом $\psi_2(r) \leq 0$, то $\alpha(r) = A^2$ и, согласно соотношениям (4.24), (4.25) имеем

$$x_1(r) = c \sin Ar \quad (4.29)$$

где c – произвольная положительная постоянная, а из (4.27), (4.28) следует, что

$$\psi_2(r) = \gamma \sin Ar, \gamma > 0.$$

Таким образом, произведение $\psi_2 x_1$ сохраняет знак при всех r из отрезка $\left[0, \frac{\pi}{A}\right]$. Нас интересует минимум функционала I . Исходя из этого, возьмём R . Тогда функция (4.29) должна удовлетворять первому условию (4.25), и, следовательно, будем иметь $C_1=0$ при $R < \pi/A$, а это противоречит неравенству $\psi_2 x_1 < 0$, при $0 < r < \varepsilon$. Поэтому предположение о том, что $\psi_2 x_1 < 0$, при $0 < r < \varepsilon$ приводит к тому, что

$$R = \frac{\pi}{A}. \tag{4.30}$$

Допустим теперь, что $\psi_2(x_1) > 0$, при $0 < r < \varepsilon$. Тогда $x_0(r) = 0$ при $0 < r < \varepsilon$ и согласно соотношениям (4.24), (4.25) и (4.27), (4.28) находим, что

$$\begin{aligned} x_1(r) &= c_1 r, \quad \psi_2(r) = \gamma r, \quad \text{при } 0 < r < \varepsilon \\ x_1 \psi_2 &= c_2 r^2 \end{aligned},$$

где c_1, c_2, γ – произвольные постоянные, причём $c_2 > 0$. Отсюда следует, что произведение $\psi_2 x_1$ не может обратиться в нуль при возрастании r от 0 до R . Согласно условию (4.25) $c_1 = 0$, а $x_1(r) = 0$ для всех $r \in [0, R]$. Таким образом, предположение $\psi_2 x_1 > 0$ при $0 < r < \varepsilon$ неизбежно приводит к выводу, что $x_1(r)$ лежит на границе области (4.26) при $0 < r < \varepsilon$. Допустим, что $x_1(r) = 0$ при $0 < r < \varepsilon$. Тогда на интервале $\varepsilon < r < R$ процесс описывается уравнениями (4.24) и дополнительными условиями

$$x_1(R) = x_1(\varepsilon) = 0$$

и нужно минимализировать функционал I . Если $\psi x < 0$ при $\varepsilon < r < \varepsilon + \delta$, где δ – произвольное малое число, то изложенным выше способом приходим к выводу, что

$$x_1 = c \sin A(r - \varepsilon)$$

и, следовательно,

$$R = \frac{\pi}{A} + \varepsilon$$

Сравнивая полученный результат с (4.30) находим, что найденное R не является минимальным.

Если $\psi x > 0$ или $x(r) = 0$ при $\varepsilon < r < \varepsilon + \delta$, то изложенный анализ повторяем для $\varepsilon + \delta < r < \varepsilon + \delta + \delta$.

В результате приходим к одному из двух выводов.

1. Из всех управлений, удовлетворяющих принципу максимума, управление $\alpha_0(r) = A^2, 0 < r < R$ даёт наименьшее значение функционала I.
2. Решение $x_1(r) = 0, 0 \leq r \leq R$, краевой задачи (4.24), (4.25) является допустимым (принадлежит границе области (4.26)) и ему соответствует произвольно малое значение функционала I.

Так как второй из этих выводов даёт решение рассматриваемой задачи, то окончательно полученное оптимальное управление имеет вид

$$\alpha_0(r) = A^2, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (4.31)$$

а соответствующий ему критический радиус сферического реактора определяется формулой (4.30).

3. ПЛОСКИЙ РЕАКТОР.

Если реактор имеет вид однородной пластины, то плотность потока нейтронов зависит только от координаты x (ось x перпендикулярна пластине, начало координат в середине пластины). В этом случае плотность потока нейтронов удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{d^2 N}{dx^2} + \alpha^2 N = 0. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) имеет решение

$$N(x) = A \cos \alpha x, \quad (5.2)$$

где A – произвольная постоянная. Граничное условие (d – толщина пластины),

$$N\left(\pm \frac{H}{2}\right) = 0, \quad (5.3)$$

будет выполнено, если

$$\alpha = \frac{\pi}{d} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

Минимальное значение α имеет при $n=1$, т.е. реактор будет критичен, если толщина пластины удовлетворяет условию:

$$\alpha = \frac{\pi}{d}. \quad (5.5)$$

Величину α , определенную из (5.5) по заданному значению d , называют геометрическим параметром, а величину $\alpha^2 = \frac{k-1}{L^2 + k\tau}$ – материальным параметром. Условие критичности состоит в равенстве материального и геометрического параметров:

$$\alpha_M \equiv \frac{\sqrt{k-1}}{M} = \frac{\pi}{\alpha} \equiv \alpha_{geom} . \quad (5.6)$$

4. РЕАКТОР В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

Пусть реактор имеет форму параллелепипеда со сторонами a , b , c . В этом случае уравнение плотности потока нейтронов имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \alpha^2 N = 0 . \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) решается методом разделения переменных. Решение имеет вид:

$$N(x, y, z) = A \cos \alpha_x x \cdot \cos \alpha_y y \cdot \cos \alpha_z z$$

$$\alpha_x = \frac{\pi}{a}, \quad \alpha_y = \frac{\pi}{b}, \quad \alpha_z = \frac{\pi}{c} \quad (6.2)$$

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = \alpha^2 .$$

Объем реактора равен:

$$V = a \cdot b \cdot c = \frac{\pi^3}{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} .$$

Минимальный объём при задании α имеет реактор в виде куба (если сравниваются между собой только параллелепипеды)

$$V_K = \frac{3\sqrt{3}\pi^3}{\alpha^3} . \quad (6.3)$$

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ РЕАКТОРА.

1. Конечно – разностная форма диффузионных уравнений.

Аналитическое решение диффузионных уравнений двухгрупповой и многогрупповой теории, кроме отдельных случаев, затруднительно, а часто практически невозможно. В конце этого параграфа дан метод полуаналитического решения задачи для одного практически важного случая. Значительно более универсальным оказывается иной подход к задаче: дифференциальные уравнения многогрупповой теории заменяются конечно-разностными, в результате чего мы приходим к системе алгебраических уравнений.

Общий приём, приводящий к удобной форме конечно-разностных уравнений, таков: весь объём реактора разбивается на части так, чтобы плотность нейтронов внутри каждой части не слишком сильно менялась. Объём сферического реактора, естественно, разбивается на шаровые слои, а цилиндрического - на кольцевые некоторой высоты. После этого, значения плотности нейтронов каждой группы в «центре» каждого слоя принимаются за искомые величины. Далее составляем уравнение баланса. Если x_s^1 - плотность нейтронов группы 1 в рассматриваемом слое s , x_m^1 - плотность нейтронов той же группы 1 в соседнем слое, h - расстояние между центрами слоёв и S - площадь границы между слоями, то поток нейтронов группы 1 в рассматриваемый слой из соседнего равен

$$D_1 S \frac{x_m^1 - x_s^1}{h},$$

где D_1 - коэффициент диффузии нейтронов группы 1. Полный поток нейтронов группы 1 из соседних слоёв в данный равняется

$$\sum D_1 S \frac{x_m^1 - x_s^1}{h},$$

где суммирование происходит по всем слоям, имеющим непосредственную границу с рассматриваемым. Полученное выражение - конечно-разностный аналог члена ΔN в дифференциальном уравнении.

Потеря нейтронов группы 1 за счёт поглощения или замедления, выражается $AV_s x_s^1$, где V_s – объём слоя s и A - коэффициент, пропорциональный соответственно величине.

Наконец, приток нейтронов за счёт перехода из групп с большей энергией в данную энергетическую группу 1 в одном и том же слое, получим систему уравнений:

$$x_s^1 = \sum A_{s,m}^1 x_m^1 + \sum B_s^{n,1} x_s^n - F_s^1 x_s^1, \quad (7.1)$$

где x_s^1 – плотность нейтронов 1-й энергетической группы в s-м слое, первая сумма распространена по слоям, соседним с s, а вторая - по тем энергетическим группам, из которых имеется переход в 1-ю группу. Если переход нейтронов в 1-ю группу из n-й группы происходит за счёт размножения нейтронов при захвате их делющимися ядрами, то коэффициент $B_s^{n,1}$ - пропорционален коэффициенту размножения, который соответствует энергии n-й группы нейтронов.

Заметим ещё, что для краевых слоёв поток нейтронов на границе с вакуумом имеет вид $DS \frac{0-x}{h}$, т.е. имеет ту же форму, что для внутренних слоёв, только плотность нейтронов на границе с вакуумом равна нулю. Уравнение (7.1) справедливо и в том случае, когда реактор состоит из нескольких зон с различными свойствами. Для слоёв, граничащих со слоями другой зоны, в коэффициенте $A_{s,m}^1$ следует учесть изменение коэффициента диффузии при переходе из одной зоны в другую.

Система (7.1) - однородна и имеет, в общем говоря, только тривиальное решение. Физически это соответствует тому, что реактор не находится в критическом состоянии.

2. Постановка задачи.

Если в (7.1) перенести $F_s^1 x_s^1$ в левую часть, то получим

$$x_s^1 = \sum D_{s,m}^1 x_m^1 + \sum E_s^{n,1} x_s^n, \quad (7.2)$$

причём коэффициенты $D_{s,m}^1$ и $E_s^{n,1}$ положительны.

Если мы зададимся произвольным распределением плотности нейтронов, т.е. зададим им числа x как угодно, лишь бы они были неотрицательны и не все равны нулю, то, подставляя заданные значения в правую часть (7.2) мы получим новые значения x . Повторяя этот процесс, будем иметь:

- а) если реактор подкритичен, стремление всех x_s^1 к нулю;
- б) если реактор надкритичен, стремление x_s^1 к бесконечности.

В случае критичности реактора произойдёт установление стандартных значений $x_s^1 \neq 0$. Эти утверждения, ясные из физических соображений, можно было получить и чисто математическим путём.

Из физических соображений видно, что если мы теперь изменим подходящим образом коэффициенты размножения во всех или некоторых слоях или зонах, мы можем привести реактор к критическому состоянию. Если мы произведём это изменение монотонно с помощью одного параметра λ (скажем, умножая коэффициент размножения во всех активных зонах на λ), то опять из физических соображений ясно, что критичность достигается при единственном значении λ .

Поставим задачу так, пусть заданы геометрические и физические параметры реактора. Ищем значение величины λ , на которую можно помножить коэффициент размножения в одной активной зоне или в нескольких с тем, чтобы при прочих фиксированных геометрических и физических параметрах реактора, он стал критичным.

Если получится $\lambda < 1$, то реактор в истинном виде надкритичен, если же $\lambda > 1$, то реактор подкритичен. Отсюда можно сделать заключение о направлении нужных изменений в геометрических или физических параметрах реактора - увеличение при $\lambda < 1$ и уменьшение при $\lambda > 1$ размером активной зоны или степени обогащения делящимися изотопами и т.д. По количественному отличию величины λ от 1 можно делать и приближенные количественные заключения. Критическое состояние отвечает таким параметрам реактора, при которых $\lambda = 1$.

Итак, мы свели задачу к нахождению собственного числа λ некоторой матрицы. Фактически само такое нахождение λ производится разными способами. Так, для двумерных задач приходится применять трудоёмкий процесс итераций уравнений. Если переменные разделяются и задача делается одномерной, то удастся найти сравнительно простые способы нахождения λ . Схему одного из таких способов мы сейчас приведём.

3. Метод прогонки

Пусть мы имеем для конкретности цилиндрический реактор, состоящий из нескольких активных зон и отражателя. Рассмотрим решение уравнений теории двух групп, которые для удобства впишем ещё раз

$$\Delta N - \frac{N}{L_j^2} = -W_j n, \quad \Delta n - \frac{n}{\tau_j} = -\frac{k_j N}{L_j^2 \tau_j W_j}, \quad (7.3)$$

где $W_j = \frac{B_j}{P_{0j} L_c^2}$

В отражателе $k_j = 0$. Граничные условия между зонами таковы:

$$N_j = N_{j+1}; \quad N_j^0 = P_{j,j+1} N_{j+1}^0; \quad n_j = n_{j+1}; \quad n_j^0 = S_{j,j+1} n_{j+1}^0 \quad (7.4)$$

Считая, что переменные разделяются в дальнейшем буквами N и n , обозначим только радиальную часть функций.

Разделим каждую зону по радиусу на равные кольца. Плотность тепловых и замедляющихся нейтронов в s -м кольце обозначим соответственно N_s и n_s ($s=1,2,\dots,m$). Пусть теперь при коэффициенте размножения во всех активных зонах $N_p^* = \lambda N_p$ (индексом p обозначим слой, принадлежащей активной зоне). Соотношение баланса () приведут нас к уравнениям для групп замедляющихся нейтронов:

$$\begin{aligned} n_1 &= c_1 n_2 + b_1 N_1^*, \\ n_2 &= a_2 n_1 + c_2 n_3 + b_2 N_2^*, \\ &\dots \\ n_s &= a_s n_{s-1} + c_s n_{s+1} + b_s N_s^*, \\ &\dots \\ n_m &= a_m n_{m-1} \end{aligned} \quad (7.5)$$

и для тепловой группы

$$\begin{aligned} N_1 &= C_1 N_2 + B_1 n_1, \\ N_2 &= A_2 N_1 + C_2 N_3 + B_2 n_2, \\ &\dots \\ N_s &= A_s N_{s-1} + C_s N_{s+1} + b_s N_s^*, \\ &\dots \\ N_m &= A_m N_{m-1} + B_m n_m \end{aligned} \quad (7.6)$$

Даны конкретные выражения для a, b, c, A, B, C . Идея метода состоит в следующем: мы выражаем каждое n_s через N_k ($k=1,2,\dots,s$) n_{s+1} (прямой ход прогонки). Для n такое выражение прямо дано формулой (7.5). Подставляя его в формулу для n_2 находим

$$n_2(1 - a_2 c_1) = a_2 b_1 N_1^* + b_2 N_2^* + c_2 n_3$$

и вообще, если для n_{s+1} мы уже имеем

$$n_{s-1} = F_{s-1} + v_{s-1} n_s,$$

где F_{s-1} линейная комбинация N_k^* ($k=1,2,\dots,s-1$), то последовательно находим

$$n_s = F_s + v_s n_{s+1}$$

где

$$v_s = \frac{c_s}{1 - a_s v_{s-1}}$$

и

$$F_s = \frac{F_{s-1}}{1 - a_s v_{s-1}} + \frac{b_s N_s^*}{1 - a_s v_{s-1}}$$

Когда активные зоны кончаются, то F_s перестанут добавляться члены с новыми N_s^* .

Итак, каждое p_s выразилось через p_{s+1} с коэффициентом v_s и F_s -линейную комбинацию величин N_s^* . Но p_m -последние из p_s , выражается лишь через предыдущие, так как $p_{m+1}=0$. Таким образом, последние p_s выражено через одни N_h^* . Теперь мы можем выразить p_{m-1} через одни N_p^* , подставив его в выражение через N_p^* и p_m уже полученное значение p_m через p_p^* . Затем через N_p^* выражается p_{m-2} и т.д. (обратный ход прогонки).

Далее мы используем уравнения () для тепловой группы нейтронов и, двигаясь от N_1 к N_m , выражаем N_1 через N_2 и N_p^* и т.д. (прямой ход в тепловой группе). Дойдя до конца отражателя, мы получаем выражение для N_m через N_p^* и затем, возвращаясь обратно, последовательно выражаем N_{m-1} , N_{m-2} , ..., N_1 через N_p^* (обратный ход в тепловой группе).

Итак, мы получили выражение каждого N_s в активной зоне как линейную комбинацию N_p^* :

$$N_s = \sum_p a_{s,p} N_p^*,$$

Вспоминая, что $N_p^* = \lambda N_p$, получим

$$N_s = \lambda \sum_p a_{s,p} N_p.$$

Теперь остается найти собственный вектор матрицы $\|a_{s,p}\|$ с наибольшим собственным числом. Это достигается, например, с помощью итераций, причем за начальный вектор можно принять любой вектор с неотрицательными компонентами. Затем нужно задать, скажем N_1 и подставить полученные для $N_p = \lambda N_p$ величины в выражении для интересующих нас N_s и p_s .

Легко видеть, что этот метод без изменения переносится на случай решения уравнений со многими группами. Если рождение нейтронов происходит лишь в результате поглощения нейтронов одной группы, то так же, как мы делали выше, каждая из величин p_s для самой быстрой группы выражается через N_p (прямой и обратный ход), затем для следующей группы и т.д. Наконец, мы приходим к той же матрице, как и в случае двух групп.

Несколько иначе обстоит дело в том случае, когда рождение нейтронов происходит, скажем, в трех наиболее медленных группах. Обозначим через N_s^1, N_s^2, N_s^3 плотности нейтронов в самых медленных группах и положим

$$N_s^* = \lambda(d_1 N_s^1 + d_2 N_s^2 + d_3 N_s^3)$$

где λ имеет тот же смысл, что и прежде, а сумма

$$\alpha_1 N_s^1 + \alpha_2 N_s^2 + \alpha_3 N_s^3$$

равна правой части уравнения () для самой быстрой группы.

Теперь, совершая для каждой группы, начиная с самой быстрой, прямой и обратный ход, мы приходим к линейному выражению N_s^3 через N_p , затем N_s^2 через N_p и, наконец, N_s^1 через N_p . Далее нужно для каждого s выразить

$$x_s = \alpha_1 N_s^1 + \alpha_2 N_s^2 + \alpha_3 N_s^3$$

и мы получим систему уравнений

$$x_s = \lambda \sum_p b_{s,p} x_p.$$

Наибольшее собственное число матриц $\|b_{s,p}\|$ и есть нужное нам число λ .

Получив x_s , мы находим все N_s , а следовательно, и все N_s^1 .

4. Формулы для коэффициентов уравнений (7.5), (7.6).

Пусть рассматриваемый слой ограничен радиусами r_s, r_{s-1} , принадлежат к j -й зоне и не являются граничными. Тогда коль, скоро толщина кольца в j -й зоне есть Δ_j , имеем

$$A_s = \frac{2r_{s-1}}{G_s}, \quad B_s = \frac{\Delta_j^2 (r_{s-1} + r_s) W_j}{G_s}, \quad C_s = \frac{2r_{s+1}}{G_s},$$

где

$$G_s = (r_{s-1} + r_s) \left[2 + \Delta_j^2 \left(\frac{1}{L_j^2} + \alpha_z^2 \right) \right]$$

и

$$a_s = \frac{2r_{s-1}}{g_s}, \quad b_s = \frac{\Delta_j (r_{s-1} + r_s) k_j}{g_s L_s^2 \tau_j W_j}, \quad C_s = \frac{2r_{s+1}}{g_s},$$

где

$$g_s = (r_{s-1} + r_s) \left[2 + \Delta_j^2 \left(\frac{1}{\tau_j} + \alpha_z^2 \right) \right]$$

Для слоев, пограничных между j и $j+1$ зона, если r_s - граница между этими зонами, мы имеем

$$A_s = \frac{2r_{s-1}}{G_s}, \quad B_s = \frac{\Delta_j^2 (r_{s-1} + r_s) W_j}{G_s}, \quad C_s = \frac{4p_{j,j+1} r_s}{\left(\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} + p_{j,j+1} \right) G_s},$$

где

$$G_s = 2r_{s-1} + \frac{4p_{j,j+1} r_s}{\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} + p_{j,j+1}} + \Delta_j^2 (r_{s-1} + r_s) \left(\frac{1}{L_j^2} + \alpha_z^2 \right)$$

и

$$a_s = \frac{2r_{s-1}}{g_s}, \quad b_s = \frac{\Delta_j^2 (r_{s-1} + r_s) k_j}{g_s L_s^2 \tau_j W_j}, \quad C_s = \frac{4s_{j,j+1} r_s}{\left(\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} + s_{j,j+1} \right) g_s},$$

где

$$g_s = 2r_{s-1} + \frac{4s_{j,j+1} r_s}{\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} + s_{j,j+1}} + \Delta_j^2 (r_{s-1} + r_s) \left(\frac{1}{\tau_j} + \alpha_z^2 \right).$$

Аналогичные формулы для s -го слоя (за границей зоны) выглядят так:

$$A_{s+1} = \frac{4r_s}{(1 + p_{j,j+1} \frac{\Delta_j}{\Delta_{j+1}})G_{s+1}}, \quad B_{s+1} = \frac{\Delta_{j+1}^2 (r_s + r_{s+1})W_{j+1}}{G_{s+1}}, \quad C_{s+1} = \frac{2r_{s+1}}{G_{s+1}},$$

где

$$G_{s+1} = 2r_{s+1} + \frac{4r_s}{1 + p_{j,j+1} \frac{\Delta_j}{\Delta_{j+1}}} + \Delta_{j+1}^2 (r_s + r_{s+1}) \left(\frac{1}{L_{j+1}^2} + \alpha_z^2 \right)$$

и

$$a_{s+1} = \frac{4r_s}{(1 + s_{j,j+1} \frac{\Delta_j}{\Delta_{j+1}})g_{s+1}}, \quad b_{s+1} = \frac{\Delta_{j+1}^2 (r_s + r_{s+1})k_{j+1}}{g_{s+1} \tau_{j+1} L_{j+1}^2 W_{j+1}}, \quad c_{s+1} = \frac{2r_{s+1}}{g_{s+1}},$$

где

$$g_{s+1} = 2r_{s+1} + \frac{4r_s}{1 + s_{j,j+1} \frac{\Delta_j}{\Delta_{j+1}}} + \Delta_{j+2}^2 (r_s + r_{s+1}) \left(\frac{1}{\tau_{j+1}} + \alpha_z \right).$$

5. Полуаналитический расчет критических размеров цилиндрического реактора с многими зонами.

Пусть реактор имеет форму цилиндра и в уравнениях (7.3) возможно разделение переменных. Тогда из уравнений () получим

$$N'' + \frac{1}{r} N' - \left(\frac{1}{L_j^2} + \alpha_z^2 \right) N = -n W_j,$$

$$n'' + \frac{1}{r} n' - \left(\frac{1}{\tau_j} + \alpha_z^2 \right) n = - \frac{k_j N}{L_j^2 \tau_j W_j}. \quad (7.7)$$

Кроме граничного условия (), должны быть выполнены условия (при $r=0$):

$$N' = n' = 0 \quad (7.8)$$

и на экстраполированной границе последней зоны :

$$N = n = 0. \quad (7.9)$$

Рассмотрим систему уравнений (7.7) в некоторой зоне. Это система линейных дифференцированных уравнений второго порядка. Известно, что общее решение такой системы содержит 4 произвольные постоянные:

$$N(r) = C_1 N_1(r) + C_2 N_2(r) + C_3 N_3(r) + C_4 N_4(r),$$

$$n(r) = c_1 n_1(r) + c_2 n_2(r) + c_3 n_3(r) + c_4 n_4(r).$$

(7.10)

Однако, если известны граничные условия, которым удовлетворяют $N(r)$ и $n(r)$ на одной из границ зоны, то общее решение системы уравнений (7.7) содержит лишь две произвольные постоянные. Будем искать решения (7.7), удовлетворяющие условиям

$$N'' + \frac{1}{r} N' = -\lambda^2 N, \quad n'' + \frac{1}{r} n' = -\lambda^2 n. \quad (7.11)$$

Легко видеть, что это возможно при следующих значениях λ :

$$\lambda_1^2 = \alpha^2 - \alpha_z^2, \quad \lambda_2^2 = -\beta^2 - \alpha_z^2,$$

При этом если N удовлетворяет условию

$$N'' + \frac{1}{r} N' + \lambda_z^2 N = 0 \quad (k = 1, 2),$$

то (7.12)

$$n = J_k N = \frac{1}{W_j} \left[\lambda_k^2 + \frac{1}{L_z^2} \right] N.$$

Решение уравнений (7.11) является функцией Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{aligned} N(r) &= C_{1,k} J_0(\lambda_k r) + C_{2,k} J_0(\lambda_k r), \\ n(r) &= C_{1,k} J_k J_0(\lambda_k r) + C_{2,k} J_k J_0(\lambda_k r) \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Так как λ_2^2 отрицательно, то в соответствующих местах стоят функции Бесселя от мнимого аргумента. В большинстве зон λ_1^2 положительно. Поэтому общее решение системы уравнений () можно записать так:

$$\begin{aligned} N(r) &= C_{1,1} J_0(\lambda_1 r) + C_{2,1} J_0(\lambda_1 r) + C_{1,2} I_0(|\lambda_2| r) + C_{2,2} K_0(|\lambda_2| r), \\ n(r) &= J[C_{1,1} J_0(\lambda_1 r) + C_{2,1} J_0(\lambda_1 r)] + J[C_{1,2} I_0(|\lambda_2| r) + C_{2,2} K_0(|\lambda_2| r)]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$U(r) + \frac{J_2 N - n}{J_2 - J_1}; \quad V(r) = -\frac{J_1 N - n}{J_2 - J_1} \quad (7.15)$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} U''(r) + \frac{U'(r)}{r} + \lambda_1^2 U &= 0 \\ V''(r) + \frac{V'(r)}{r} + \lambda_2^2 V &= 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Функция $N(r)$ и $n(r)$ можно выразить через u и v так:

$$N(r) = U(r) + V(r); \quad n(r) = J_1 U(r) + J_2 V(r). \quad (7.17)$$

6. Граничные условия.

Пусть на границах зон выполняются граничные условия:

$$\begin{aligned} N' &= d_{11}N + \alpha_{12}n, \\ n' &= d_{21}N + \alpha_{22}n, \end{aligned} \quad (7.18)$$

а на экстраполированной границе последней зоны (7.9). Используя формулы (7.15) можно получить, что в случае (7.18) для функции u и v выполняются условия

$$\begin{aligned} U' &= a_{11}U + a_{12}V, \\ V &= a_{21}U + a_{22}V \end{aligned} \quad (7.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (J_2 - J_1)^{-1} [J_2(\alpha_{11} + J_1\alpha_{12}) - \alpha_{21} - J_1\alpha_{22}], \\ a_{12} &= (J_2 - J_1)^{-1} [J_2(\alpha_{11} + J_2\alpha_{12}) - \alpha_{21} - J_2\alpha_{22}], \\ a_{21} &= (J_2 - J_1)^{-1} [-J_1(\alpha_{11} + J_1\alpha_{12}) + \alpha_{21} + J_1\alpha_{22}], \\ a_{22} &= (J_2 - J_1)^{-1} [-J_2(\alpha_{11} + J_2\alpha_{12}) + \alpha_{21} + J_2\alpha_{22}]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Если же мы имеем граничные условия (), то из них следует, что $u=v=0$ (7.21)

Предположим теперь, что нам известны граничные условия вида (7.19) для u и v . Так используя формулы (7.17) получим (7.18), причем:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (J_2 - J_1)^{-1} [J_2(a_{11} + a_{21}) - J_1(a_{12} + a_{22})], \\ \alpha_{12} &= (J_2 - J_1)^{-1} [a_{12} + a_{22} - a_{11} - a_{21}], \\ \alpha_{21} &= (J_2 - J_1)^{-1} [J_2(J_1a_{11} + J_2a_{21}) - J_1(J_1a_{12} + J_2a_{22})], \\ \alpha_{22} &= (J_2 - J_1)^{-1} [J_1a_{12} + J_2a_{22} - J_1a_{11} - J_2a_{21}]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Из граничных условий (7.21) следуют граничные условия (7.9). Пусть $r=r_j$ есть граница между j -й и $j+1$ -й зоне при $r=r_j$ выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} N' &= \bar{\alpha}_{11} N + \bar{\alpha}_{12} n, \\ n' &= \bar{\alpha}_{21} N + \bar{\alpha}_{22} n, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

$$\bar{\alpha}_{11} = p_{j,j+1} \alpha_{11}; \bar{\alpha}_{12} = p_{j,j+1} \alpha_{12}; \bar{\alpha}_{21} = p_{j,j+1} \alpha_{21}; \bar{\alpha}_{22} = p_{j,j+1} \alpha_{22} \quad (7.24)$$

Аналогично можно от граничных условий при $r=r_j$ в j -й зоне перейти к граничным условиям в j -й зоне.

Пусть в j -й зоне ($r_{j-1} < r < r_j$) функции u и v удовлетворяют уравнениям (7.16) и при $r=r_j$ выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} U'(r_j) &= \bar{\alpha}_{11} U + \bar{\alpha}_{12} V, \\ V'(r_j) &= \bar{\alpha}_{21} U + \bar{\alpha}_{22} V, \end{aligned} \quad (7.25)$$

или (7.21). Соответствует только одно решение $u_1(r)$ и $v_1(r)$ системы (7.16), удовлетворяющее граничным условиям (7.25) или соответственно (7.21) и следующим условиям на другом конце зоны $r=r_{j-1}$:

$$U_1(r_{j-1}) = 1, V_1(r_{j-1}) = 0. \quad (7.26)$$

Аналогично, существует одно и только одно решение $u_2(r)$ и $v_2(r)$ системы (7.16), удовлетворяющее граничным условиям (7.25) или соответственно (7.21) и условиям при $r=r_{j-1}$:

$$U_2(r_{j-1}) = 0, V_2(r_{j-1}) = 1. \quad (7.27)$$

Общее решение системы (7.16), удовлетворяющее граничным условиям (7.25) или соответственно (7.21), легко выражается через u_1 ; u_2 ; v_1 ; v_2 :

$$\begin{aligned} U(r) &= U(r_{j-1})U_1(r) + V(r_{j-1})U_2(r), \\ V(r) &= U(r_{j-1})V_1(r) + V(r_{j-1})V_2(r) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Дифференцируем равенства (7.28) по r и положим $r=r_{j-1}$. При этом получим

$$\begin{aligned} U'(r_{j-1}) &= U(r_{j-1})U_1'(r_{j-1}) + V(r_{j-1})U_2'(r_{j-1}), \\ V'(r_{j-1}) &= U(r_{j-1})V_1'(r_{j-1}) + V(r_{j-1})V_2'(r_{j-1}). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Таким образом, при $r=r_{j-1}$ общее решение системы (7.16), удовлетворяющее условиям (7.25), или соответственно (7.21), удовлетворяет граничным условиям (7.19) с

$$a_{11} = U_1^{\square}(r_{j-1}), \quad a_{12} = U_2^{\square}(r_{j-1}), \quad a_{21} = V_1^{\square}(r_{j-1}), \quad a_{22} = V_2^{\prime}(r_{j-1}). \quad (7.30)$$