Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Факультет физики, математики и информационных технологий

Кафедра информатики и информационных систем

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

Основы теории массового обслуживания

Павлодар

Марковские системы массового обслуживания (СМО)

Системы массового обслуживания - это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания. Для задания СМО необходимо задать вероятностные характеристики времени обслуживания одной заявки. Обозначим это время через T_{obsl}. Величина T_{obsl} является случайной. Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным, т.е.

$$F(t) = P(T_{obsl} < t) \quad , \quad P(T_{obsl} < t) = 1 - e^{(-\mu t)}$$

Параметр этого распределения называемая интенсивностью потока обслуживания, есть величина, обратная среднему времени обслуживания, т.е.

$$\mu = \frac{1}{M(T_{obsl})}.$$

При этом под потоком обслуживания понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Если T_{obsl} представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение, то поток обслуживания является простейшим.

Если входящий поток и все потоки обслуживания простейшие, то процесс, протекающий в СМО, является марковским случайным процессом (цепью) с дискретными состояниями и непрерывным временем. Поэтому СМО, в которой все потоки простейшие, называют марковской СМО. Таким образом, предположение о показательном законе распределения времени обслуживания и интервала времени между двумя последовательными поступлениями заявок играет исключительную роль в теории массового обслуживания, так как упрощает аналитическое исследование СМО, сводя его к исследованию цепей Маркова.

Задача 1. Автоматизированная система управления АСУ продажей железнодорожных билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ. При выходе из строя одной ЭВМ АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ. Поток отказов каждой ЭВМ простейший. Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам. При выходе из строя отказавшую ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта ЭВМ распределено по показательному закону и в среднем составляет двое суток. В начальный момент обе ЭВМ исправны. Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы ЭВМ ее производительность равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ. Провести статистическое испытание модели АСУ.

Решение. Обозначим состояния АСУ по числу вышедших из строя ЭВМ: A_0- обе машины исправны; A_1- одна исправна, одна ремонтируется; A_2 - обе машины ремонтируются. Так как потоки отказов и восстановления ЭВМ являются простейшими, то их интенсивности вычисляются по формулам:

$\lambda = \frac{1}{M(T)}$, $\lambda = \frac{1}{10}$ отказов в сутки, $\mu = \frac{1}{M(T_{obsl})}$, $\mu = \frac{1}{2}$ восстановления в сутки.

Из состояния A_0 в состояние A_1 СМО переходит с интенсивностью □□□ □□□□ из состояния A_1 в состояние A_2; - с интенсивностью □□□ □□ из состояния A_2 в состояние A_1 - с интенсивностью □□□ □□□□ из состояния A_1 в состояние A_0 - с интенсивностью □□ = □□ В описанной СМО происходит процесс гибели и размножения с числом состояний k+1=3, так как k=2. Перейдем к вычислениям:

>**M[T]:=10;lambda:=1/M[T];T[obsl]:=2;mu:=1/T[obsl];lambda0:=2*lambda;lambda1:=lambda;**

mu1:=mu;mu2:=2*mu;p[0]:=(1+lambda0/mu1+lambda0*lambda1/(mu1*mu2))^(-1); p[1]:=lambda0/mu1*p[0];p[2]:=lambda1/mu2*p[1];

$$M_T := 10$$

$$\lambda := \frac{1}{10}$$

$$T_{obsl} := 2$$

$$\mu := \frac{1}{2}$$

$$\lambda 0 := \frac{1}{5}$$

$$\lambda 1 := \frac{1}{10}$$

$$\mu 1 := \frac{1}{2}$$

$$\mu 2 := 1$$

$$p_0 := \frac{25}{36}$$

$$p_1 := \frac{5}{18}$$

$$p_2 := \frac{1}{36}$$

Очевидно, что сумма всех вероятностей состояний равна 1:

> **p[0]+p[1]+p[2];**

$$1$$

Средняя производительность (%) в установившемся режиме составит

> **print(evalf(100*(p[0]+p[1])+30*p[2]),"%");**

$$98.05555556, \text{"\%"}$$

Перейдем к статистическому моделированию СМО, для чего составим процедуру:

```
> p:=proc(k) global sb1,sb2,ob:local k1,k2,t1,t2,i,rn,r:
sb1:=0:sb2:=0:ob:=0:k1:=0:k2:=0:t1:=0:t2:=0:
rn:=rand(1..10):for i from 1 by 1 to k do
k1:=rn(): if (k1=1 and t1=0) then t1:=2:sb1:=sb1+1:else if (t1>0) then t1:=t1-0.5 fi:fi:
k2:=rn():if (k2=1 and t2=0) then t2:=2:sb2:=sb2+1 else if (t2>0) then t2:=t2-0.5 fi:fi: if (t1=2 and t2=2) then ob:=ob+1 fi:od:end:
```

Глобальные переменные sb1 и sb2 хранят количество сбоев 1-го и 2-о компьютеров соответственно. Другая глобальная переменная ob служит для накопления случаев одновременного выхода из строя обоих компьютеров. Локальная переменная t1 (t2) выражает продолжительность ремонта 1-го (2-го) компьютера в случае выхода его из строя. Псевдослучайное число k1 (k2) принимает значения от 1 до 10. В случае k1=1 (k2=1) считаем, что произошло случайное событие " 1-ый (2-ой) компьютер вышел из строя". Моделируем работу СМО в течение одного года (365 дней):

> **n:=365:p(n);print("Всего дней: ",n):print("Сбоев 1-го компьютера: ",sb1):print("Сбоев 2-го компьютера: ",sb2):print("Одновременный сбой обоих компьютеров:",ob):**

"Всего дней: ", 365

"Сбоев 1-го компьтера:", 26

"Сбоев 2-го компьтера:", 26

"Одновременный сбой обоих компьтеров:", 2

Повторим опыт 100 раз и найдем среднее число сбоев каждого компьютера за год:

> **sb_1:=0:sb_2:=0:o_b:=0:**
for j from 1 by 1 to 100 do
p(n):sb_1:=sb_1+sb1:sb_2:=sb_2+sb2:o_b:=o_b+ob od:print("Всего дней: ",n):print("Сбоев 1-го компьютера:",sb_1/100):print("Сбоев 2-го компьютера:",sb_2/100):print("Одновременный сбой обоих компьютеров:",o_b/100):

"Всего дней: ", 365

$$\text{"Сбоев 1-го компьтера:"}, \frac{2623}{100}$$

$$\text{"Сбоев 2-го компьтера:"}, \frac{2591}{100}$$

$$\text{"Одновременный сбой обоих компьтеров:"}, \frac{49}{25}$$

Задача 2. Техническое устройство состоит из двух узлов и может находиться в одном из двух состояний:

- оба узла исправны, работают;
- неисправен только первый узел;
- неисправен только второй узел;
- неисправны оба узла.

Вероятность выхода из строя после месячной эксплуатации для первого узла равна 0,4; для второго узла - 0,3, а вероятность совместного выхода их из строя равна 0,1. В исходном состоянии оба узла исправны, работают. Найдите вероятности перехода из одного состояния в другое и вероятности состояний после двухмесячной эксплуатации. Проведите статистическое моделирование работы технического устройства.

Одноканальная СМО (с отказами) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания заявок

Простейшей одноканальной моделью с вероятностным входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид

$$f_1(t) = \lambda\, e^{(-\lambda t)}$$

,

где - интенсивность поступления заявок в систему.

Под интенсивностью потока понимают

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m(t, t+\tau)}{\tau}$$
,

где m(t, t□□□ - среднее число событий в интервале (t, t□□□□

Плотность распределения длительностей обслуживания:

$$f_2(t) = \mu\, \mathbf{e}^{(-\mu t)}$$
,

где □ - интенсивность обслуживания.

Поток заявок и обслуживания простейшие, т.е. обладающие свойствами стационарности (среднее число событий, воздействующих на систему, в течение единицы времени, остается постоянным), ординарности (вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событий пренебрежимо мала) и отсутствия последействия (для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени).

Для простейшего потока интенсивность □ = const.

Пусть система работает с отказами. Необходимо определить абсолютную и относительную пропускную способности системы. Система имеет два состояния:: S_0 - канал свободен и S_1 - канал занят. Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$ - вероятность состояния S_0 , $P_1(t)$ - вероятность состояния S_1 . Составим систему уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1(t) = -\mu P_0(t) + \lambda P_1(t)$$

С учетом того, что $P_0(t) + P_1(t) = 1$, решение системы такое:

$$P_0(t) = \frac{\lambda\, \mathbf{e}^{(-(\lambda+\mu) t)}}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$
;

$$P_1(t) = 1 - P_0(t)$$
.

Для 1-канальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как относительная пропускная способность системы q: q = $P_0(t)$.

По истечении большого интервала времени (при t -> ∞) достигается стационарный режим:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$
.

Абсолютная пропускная способность (А) - среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени:

$$A = \lambda P_0$$

или

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda+\mu}$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния "канал занят":

$$P_{otk} = 1 - P_0$$

.

Данная величина может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных..

Задача 1. Пусть 1-канальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка - автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей = 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания - 1,8 часа. Поток автомобилей и поток обслуживания являются простейшими. Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

а) относительной пропускной способности q; б) абсолютной пропускной способности А; в) вероятности отказа P_{otk};

г) сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение. Зададим исходные данные:

> **t[sredn]:=1.8;lambda:=1;**

$$t_{sredn} := 1.8$$

$$\lambda := 1$$

1. Определим интенсивность потока обслуживания:

> **mu:=1/t[sredn];**

$$\mu := .5555555556$$

2. Вычислим относительную пропускную способность СМО:

> **q:=mu/(mu+lambda);**

$$q := .3571428571$$

Величина q означает, что в установившемся режиме СМО будет обслуживать примерно 35% прибывающих на пост ежедневного обслуживания автомобилей.

3. Найдем абсолютную пропускную способность СМО

> **A:=lambda*q;**

$$A := .3571428571$$

Это означает, что СМО способна осуществить в среднем 0,357 обслуживания автомобилей в час.

4. Вероятность отказа:

> **P[otk]:=1-q;**

$$P_{otk} := .6428571429$$

Это означает, что 64% прибывших на пост ежедневного обслуживания автомобилей получат отказ в обслуживании.

5. Определим номинальную пропускную способность системы:

> **Nom:=1/t[sredn];**

$$Nom := .5555555556$$

Вычислим отношение номинальной пропускной способности к фактической:

> **Nom/A;**

$$1.555555556$$

Оказывается, что номинальная пропускная способность в 1,5 раза больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

Проведем статистическое моделирование задачи, для чего составим процедуру моделирования случайного процесса поступления и обслуживания заявок:

```
> p:=proc(k) global post,otk,obsl:local k1,t_okon,t,rn_post:
post:=0:otk:=0:obsl:=0:k1:=0:t_okon:=0:rn_post:=rand(1..60): for t from 1 by 1 to k do
k1:=rn_post():
if (k1=1 and t_okon=0) then post:=post+1:t_okon:=stats[random, poisson[108]]
():obsl:=obsl+1 fi:
if (k1=1 and t_okon>0) then post:=post+1:t_okon:=t_okon-1:otk:=otk+1 fi:
if (k1>1 and t_okon>0) then t_okon:=t_okon-1 fi od end:
```

Переменные post (число поступивших заявок), otk (число отказов в обслуживании) и obsl (число обслуженных заявок) - глобальные. Функция k1= rn_post() случайным образом принимает значения от 1 до 60, и служит для моделирования процесса поступления заявок. Отсчет времени ведем в минутах и моделируем как цикл с параметром t . Т.к. в среднем поступает одна заявка в час, то событие k1 = 1 означает, что заявка поступила в СМО. Время обслуживания определяется переменной time_obsl, которая инициализируется как случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием 108 (108 мин = 1.8 часа). Время окончания обслуживания заявки хранится в переменной t_okon. Если t_okon=0, то канал обслуживания свободен, и заявка, поступившая в СМО, будет обслужена (obsl=obsl+1). Если t_okon>0, то поступившая заявка получает отказ, что фиксируется как otk=otk+1, а величина t_okon убывает с каждым циклом на одну минуту (t_okon=t_okon-1). Зададим продолжительность работы СМО в минутах, например, 480 минут (8 часов), и найдем ее параметры:

```
> p(480):
> print("Поступило автомобилей ",post);
                    "Поступило автомобилей ", 17
> print("Обслужено автомобилей ",obsl);
                    "Обслужено автомобилей ", 3
> print("Отказов в обслуживании ",otk);
                    "Отказов в обслуживании ", 14
> print("В среднем обслуживалось в час ",evalf(obsl/8), " автомобилей");
        "В среднем обслуживалось в час ", .3750000000, " автомобилей"
```

- Повторите опыт, например, 30 раз в цикле для той же самой продолжительности работы СМО в 480 часов. Найдите статистические оценки характеристик СМО.
- Сформулируйте закон больших чисел.
- Убедитесь, что с увеличением числа повторений статистические оценки стремятся к теоретическим значениям характеристик СМО.

Задача 2. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока вызовов составляет 0.95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора составляет одну минуту. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме. работы. Проведите статистическое испытание работы СМО и найдите статистические оценки характеристик СМО.

Одноканальная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием.

Пусть входящий поток заявок на обслуживание - простейший поток с интенсивностью

Интенсивность потока обслуживания равна Длительность обслуживания - случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Поток обслуживаний является простейшим пуассоновским потоком событий. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Предположим, что СМО не может вместить более N заявок, т.е. заявки, не попавшие в ожидание, покидают СМО. Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 - канал свободен;

S_1 - канал занят, очереди нет;

S_2 - канал занят, одна заявка в очереди;

....

S_n - канал занят, n-1 заявка в очереди;

....

S_N - канал занят, N-1 заявка в очереди.

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$-\rho P_0 + P_1 = 0$$, n=0,

....

-($$1 - \rho P_n + P_{n-1} + \rho P_{n-1} = 0$$, 0<n<N,

....

$$-P_N + \rho P_{N-1} = 0$$, n=N,

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$;

n - номер состояния.

Система уравнений имеет следующее решение:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{(N+1)}}$$,

$$P_n = P_0 \rho^n$$, если $\rho \neq 1$, n=1, 2, ..., N,

$$P_n = \frac{1}{N+1}$$ при $\rho = 1$.

Выполнение условия стационарности □ < 1 не обязательно, поскольку число допускаемых в СМО заявок контролируется путем введения ограничения на длину очереди. Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1):

1) вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{otk} = P_N$$;

2) относительная пропускная способность СМО:

$$q = 1 - P_{otk}$$;

3) абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = q\,\lambda$$;

4) среднее число находящихся в СМО заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n P_n$$

;

5) среднее время пребывания заявки в СМО:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda (1 - P_N)}$$

;

6) средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

;

7) среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda (1 - P_N) W_q$$

;

Задача 1. Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограниченно и равно 3. Если все стоянки заняты, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, распределен по закону Пуассона и имеет интенсивность □ = 0.85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем составляет 1.05 час. Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение:

1) Интенсивность прибытия автомобилей на обслуживание:

> **lambda:=0.85;**

$$\lambda := .85$$

2) Зададим среднее время обслуживания и выразим интенсивность потока обслуживания автомобилей:

> **t[sr]:=1.05:mu:=1/t[sr];**

$$\mu := .9523809524$$

3) Найдем приведенную интенсивность потока автомобилей как отношение интенсивностей □ и □, т.е..

> **rho:=lambda/mu;**

$$\rho := .8925000000$$

4) Вычислим финальные вероятности системы:

> **N:=4:P[0]:=(1-rho)/(1-rho^(N+1));P[1]:=rho*P[0];P[2]:=rho^2*P[0];P[3]:=rho^3*P[0];P[4]:=rho^4*P[0];**

$$P_0 := .2478631370$$

$$P_1 := .2212178498$$

$$P_2 := .1974369309$$

$$P_3 := .1762124608$$

$$P_4 := .1572696213$$

5) Вероятность отказа в обслуживании автомобиля::

> **P[otk]:=P[4];**

$$P_{otk} := .1572696213$$

Отсюда следует, что пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 15.8% случаев.

6) Относительная пропускная способность поста диагностики:

> **q:=1-P[otk];**

$$q := .8427303787$$

7) Абсолютная пропускная способность поста диагностики (автомобиля в час):

> **A:=lambda*q;**

$$A := .7163208219$$

8) Среднее число автомобилей в СМО:

> **L[s]:=rho*(1-(N+1)*rho^N+N*rho^(N+1))/((1-rho)*(1-rho^(N+1)));**

$$L_s := 1.773807579$$

9) Среднее время пребывания автомобиля в СМО:

> **W[s]:=L[s]/(lambda*(1-P[N]));**

$$W_s := 2.476275329$$

10) Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание:

> **W['q']:=W[s]-1/mu;**

$$W_q := 1.426275329$$

11) Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

> **L['q']:=lambda*(1-P[N])*W['q'];**

$$L_q := 1.021670716$$

Для статистического моделирования работы поста диагностики составим следующую процедуру:

```
> p:=proc(k) global t_och1,t_och2,t_och3,sm_t_obs,post,otk,obsl:local
t1,t_okon,t,rn_post,och,per:
t_och1:=0:t_och2:=0:t_och3:=0:post:=0:otk:=0:obsl:=0:t_okon:=0:sm_t_obs:=0:och:=0:rn_po
st:=rand(1..1200):
for t from 1 by 1 to k do
t1:=rn_post():
if och=1 then t_och1:=t_och1+1 fi:
if och=2 then t_och2:=t_och2+1 fi:
if och=3 then t_och3:=t_och3+1 fi:
if t1>=1 and t1<=17 and t_okon=0 and och>=0 and och<=3 then per:=1 fi:
if t1>=1 and t1<=17 and t_okon>0 and och>=0 and och<3 then per:=2 fi:
if t1>=1 and t1<=17 and t_okon>0 and och=3 then per:=3 fi:
if t1>17 and t_okon>0 then per:=4 fi:
if t1>17 and t_okon=0 and och>0 then per:=5 fi:
if per=1 then t_okon:=stats[random,poisson[65]]():
sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon:obsl:=obsl+1:post:=post+1 fi:
if per=2 then t_okon:=t_okon-1:obsl:=obsl+1:och:=och+1:post:=post+1 fi:
if per=3 then t_okon:=t_okon-1:otk:=otk+1:post:=post+1 fi:
if per=4 then t_okon:=t_okon-1 fi:
if per=5 then t_okon:=stats[random,poisson[65]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon:och:=och-1
fi od end:
```

Принятые обозначения: t_och1,t_och2,t_och3 - количество минут, когда в очереди 1, 2 и 3 машины соответственно; sm_t_obs - затрачено всего минут на обслуживание; post - прибыло машин на обслуживание; otk - количество отказов в обслуживании; obsl - обслужено машин; t_obsl - продолжительность обслуживания машины, инициализируется как случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием 65 минут (1 час 5 минут); t1 - случайная величина, с одинаковой вероятностью принимающая целые значения из интервала от 1 до 12000. Если t1>=0 и t1<=17, то считаем, что на пункт диагностики поступила заявка (интенсивность 0.85 заявки в час = 17/12000 заявки в минуту); t - параметр цикла (количество минут). Проведем опыт продолжительностью в 5000 минут:

```
> p(5000);print("Поступило на обслуживание автомобилей ",post);print("Обслужено ",obsl); print("Отказано в обслуживании ",otk); print("Затрачено на обслуживание ",sm_t_obs,"мин."); print(t_och1," мин. 1 машина в очереди");print(t_och2,"мин. 2 машины в очереди"); print(t_och3," мин. 3 машины в очереди");
```

```
"Поступило на обслуживание автомобилей ", 3
"Обслужено ", 3
"Отказано в обслуживании ", 0
"Затрачено на обслуживание ", 180.0, "мин."
89, " мин. 1 машина в  очереди"
13, " мин. 2 машины в  очереди"
0, " мин. 3 машины в  очереди"
```

Повторите опыт 50 раз в цикле, найдите оценки характеристик СМО, сравните их с теоретическими значениями.

Задача 2:

1) Модифицируйте процедуру для вычисления числовых характеристик СМО. Задайте продолжительность опыта в 1000 минут и повторите опыт, например, 5 раз. Затем вычислите средние значения каждой характеристики СМО. Сравните опытные данные с вероятностными характеристиками СМО.

2) Смоделируйте работу СМО для случая, когда автомобиль обслуживается ровно 1 час 5 минут, а все остальные параметры остаются прежними. Сравните полученные данные с результатами предыдущего пункта.

3) Так как интенсивность поступления заявок равна 0.85 машины в час, то в среднем промежуток времени между поступлениями заявок составляет 1/0.85=100/85 часа, или около 71 минуты. Задайте интервал между поступлениями заявок с помощью функции stats[random, poisson[71]]() и проведите ряд испытаний работы СМО. Сравните средние значения характеристик, полученных опытным путем, с вероятностными характеристиками.
4) Задайте интенсивность обслуживания в 70 минут, а число стоянок для машин равной 4, и проведите испытания работы поста диагностики. Повторите опыт для случая, когда интенсивность обслуживания составляет 60 минут, а число стоянок 2. Как изменятся характеристики поста диагностики?

5) Смоделируйте работу поста диагностики при условии, что число стоянок не ограниченно.

Многоканальная модель (с отказами) с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным распределением длительности обслуживания

Пусть СМО с отказами имеет n каналов обслуживания, функционирующих независимо друг от друга. Входной поток заявок и поток обслуживания заявок являются пуассоновскими. Интенсивность поступления заявок равна ,интенсивность обслуживания . Обозначим состояния СМО так:

S_0 - все каналы свободны;

S_1 - занят один канал, остальные свободны;

....

S_k - заняты ровно k каналов, остальные свободны;

....

S_n - все n каналов заняты, поступившая в СМО заявка получает отказ в обслуживании. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы P_0, P_1,..., P_n будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$,

....

$$\frac{\partial}{\partial t} P_k = \lambda P_{k-1} - (\lambda + \mu) P_k + \mu (k+1) P_{k+1}$$, 1<=k<=n-1,

....

$$\frac{\partial}{\partial t} P_n = \lambda P_{n-1} - \mu n P_n$$

Начальные условия решения СМО таковы: $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$,..., $P_n(0) = 0$.

Стационарное решение СМО имеет вид (формулы Эрланга):

$$P_k = \frac{\rho^k P_0}{k!}$$, k=1, 2,..., n,

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}$$,

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Вероятностные характеристики многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме таковы:

1) вероятность отказа

$$P_{otk} = P_n$$;

2) вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию (относительная пропускная способность)

$$q = 1 - P_{otk}$$;

3) абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda q$$;

4) среднее число каналов, занятых обслуживанием

$$k_{sr} = \rho (1 - P_{otk})$$.

Задача. Пусть n- канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность□□ = 1 задачу в час. Средняя продолжительность обслуживания 1/□ = 1.8. Поток заявок на решение задач и поток обслуживания этих заявок являются простейшими. Вычислите финальные значения:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.
- Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Оценим качество функционирования ВЦ методом статистических испытаний. Для этого нам потребуется процедура статистического моделирования работы ВЦ:

```
> p:=proc(k) global sm_t_obs,post,otk,obsl:local t1,t_okon1,t_okon2,t_okon3,t,rn_post,per:
post:=0:otk:=0:obsl:=0:t_okon1:=0:t_okon2:=0:t_okon3:=0:sm_t_obs:=0:per:=0:rn_post:=rand(1..60):
for t from 1 by 1 to k do t1:=rn_post():
if t_okon1=0 and t_okon2=0 and t_okon3=0 then per:=1 fi:
if t_okon1=0 and t_okon2=0 and t_okon3>0 then per:=2 fi:
if t_okon1=0 and t_okon2>0 and t_okon3=0 then per:=3 fi:
if t_okon1>0 and t_okon2=0 and t_okon3=0 then per:=4 fi:
if t_okon1=0 and t_okon2>0 and t_okon3>0 then per:=5 fi:
if t_okon1>0 and t_okon2>0 and t_okon3=0 then per:=6 fi:
if t_okon1>0 and t_okon2=0 and t_okon3>0 then per:=7 fi:
if t_okon1>0 and t_okon2>0 and t_okon3>0 then per:=8 fi:
if t1=1 then post:=post+1:
if per=1 then t_okon1:=stats[random,poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon1:obsl:=obsl+1 fi:
if per=2 then t_okon1:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon1:obsl:=obsl+1:t_okon3:=t_okon3-1 fi:
if per=3 then t_okon1:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon1:obsl:=obsl+1:t_okon2:=t_okon2-1 fi:
if per=4 then t_okon2:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon2:obsl:=obsl+1:t_okon1:=t_okon1-1 fi:
if per=5 then t_okon1:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon1:obsl:=obsl+1:t_okon2:=t_okon2-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi:
if per=6 then t_okon3:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon3:obsl:=obsl+1:t_okon1:=t_okon1-1:t_okon2:=t_okon2-1 fi:
if per=7 then t_okon2:=stats[random, poisson[108]](): sm_t_obs:=sm_t_obs+t_okon2:obsl:=obsl+1:t_okon1:=t_okon1-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi:
if per=8 then otk:=otk+1:t_okon1:=t_okon1-1:t_okon2:=t_okon2-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi
else
if per=2 then t_okon3:=t_okon3-1 fi:
if per=3 then t_okon2:=t_okon2-1 fi:
if per=4 then t_okon1:=t_okon1-1 fi:
if per=5 then t_okon2:=t_okon2-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi:
if per=6 then t_okon1:=t_okon1-1:t_okon2:=t_okon2-1 fi:
if per=7 then t_okon1:=t_okon1-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi:
```

```
if per=8 then t_okon1:=t_okon1-1:t_okon2:=t_okon2-1:t_okon3:=t_okon3-1 fi
fi:od end:
```

Испытаем работу СМО в течение 500 минут:

```
> p(500):print("Поступило задач",post,". Из них решено ",obsl,". Отказов решить ",otk,". Затрачено минут на решение задач ",sm_t_obs);
"Поступило задач", 11, ". Из них решено ", 8, ". Отказов решить ", 3, ". Затрачено минут на решение задач ",
855.0
```

1) Задайте длительность испытания в 6000 минут и найдите оценки следующих характеристик СМО:

- вероятности состояний ВЦ;
- вероятности отказа в обслуживании заявки;
- относительной пропускной способности ВЦ;
- абсолютной пропускной способности ВЦ;
- среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

2) В процедуре моделирования работы СМО замените генератор псевдослучайных чисел stats[random, poisson[108]]() следующим генератором: $t = -\frac{1 \ln(p)}{\lambda}$ где p - случайная величина, равномерно распределенная на интервале от 0 до 1, λ = 108 интенсивность поступления задач. Повторите опыт с модифицированной процедурой и сравните полученные результаты с результатами предыдущего опыта. Дайте обоснование применения формулы $t = -\frac{1 \ln(p)}{\lambda}$ для генерирования нужных псевдослучайных чисел.

3) Разработайте процедуру моделирования работы ВЦ для случая, когда интенсивности каналов обслуживания различные.