Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Информатика және ақпараттық жүйелер кафедрасы

050604 – Физика мамандықтарының студенттеріне арналған
есептеу әдістері пәні бойынша зертханалық жұмыстарды орындауға арналған

ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Павлодар

Әдістемелік нұсқауларды бекіту беті

Ф СО ПГУ 7.18.2/075

БЕКІТЕМІН
ФМжАТФ деканы
______С.К.Тлеукенов
“ “ 2007ж

Құрастырушылар: аға оқытушы Г.С. Джарасова, оқытушы Н.К.Токжигитова

Информатика және ақпараттық жүйелер кафедрасы

050604 – Физика мамандығының студенттері үшін

Есептеу әдістері пәні бойынша зертханалық жұмыстарды орындауға арналған

Әдістемелік нұсқаулар

Кафедра отырысында ұсынылған «__»___________2009 ж. №_____ хаттама

Кафедра меңгерушісі _________________________Ж.К.Нұрбекова

ФМжАТ факультеттің әдістемелік кеңесінде құпталған
«___»___________200__ж. №______ хаттама

ӘК төрайымы _______________________________ А.Т. Кишубаева

Зертханалық жұмыс№1.

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық емес теңдеулерді шешудің, түбірлерді жекелеудің сандық әдістерін үйрету және жартылай бөлудің әдісі бойынша шешуді анықтау.

Тапсырма:

1) түбірлерді аналитикалық жекелеу;
2) түбірлерді аналитикалық жекелеу және олардың біреуін 0,01-ге дейінгі дәлдігі бар жартылай бөлу әдісімен анықтау;
3) түбірлерді графикалық жекелеу;
4) түбірлерді графикалық жекелеу және олардың біреуін 0,01-ге дейінгі дәлдігі бар жартылай бөлу әдісімен анықтау.

№ 1.

1) $\square^{x} + \square x - \square = \square;$

2) $3x^{4} + 4x^{3} - \square\square x^{\square} - \square = \square;$

3) $0{,}5^{x} + 1 = (x - 2)^{2};$

4) $(x - 3)\cos x = 1, -2\pi \le x \le 2\pi.$

№ 3.

1) $\square^{x} + 3x = \square;$

2) $x^{4} - x - 1 = \square;$

3) $x^{2} - 2 + 0{,}5^{x} = 0;$

4) $(x - 1)^{2} \cdot \lg(x + 11) = 1.$

№ 5.

1) $3^{x-1} - 2 - x = \square;$

2) $3x^{4} + 8x^{3} + 6x^{2} - 10 = 0;$

3) $(x - 4)^{2} \cdot \log_{0,5}(x - 3) = -1;$

4) $5\sin x = x.$

№ 7.

1) $e^{-2x} - 2x + 1 = \square;$

2) $x^{4} + 4x^{3} - 8x^{2} - 17 = \square;$

3) $0{,}5^{x} - 1 = (x + 2)^{2};$

4) $x^{2}\cos 2x = -1.$

№ 9.

1) $\operatorname{arctg}(x - 1) + 2x = \square;$

2) $3x^{4} + 4x^{3} - 12x^{2} + 1 = 0;$

3) $(x - 2)^{2}\, 2^{x} = 1;$

4) $x^{2} - 20\sin x = 0.$

№ 11.

1) $3^{x} + 2x - 2 = \square;$

2) $2x^{4} - 8x^{3} + 8x^{2} - 1 = 0;$

3) $\left[(x - 2)^{2} - 1\right] 2^{x} = 1;$

4) $(x - 2)\cos x = 1, \quad -2\pi \le x \le 2\pi$

№ 13.

1) $x^{4} + 2x - 5 = \square;$

2) $x^{4} - 4x^{3} - 8x^{2} + 1 = \square;$

3) $x^{2} - 3 + 0{,}5^{x} = 0;$

4) $(x - 2)^{2} \cdot \lg(x + 11) = 1.$

№ 2.

1) $\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3x^{3}} = \square;$

2) $2x^{3} - 9x^{2} - 60x + 1 = 0;$

3) $\left[\log(-x)\right] \cdot (x + 2) = -1;$

4) $\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) - 0{,}5x = 0.$

№ 4.

1) $2e^{x} = 5x + 2;$

2) $2x^{4} - x^{2} - 10 = 0;$

3) $x \cdot \log_{3}(x + 1) = 1;$

4) $\cos(x + 0{,}5) = x^{3}.$

№ 6.

1) $2\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2x^{3}} = \square;$

2) $x^{4} - 18x^{2} + 6 = 0;$

3) $x^{2} \cdot 2^{x} = 1;$

4) $\operatorname{tg} x = x + 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2.$

№ 8.

1) $\square^{x} - 6x - 3 = \square;$

2) $x^{4} - x^{3} - 2x^{2} + 3x - 3 = \square;$

3) $2x^{2} - 0{,}5^{x} - 3 = 0;$

4) $x\lg(x + 1) = 1.$

№ 10.

1) $2\operatorname{arcctg} x - x + 3 = \square;$

2) $3x^{4} - 8x^{3} - 18x^{2} + 2 = \square;$

3) $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}5x^{2} - 1;$

4) $2\lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0.$

№ 12.

1) $2\operatorname{arctg} x - 3x + 2 = \square;$

2) $2x^{4} + 8x^{3} + 8x^{2} - 1 = 0;$

3) $\left[\log_{2}(x + 2)\right](x - 1) = 1;$

4) $\sin(x - 0{,}5) - x + 0{,}8 = 0.$

№ 14.

1) $2e^{x} + 3x + 1 = \square;$

2) $3x^{4} + 4x^{3} - 12x - 5 = 0;$

3) $x\log_{3}(x + 1) = 2;$

4) $\cos(x + 0{,}3) = x^{2}.$

№ 15.

1) $3^{x-1} - 4 - x = \square;$

2) $2x^{3} - 9x^{2} - 60x + 1 = 0;$

3) $(x - 3)^{2}\log_{0,5}(x - 2) = -1;$

4) $5\sin x = x - 1.$

№ 17.

1) $\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{3x^3} = 0$;
2) $x^4 - x - 1 = 0$;
3) $(x-1)^2 2^x = 1$;
4) $\operatorname{tg}^3 x = x - 1, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$.

№ 19.

1) $3^x - 2x + 5 = 0$;
2) $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$;
3) $2x^2 - 0{,}5^x - 2 = 0$;
4) $x \lg(x+1) = 1$.

№16

1) $e^x + x + 1 = 0$;
2) $2x^4 - x^2 - 10 = 0$;
3) $0{,}5^x - 3 = (x+2)^2$;
4) $x^2 \cos 2x = -1, \quad -2\pi \le x \le 2\pi$.

№ 18.

1) $\operatorname{arctg}(x-1) + 3x - 2 = 0$;
2) $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$;
3) $(x-2)^2 2^x = 1$;
4) $x^2 - 20 \sin x = 0$.

№ 20.

1) $2\operatorname{arctg} x - x + 3 = 0$;
2) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$;
3) $2 \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = x^2 - 0{,}5$;
4) $2 \lg x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$.

Тапсырманы орындау үлгісі

1.4.1 $5^x - 6x - 3 = 0;$

1.4.2 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0;$

1.4.3 $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + x^2 = 3x - 2;$

1.4.4 $x^2 \log_{0,5}(x+1) = 1.$

1.4.1 бөлімшені шешкенде $f(x) = 5^x - 6x - 3$ деп белгілейміз. $f'(x) = 5^x \ln 5 - 6$ туындысын табамыз. Туындының түбірін есептейміз.

$$5^x \lg 5 - 6 = 0; \quad 5^x = \frac{6}{\lg 5}; \quad x \lg 5 = \lg 6 - \lg(\ln 5);$$

$$x = \frac{\lg 6 - \lg(\ln 5)}{\lg 5} = \frac{0,7782 - 0,2065}{0,6990} = \frac{0,5717}{0,6990} \approx 0,82.$$

f(x) функциясының таңбалы кестесін (кесте 1.4.1) құрамыз, x-ті тең деп алсақ:

а) функцияның күдікті мәніне (туындының түбіріне) немесе соған жақын;

ә) шекті мәніне (белгісіз мәндерді жіберген облыстардың нәтижесіне).

1.1 кестесі

x	$-\infty$	1	$+\infty$
sign f(x)	+	-	+

Функция таңбасының екі айнымалысының болуына байланысты, теңдеу екі нақты түбірге ие. Түбірді жекелеп алуды аяқтау үшін түбірі бар аралықты азайту қажет. Оның ұзындығы 1-ден көп болмауы керек. Ол үшін f(x)функция таңбаларының 1.4.2 жаңа кестесін құрамыз.

1.2 кестесі

x	-1	0	1	2
sign f(x)	+	-	-	+

Мұннан түбірлердің келесі аралықта тұйықталғанын көреміз.

$$x_1 \in [-1,0]; \; x_2 \in [1,2].$$

1.4.2 бөлемшесін шешу кезінде $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ алсақ,

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3$ ие.

Туындының түбірін табамыз:

$4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0;\ 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0;\ (x^2 - 1)(4x - 3) = 0;\ x_1 = -1;$
$x_2 = 1;\ x_3 = 3/4.$

f(x)функциясының таңбаларынан 1.3 кестесін құрамыз:

1.3 кестесі

x	$-\infty$	1	3/4	1	$+\infty$
sign f(x)	+	-	-	-	+

Кестеден теңдеудің 2 нақты түбірлері бар екенін көреміз. $x_1 \in \left|-\infty,-1\right|;\ x_{2\in}\left|1,+\infty\right|.$

Түбірі бар аралықты азайтамыз:

1.4 кестесі

X	-2	-1	1	2
sign f(x)	+	-	-	+

Демек, $x_1 \in \left|-2,-1\right|;\ x_2 \in \left|1,2\right|.$.

Түбірлердің біреуін жүздікке дейінгі бөлікті байқау әдісімен анықтаймыз. Мысалы, $x_1 \in \left|-2,-1\right|$. 1.5 келесі кестесін пайдалана отырып барлық есептеуді жүргізу қолайлы.

1.5 кестесі

N	a_n^+	b_n^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	x_n^4	$-x_n^3$	$-2x_n^2$	$3x_n$	$f(x_n)$
0 1 2 3 4 5 6 7	-2 -2 - 1,75 - 1,75 - 1,75 - 1,75 -	-1 -1,5 -1,5 - 1,63 - 1,69 - 1,72 - 1,73	-1,5 -1,75 -1,63 -1,69 -1,72 -1,73 -1,74	5,06 25 9,37 89 7,05 91 8,15 73 8,75 21 8,95	3,37 5 5,35 94 4,33 07 4,82 68 5,08 84 5,17	-4,5 -6,125 - 5,313 8 - 5,712 2 - 5,916 8	-4,5 -5,25 -4,89 -5,07 -5,16 -5,19 -5,22	- 3,562 5 0,363 3 - 1,814 0 - 0,798 1

	1,75 - 1,74	- 1,73		75 9,16 64	77 5,26 80	- 5,985 8 - 6,055 2		- 0,236 3 - 0,040 6 0,159 2

Жауабы: $x_1 \approx -1{,}73$.

1.4.3 бөлімшесін шешуде теңдеуді $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -x^2+3x-2.$ түрінде жазамыз. $y_1 = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right),\ y_2 = -x^2+3x-2$ белгілеу мен осы функциялардың графикасын құрудан біз теңдеудің екі түбірі $x_1 \approx 1{,}1$; $x_2 \approx 2{,}9$ бар екенін көреміз.

1.4.4 бөлімшесін шешуде теңдеуді $\log_{0.5}(x+1) = 1/x^2$ түрінде жазамыз. $y_1 = \log_{0.5}(x+1),\ y_2 = 1/x^2$ белгілеумен осы функцияның графикасын құрудан біз теңдеудің 1 түбірге ие екенін көреміз:

$x_1 \approx -0{,}8$. Осы түбірді анықтау үшін байқау әдісімен соңында $f(x) = x^2 \log_{0.5}(x+1) - 1$ функциясы әр түрлі таңбаға ие болатындай аралықты таңдаймыз. 1.6 кестесін құрамыз.

1.6 кестесі

x	-0,5	-0,8
sign f(x)	-	+

Есептеуге қолайлы болу үшін ондық логарифлеге көшеміз.

$$f(x) = x^2 \frac{\lg(x+1)}{-0{,}301} - 1.$$

Келесі есептеуді 1.7 кестесінде жүргіземіз.

1.7 кестесі

n	a_n^+	b_n^-	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	X_n^2	$\lg(x_n+1)$	$f(x_n)$
0 1 2 3 4 5	-0,8 -0,8 -0,73 -0,73 -0,73 -0,73	-0,5 -0,65 -0,65 -0,69 -0,71 -0,72	-0,65 -0,73 -0,69 -0,71 -0,72	0,422 5 0,532 9 0,476 1	- 0,4559 - 0,5686 - 0,5086	-0,360 0,006 7 -0,196 -0,099 -0,048

				0,504 1 0,518 4	- 0,5376 - 0,5528	

Жауабы: x≈-0,73.

Бақылау сұрақтары

1.Сызықтық емес теңдеуге мысал келсіріңіз.
2.Теңдеуді шешу дегеніміз не?
3.Түбірлерді жекелеп алудың әдістерін атаңыз. Жартылай бөлу әдісінің мәні неде?

Зертханалық жұмыс № 2.

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық емес теңдеулерді шешуде түбірлерді жекелеуде сандық әдісті үйрету және жанама әдіспен шешуде анықтау

Тапсырма

1) теңдеудің түбірлерін графикалық жекелеу және олардың біреуін 0,01-ге дейінгі дәлдігі бар жанама әдісімен анықтау.

2) теңдеудің түбірлерін аналитикалық жекелеу және олардың іреуін 0,001-ге дейінгі дәлдігі бар жанама әдісімен анықтау.

№ 1. 1) $x - \sin x = 0,25;$
№ 2. 1) $tg(0,58x + 0,1) = x^2;$
№ 3. 1) $\sqrt{x} - \cos(0,387x) = 0;$
№ 4. 1) $tg(0,4x + 0,4) = x^2;$
№ 5. 1) $\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0;$
№ 6. 1) $tg(0,5x + 0,2) = x^2;$
№ 7. 1) $3x - \cos x - 1 = 0;$
№ 8. 1) $x + \lg x = 0,5;$
№ 9. 1) $tg(0,5x + 0,1) = x^2;$
№ 10. 1) $x^2 + 4\sin x = 0;$
№ 11. 1) $ctg 1,05x - x^2 = 0;$
№ 12. 1) $tg(0,4x + 0,3) = x^2;$
№ 13. 1) $x\lg x - 1,2 = 0;$
№ 14. 1) $1,8x^2 - \sin 10x = 0;$
№ 15. 1) $ctg\ x - \frac{x}{4} = 0;$
№ 16. 1) $tg(0,3x + 0,4) = x^2;$
№ 17. 1) $x^2 - 20\sin x = 0;$
№ 18. 1) $ctg\ x - \frac{x}{3} = 0;$
№ 19. 1) $tg(0,47x + 0,2) = x^2;$
№ 20. 1) $x^2 + 4\sin x = 0;$

2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0.$
2) $x^3 - 6x - 8 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0.$

2) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0.$

2) $x^3 + x - 5 = 0.$

2) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0.$

2) $x^3 + 3x + 1 = 0.$

2) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0.$

2) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0.$

2) $x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0.$

2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0.$

2) $x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0.$

2) $x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$

2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$

2) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1{,}2 = 0.$

2) $x^3 - 2x + 4 = 0.$

Тапсырмаларды орындау үлгісі

1) $tg(0{,}55x + 0{,}1) = x^2$;   2) $x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 1{,}5 = 0.$

Жоғарыда біз осы теңдеудің түбірлерінің біреуін жекеледік және ол [0,6;0,8] аралықта екенін анықтадық. Бұл түбірді жанама әдіспен анықтаймыз. f(0,6)>0; f(0,8)<0 және f”(x)<0 болса, онда бастапқы жуықтауды x_0=0,8 деп аламыз.

Есептеуді келесі формула бойынша жүргіземіз.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Алдын-ала $f'(0{,}8) = \frac{0{,}55}{\cos^2(0{,}44 + 0{,}1)} - 2 \cdot 0{,}8 = \frac{0{,}55}{0{,}85772} - 1{,}6 = \frac{0{,}55}{0{,}7356} - 1{,}6 = = 0{,}7477 - 1{,}6 = -0{,}8523.$

табамыз. 2.1 кестесін құрамыз.

2.1 кестесі

n	x_n	x_n^2	$0{,}55x_n+0{,}1$	$tg(0{,}55x_n+0{,}1)$	$f(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{-0{,}8523}$
0	0,8	0,64	0,54	0,5994	-0,0406	0,0476
1	0,7524	0,5661	0,5138	0,5643	-0,0018	0,0021
2	0,7503	0,5630	0,5127	0,5630	-0,0000	0

жауабы: x≈0,750

2) Жоғарында біз теңдеудің [-1;0] аралығына жататын нақты түбірге ие екенін орындадық. Бұл түбірді жанама

әдісімен анықтаймыз. f(-1)<0 , f(0)>0 және $f^1(x)<0$ болса, онда бастапқы жуықтауды x_0=-1 деп аламыз.

Есептеуде келесі формуласын қолданамыз

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5;\quad f'(x) = 3x^2 - 0,4x + 0,5$ табамыз. Есептеуде 2.2 кестесін қолданамыз.

2.2 кестесі

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$f(x_n)$	$f'(x_n)$ $h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	
0	-1	1	-1	-0,2	3,9	-0,051
1	-0,949	0,9006	-1,8547	-0,0093	3,5814	-0,0026
2	-0,9464	0,8957	-0,8477	-0,0004	3,5657	-0,00001

Жауабы: x≈0,946

Бақылау сұрақтары

1.Сызықтық емес теңдеуге мысал келтір.
2.Теңдеуді шешу дегеніміз не?
3.Түбірлерді жекелеудің әдістерін ата.
4.Жанама әдісі бойынша жинақтылық шорттары.
5.Ньютон әдісінің итерациондық формуласын келтіріңіз.

Зертханалық жұмыс № 3.

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық емес теңдеулерді шешудің, түбірлерді жекелеудің сандық әдісіне үйрету

Тапсырма

1) теңдеудің түбірлерін графикалық жекелеу және оның біреуін 0,001 дейінгі дәлдікпен итерация әдісімен анықтау.

2) теңдеудің түбірлерін аналитикалық жекелеу және оның біреуін 0,001 –ге дейінгі дәлдігі бар итерация әдісімен анықтау;

№ 1. $1)\ \ln x + (x+1)^3 = 0;$

№ 2. $1)\ x \cdot 2^x = 1;$

№ 3. $1)\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{x};$

№ 4. $1)\ x - \cos x = 0;$

№ 5. $1)\ 3x + \cos x + 1 = 0;$

№ 6. $1)\ x + \ln x = 0,5;$

№ 7. $1)\ 2 - x = \ln x;$

$2)\ x^3 + 2x^2 + 2 = 0.$

$2)\ x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0.$

$2)\ x^3 - 2x + 2 = 0.$

$2)\ x^3 + 3x - 1 = 0.$

$2)\ x^3 + x - 3 = 0.$

$2)\ x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}6x - 1{,}6 = 0.$

$2)\ x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}4x - 1{,}4 = 0.$

№ 8. $1)\ x^2 = \sin x;$

№ 9. $1)\ (2 - x)e^x = 0{,}5;$

№ 10. $1)\ 2{,}2x - 2^x = 0;$

№ 11. $1)\ x^2 + 4\sin x = 0;$

№ 12. $1)\ 2x - \lg x = 7;$

№ 13. $1)\ 5x - 8\ln x = 8;$

№ 14. $1)\ 3x - e^x = 0;$

№ 15. $1)\ x(x+1)^2 = 1;$

№ 16. $1)\ x = (x+1)^3;$

№ 17. $1)\ x^2 = \sin x;$

№ 18. $1)\ x^3 = \sin x;$

№ 19. $1)\ x = \sqrt{\lg(x+2)};$

№ 20. $1)\ x = (x+1)^3;$

$2)\ x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0.$

$2)\ x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1 = 0.$

$2)\ x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1{,}2 = 0.$

$2)\ x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0.$

$2)\ x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}4 = 0.$

$2)\ x^3 + 2x + 4 = 0.$

$2)\ x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$

$2)\ x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0.$

$2)\ x^3 + 4x - 6 = 0.$

$2)\ x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0.$

$2)\ x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0.$

$2)\ x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0.$

$2)\ x^3 + 2x + 4 = 0.$

Тапсырманы орындау үлгісі

3.3.1 $\quad 2x + \lg(2x+3) = 1;$

3.3.2 $\quad x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0.$

Түбірлердің жуық мәнін графикалық түрде табамыз; ол үшін теңдеуді $\lg(2x+3) = 1 - 2x$ деп алған қолайлы. График құрудан біз теңдеудің [0;0,5] аралықта жатқан бір ғана түбірі бар екенін көреміз. Оны анықтау үшін итерация әдісімен теңдеуді $x = \varphi(x)$ түріне келтіреміз. $\varphi(x)$ функциясын $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{k}$ арақатысынан іздейміз. Q=max|f'(x)|-те |k|≥Q/2 деп аламыз; k саны [0;0,5] аралықтағы f'(x) сияқты мәнге ие.

f(x)=2x+lg(2x+3)-1;

$f'(x) = 2 + \dfrac{0{,}8686}{2x+3}$ табамыз.

$Q = \max\limits_{[0;0{,}5]} f'(x) = 2 + \dfrac{0{,}8686}{2\cdot 0 + 3} \approx 2{,}2895;$ 0≤x≤0,5 болғанда, f'(x)>0.

k=2 деп алсақ, онда $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{2} = x - x - \dfrac{\lg(2x+3)}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg(2x+3).$

Бастапқы жуықтауды $x_0=0$ деп аламыз, қалған барлық жуықтауды $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lg(2x_n + 3)$ теңдігінде анықтаймыз.

Есептеуді 3.1. кестесіне орналастыру ыңғайлы.

3.1 кестесі

N	x_n	$2x_n+3$	$\lg(2x_n+3)$	$\frac{1}{2}\lg(2x_n+3)$
0 1 2 3 4 5	0 0,2614 0,2266 0,2309 0,2303 0,2304	3 3,5228 3,4532 3,4618 3,4606	0,4771 0,5469 0,5382 0,5394 0,5392	0,2386 0,2734 0,2691 0,2697 0,2696

жауабы: x≈0,230

2. Түбірді аналитикалық түрде жекелейміз.

$f(x)=x^3-2x^2+7x+3;\quad f'(x)=3x^2-4x+7;\quad D=4-21\cdot 4<0$ табамыз. 3.2 кестесін құрамыз

3.2 кестесі

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
sign f(x)	-	-	+	+

Теңдеу [-1,0] аралыгында жатқан нақты түбірге ие. $-1\le x\le 0$-де $|\varphi'(x)|<1$ болғандай, теңдеуді $x=\varphi(x)$ түріне келтіреміз. $Q=\max\limits_{[-1,0]}|f'(x)|=f'(-1)=3+4+7=14$ болғанда, k=10 деп алуға болады.

Онда

$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{k}=x-0{,}1x^3+0{,}2x^2-0{,}7x-0{,}3=-0{,}1x^3+0{,}2x^2+0{,}3x-0{,}3.$ $x_0=0$ болсын, онда $x_{n+1}=\varphi(x_n)$. Есептеуде 3.3 кестесін орналастырамыз.

3.3 кестесі

n	x_n	x_n^2	x_n^3 $\varphi(x_n)$	
0 1 2 3 4 5	0 -0,3 -0,3693 -0,3785 -0,3795 -0,3796	0 0,09 0,1364 0,1433 0,1440	0 -0,027 -0,0504 -0,0542 -0,0546	-0,3 -0,3693 -0,3785 -0,3795 -0,3796

Жауабы: x≈-0,380

Бақылау сұрақтары

1. Сызықтық емес теңдеулерге мысал келтіріңіз.
2. Теңдеуді шешу дегеніміз не ?
3. Түбірлерді жекелеудің әдістерін атаныз.
4. Итерация әдісі бойынша жинақтылықтың шарты.
5. Итерациондық формуланы келтір.

Зертханалық жұмыс № 4

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық теңдеулер жуйесі шешуде сандық әдісті үйрету

Тапсырма: Гаусс әдісін қолдына отырып, 0,001-ге дейін дәлдігі бар теңдеулер жүйесін шешу. Программа құру

№ 1.

$$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7, \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5, \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6, \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$$

№ 5.

$$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4, \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7, \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$$

№ 7.

$$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4, \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4, \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10, \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20, \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$$

№ 9.

№ 11.

$$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01, \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10, \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6. \end{cases}$$

№ 13.

$$\begin{cases} 35{,}1x_1 + 1{,}7x_2 + 37{,}5x_3 - 2{,}8x_4 = 7{,}5, \\ 45{,}2x_1 + 21{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 11{,}1, \\ -21{,}1x_1 + 31{,}7x_2 + 1{,}2x_3 - 1{,}5x_4 = 2{,}1, \\ 31{,}7x_1 + 18{,}1x_2 - 31{,}7x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}5. \end{cases}$$

№ 15.

$$\begin{cases} 7{,}5x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}1x_3 - 7{,}7x_4 = 1{,}1, \\ 45{,}2x_1 + 21{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 11{,}1, \\ -21{,}1x_1 + 31{,}7x_2 + 1{,}2x_3 - 1{,}5x_4 = 2{,}1, \\ 31{,}7x_1 + 18{,}1x_2 - 31{,}7x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}5. \end{cases}$$

№ 17.

$$\begin{cases} 7{,}3x_1 - 8{,}1x_2 + 12{,}7x_3 - 6{,}7x_4 = 8{,}8, \\ 11{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 9{,}2x_4 = 21{,}5, \\ 8{,}2x_1 - 5{,}4x_2 + 4{,}3x_3 - 2{,}5x_4 = 6{,}2, \\ 2{,}4x_1 + 11{,}5x_2 - 3{,}3x_3 + 14{,}2x_4 = -6{,}2. \end{cases}$$

№ 19.

$$\begin{cases} 6{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 42x_4 = 2{,}23, \\ 5{,}8x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 6{,}2x_4 = 17{,}1, \\ 8{,}6x_1 + 7{,}7x_2 - 18{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = -5{,}4, \\ 13{,}2x_1 - 5{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 12{,}2x_4 = 6{,}5. \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4, \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5, \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3, \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8, \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7, \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7, \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} 4,3x_1 - 12,1x_2 + 23,2x_3 - 14,1x_4 = 15,5, \\ 2,4x_1 - 4,4x_2 + 3,5x_3 + 5,5x_4 = 2,5, \\ 5,4x_1 + 8,3x_2 - 7,4x_3 - 12,7x_4 = 8,6, \\ 6,3x_1 - 7,6x_2 + 1,34x_3 + 3,7x_4 = 12,1. \end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 10x_2 - 1,3x_3 + 2,1x_4 = 3,1, \\ 3,1x_1 + 1,7x_2 - 2,1x_3 + 5,4x_4 = 2,1, \\ 3,3x_1 - 7,7x_2 + 4,4x_3 - 5,1x_4 = 1,9, \\ 10x_1 - 20,1x_2 + 20,4x_3 + 1,7x_4 = 1,8. \end{cases}$$

№ 10.

$$\begin{cases} 6,1x_1 + 6,2x_2 - 6,3x_3 + 6,4x_4 = 6,5, \\ 1,1x_1 - 1,5x_2 + 2,2x_3 - 3,8x_4 = 4,2, \\ 5,1x_1 - 5,0x_2 + 4,9x_3 - 4,8x_4 = 4,7, \\ 1,8x_1 + 1,9x_2 + 2,0x - 2,1x_4 = 2,2. \end{cases}$$

№ 12.

$$\begin{cases} 35,8x_1 + 2,1x_2 - 34,5x_3 - 11,8x_4 = 0,5, \\ 27,1x_1 - 7,5x_2 + 11,7x_3 - 23,5x_4 = 12,8, \\ 11,7x_1 + 1,8x_2 - 6,5x_3 + 7,1x_4 = 1,7, \\ 6,3x_1 + 10x_2 + 7,1x_3 + 3,4x_4 = 20,8. \end{cases}$$

№ 14.

$$\begin{cases} 1,1x_1 + 11,2x_2 + 11,1x_3 - 13,1x_4 = 1,3, \\ -3,3x_1 + 1,1x_2 + 30,1x_3 - 20,1x_4 = 1,1, \\ 7,5x_1 + 1,3x_2 + 1,1x_3 + 10x_4 = 20, \\ 1,7x_1 + 7,5x_2 - 1,8x_3 + 2,1x_4 = 1,1. \end{cases}$$

№ 16.

$$\begin{cases} 30,1x_1 - 1,4x_2 + 10x_3 - 1,5x_4 = 10, \\ -17,5x_1 + 11,1x_2 + 1,3x_3 - 7,5x_4 = 1,3, \\ 1,7x_1 - 21,1x_2 + 7,1x_3 - 17,1x_4 = 10, \\ 2,1x_1 + 2,1x_2 + 3,5x_3 + 3,3x_4 = 1,7. \end{cases}$$

№ 18.

$$\begin{cases} 4,8x_1 + 12,5x_2 - 6,3x_3 - 9,7x_4 = 3,5, \\ 22x_1 - 31,7x_2 + 12,4x_3 - 8,7x_4 = 4,6, \\ 15x_1 + 21,1x_2 - 4,5x_3 + 14,4x_4 = 15, \\ 8,6x_1 - 14,4x_2 + 6,2x_3 + 2,8x_4 = -1,2. \end{cases}$$

№ 20.

$$\begin{cases} 14,2x_1 + 3,2x_2 - 4,2x_3 + 8,5x_4 = 13,2, \\ 6,3x_1 - 4,3x_2 + 12,7x_3 - 5,8x_4 = -4,4, \\ 8,4x_1 - 22,3x_2 - 5,2x_3 + 4,7x_4 = 6,4, \\ 2,7x_1 + 13,7x_2 + 6,4x_3 - 12,7x_4 = 8,5. \end{cases}$$

Тапсырманы орындау үлгісі

$$\begin{cases} 0,68x1 + 0,05x2 - 0,11x3 + 0,08x4 = 2,15, \\ 0,21x1 - 0,13x2 + 0,27x3 - 0,8x4 = 0,44, \\ -0,11x_1 - 0,84x_2 + 0,28x_3 + 0,06x_4 = -0,83, \\ -0,08x_1 + 0,15x_2 - 0,5x_3 - 0,12x_4 = 1,16. \end{cases}$$

Бір ғана сұлбасымен есептеуді жүргіземіз

Белгісіздегі коэффициент				Бос мүшелер	Бақылау қосындылары	Жолдық қосындылар
x_1	x_2	x_3	x_4			
0,68 0,21 -0,11 -0,08	0,05 -0,13 -0,84 0,15	-0,11 0,27 0,28 -0,5	0,08 -0,8 0,06 -0,12	2,15 0,44 -0,83 1,16	2,85 -0,01 -1,44 0,61	2,85 -0,01 -1,44 0,61
1	0,0735	-0,1618	0,1176 3,1618	4,1912	4,1912	
	-0,1454	0,30398	-0,8247 0,0729	-0,22398 -0,4822	-0,89015 -0,97897	-0,8901 -0,97896

2,8264	- 0,8319 0,1559	0,2622 - 0,5129	-0,1106	1,4129	0,9453	0,9453
	1	- 2,0906	5,6719	1,5404	6,1221	6,1217
	- 0,3337	-,4769 7 -,1869 7	4,79139 -0,9948	0,7992 1,1723	4,1140 -0,00913	4,1136 -0,0095
		1	-3,2441	-0,5411	-2,7854	-2,7851
		- 2,7110	-1,6013	1,0711	-0,5299	-0,5302
			1	-0,6689	0,3309	0,3311
			-0,6689			
3,8263	0,6664	- 1,7119	0,3309			

Жауабы: x_1=2,826; x_2=-0,334; x_3=-2,711; x_4=-0,669.

Бақылау сұрақтары

1. 2*2 сызықтық теңдеулер жүйесіне мысал келтір
2. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу дегеніміз не?
3. Жүйе әрдайым бір ғана шешімге ие ме?
4. Гаусс әдісінің мәні неде?
5. Теңдеулердің сызықтық – тәуелді жүйесі дегеніміз не?

Зертханалық жұмыс № 5

Жұмыстың мақсаты: Айналдыру әдісінің тәжірибесін меңгеру

Тапсырма: 1) сызықтық теңдеулер жүйесін айналдыру әдісімен шешу. Вариант нөмірін № 4 тәжірибелік жұмыстан қараңыз.

2) қорытындыларды салыстырыңдар, қандай әдіс тезірек жақын және неліктен.

№ 1.

№ 15.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}21; \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}72; \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}32x_4 - 0{,}58; \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}14x_3 + 1{,}56. \end{cases}$$

№ 17.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}24x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}34x_4 + 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}05x_1 + 0{,}32x_3 + 0{,}12x_4 - 0{,}57; \\ x_3 = 0{,}35x_1 - 0{,}27x_2 - 0{,}05x_4 + 0{,}68; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}04x_3 - 0{,}21x_4 - 2{,}14. \end{cases}$$

№ 19.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48; \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}24; \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15; \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88. \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}21x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}34x_3 - 0{,}16x_4 - 0{,}64; \\ x_2 = 0{,}34x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}42; \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}31x_4 - 0{,}42; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}25x_4 - 0{,}83. \end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}42x_1 - 0{,}32x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}44; \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}36x_3 + 1{,}42; \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}14x_3 - 0{,}24x_4 - 0{,}83; \\ x_4 = 0{,}15x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}18x_3 - 1{,}42. \end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}44x_3 - 0{,}05x_4 + 2{,}13; \\ x_2 = 0{,}24x_1 - 0{,}31x_3 + 0{,}15x_4 - 0{,}18; \\ x_3 = 0{,}06x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}23x_4 + 1{,}44; \\ x_4 = 0{,}72x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}05x_3 + 2{,}42. \end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}21; \\ x_2 = -0{,}21x_1 - 0{,}45x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}48; \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}28x_4 - 0{,}17. \end{cases}$$

№ 10.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}31x_4 + 2{,}7; \\ x_2 = 0{,}38x_1 - 0{,}12x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}5; \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}51x_4 + 1{,}2; \\ x_4 = 0{,}17x_1 - 0{,}21x_2 + 0{,}31x_3 - 0{,}17. \end{cases}$$

№ 12.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 - 0{,}06x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}17; \\ x_2 = 0{,}04x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}4; \\ x_3 = 0{,}34x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}06x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}1; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}03x_4 - 0{,}8. \end{cases}$$

№ 14.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}12x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}16x_4 + 1{,}24; \\ x_2 = 0{,}14x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}24x_4 - 0{,}89; \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}16x_3 - 0{,}32x_4 + 1{,}15; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}15x_4 - 0{,}57. \end{cases}$$

№ 16.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}14x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}12x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}09x_4 - 0{,}83; \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}35x_4 + 1{,}21; \\ x_4 = 0{,}23x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}65. \end{cases}$$

№ 18.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 - 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}06x_4 + 0{,}48; \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}12x_4 - 2{,}34; \\ x_4 = 0{,}13x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}24x_3 + 0{,}43x_4 + 0{,}72. \end{cases}$$

№ 20.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}28x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}06x_4 + 0{,}21; \\ x_2 = 0{,}52x + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}17; \\ x_3 = 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}81; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}72. \end{cases}$$

Тапсырманы орындау үлгісі

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі теңдеулерді сызықтық аралас жолымен үшбұрыштың түрге әкеледі

Есептеу сұлбасы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

5.1.2 Есептейміз

$$c_{21} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \qquad s_{21} = -\frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

($a_{11} = a_{21} = 0$ болса, $c_{21} = 1$ онда және $s_{21} = 0$)

5.1.2 Бірінші (1) 2 теңдеулер жүйесі мына теңдеулермен ауыстырады.

$$c_{21}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) - s_{21}(a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n) = c_{21}b_1 - s_{21}b_2$$

$$s_{21}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n) + c_{21}(a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n) = s_{21}b_1 + c_{21}b_2$$

Түрлендіруден кейін 2-ші теңдеудегі коэффициент $x_1 = 0$.

5.1.3 Аналогиялық түрде түрлендіруге 1-ші теңдеуді 3-ші негізгі теңдеумен өңдеп шығарылады, 1-ші шыққанды негізгі 4-шімен м.с.с Процестің (n-1) қадамынан кейін мынандай түрдегі жүйеге келеді:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

5.1.4 Лақтырып тастаған 1-ші теңдеулер жүйесі үшін 1-3 қадамдарды қайталап отырып, $\frac{n(n-1)}{2}$ қадамнан кейін үшбұрышты матрицасы бар жүйеге әкеледі.

5.1.5 Кері жүріс дағдылы формуламен іске асырылады

$$x_m = \frac{b_m^{(n)} - a_{mm+1}^{(n)}x_{m+1} - \ldots - a_{mn}^{(n)}x_n}{a_{mm}}, \quad (m = n, n-1, \ldots, 1).$$

Зертханалық жұмыс № 6

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық теңдеулер жүйесін жақынжату әдістерімен шешуді студенттерді үйрету.

Тапсырма: Итерация үшін қолайлы түрге келтіре отырып, 0,001 дейінгі дәлдігі бар сызықтық теңдеулер жүйесін Зейделдің әдісімен шешу.

№ 1.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1; \\ 3{,}5x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}8x_3 = 1{,}7; \\ 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8. \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}7; \\ 2{,}1x_1 + 3{,}4x_2 + 1{,}8x_3 = 1{,}1; \\ 4{,}2x_1 - 1{,}7x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}8. \end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases} 3{,}1x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}2; \\ 1{,}9x_1 + 3{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}1; \\ 7{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 4{,}8x_3 = 5{,}6. \end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases} 9{,}1x_1 + 5{,}6x_2 + 7{,}8x_3 = 9{,}8; \\ 3{,}8x_1 + 5{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 6{,}7; \\ 4{,}1x_1 + 5{,}7x_2 + 1{,}2x_3 = 5{,}8. \end{cases}$$

№ 5.

$$\begin{cases} 3{,}3x_1 + 2{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 0{,}8; \\ 4{,}1x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}8x_3 = 5{,}7; \\ 2{,}7x_1 + 1{,}8x_2 + 1{,}1x_3 = 3{,}2. \end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 5{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = 10{,}1; \\ 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 + 2{,}7x_3 = 9{,}7; \\ 2{,}9x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 7{,}8. \end{cases}$$

№ 7.

$$\begin{cases} 3{,}2x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 6{,}5; \\ 0{,}5x_1 + 0{,}34x_2 + 1{,}7x_3 = -0{,}24; \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}5x_3 = 4{,}3. \end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases} 5{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = -3{,}5; \\ 4{,}2x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}7; \\ 3{,}4x_1 + 2{,}4x_2 + 7{,}4x_3 = 1{,}9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7,8x_1 + 5,3x_2 + 4,8x_3 = 1,8; \\ 3,3x_1 + 1,1x_2 + 1,8x_3 = 2,3; \\ 4,5x_1 + 3,3x_2 + 2,8x_3 = 3,4. \end{cases}$$

№ 16.

$$\begin{cases} 3,8x_1 + 4,1x_2 - 2,3x_3 = 4,8; \\ -2,1x_1 + 3,9x_2 - 5,8x_3 = 3,3; \\ 1,8x_1 + 1,1x_2 - 2,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

№ 17.

$$\begin{cases} 1,7x_1 - 2,2x_2 + 3,0x_3 = 1,8; \\ 2,1x_1 + 1,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8; \\ 4,2x_1 + 3,9x_2 - 3,1x_3 = 5,1. \end{cases}$$

№ 18.

$$\begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 - 3,2x_3 = 4,5; \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1; \\ 6,5x_1 - 7,1x_2 + 4,8x_3 = 6,3. \end{cases}$$

№ 19.

$$\begin{cases} 3,3x_1 + 3,7x_2 + 4,2x_3 = 5,8; \\ 2,7x_1 + 2,3x_2 - 2,9x_3 = 6,1; \\ 4,1x_1 + 4,8x_2 - 5,0x_3 = 7,0. \end{cases}$$

№ 20.

$$\begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,0; \\ 5,0x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1; \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

Тапсырманы орындау үлгісі

$$\begin{cases} 4,5x1 - 1,8x2 + 3,6x3 = -1,7; \\ 3,1x1 + 2,3x2 - 1,2x3 = 3,6; \\ 1,8x1 + 2,5x2 + 4,6x3 = 2,2. \end{cases}$$

Жүйені басты диагональдың элементтері жолдың қалған элементтерінен асып түсетіндей түрге келтіреміз.

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9; & (I + II) \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7; & (2III + II - I) \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4; & (III - II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x_1 = 2,4x_1 - 0,5x_2 - 2,4x_3 + 1,9; \\ 10x_1 = -2,2x_1 + 0,9x_2 - 4,4x_3 + 9,7; \\ 10x_1 = 1,3x_1 - 0,2x_2 - 4,2x_3 - 1,4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 - 0,05x_2 - 0,24x_3 + 0,19; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,09x_2 - 0,44x_3 + 0,97; \\ x_3 = 0,13x_1 - 0,02x_2 + 0,42x_3 - 0,14. \end{cases}$$

Теңдеу оң жақ бөлігіндегі белгісіз коэфициенттерден тұратын $\|A\|_1$ матрицаның $\{0,53;\ 0,77;\ 0,57\} = 0,77 < 1;$ тең, демек Зейдел процесі үйлесімді.

Есептеуді 6,1 кестесіне орналастырамыз.

Кесте 6.1

N	x_1	x_2	x_3	*N*	x_1	x_2	x_3
0	0,19	0,97	-0,14	5	0,2467	1,1138	-0,2237
1	0,2207	1,0703	-0,1915	6	0,2472	1,1143	-0,2241
2	0,2354	1,0988	-0,2118	7	0,2474	1,1145	-0,2243
3	0,2424	1,1088	-0,2196	8	0,2475	1,1145	-0,2243
4	0,2454	1,1124	-0,2226				

Жауабы: $x_1 \approx 0,248$; $x_2 \approx 1,115$; $x_3 \approx -0,224$.

Бақылау сұрақтары

1. 2*2 сызықтық теңдеулер жүйесіне мысал келтіріңіз.
2. Сызықтық теңдеулер жүйесін шешу дегеніміз не?
3. Жүйе әрдайым бір ғана шешімге ие ме?
4. Зейделдің әдісінің мәні неде?

Зертханалық жұмыс №7

Жұмыстың мақсаты: Студенттерді анықталған интегралдарды есептеуде жуықтау әдісіне үйрету.

Тапсырма: 1) Шыққан нәтижені салыстыру көмегімен дәлдікті бағалай отырып, **n=10** деп алып, сол жақты және оңжақты тіктөртбұрыш формуласы бойынша интегралды есептеу.

2) **n_1=8; n_2=10** деп алып, дәлдіктің бағасы үшін екі еселікті пайдалана отырып, орта тіктөртбұрыштың формуласы бойынша интегралды есептеу.

№ 1. 1) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+5}dx}{2x+\sqrt{x^2+0,5}}$;

№ 2. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{0,5x+2}dx}{\sqrt{2x^2+1}+0,8}$;

№ 3. 1) $\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{0,8x^2+1}dx}{x+\sqrt{1,5x^2+2}}$;

2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(1,5x+0,3)dx}{2,3+\cos(0,4x^2+1)}$.

2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2+0,8)dx}{1,5+\sin(0,6x+0,5)}$.

2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0,7x+0,4)dx}{2,2+\cos(0,3x^2+0,7)}$.

№ 4. 1) $\int_{1,0}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+0,6}dx}{1,6+\sqrt{0,8x^2+2}}$;

№ 5. 1) $\int_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{2x^2+1,6}dx}{2x+\sqrt{0,5x^2+3}}$;

№ 6. 1) $\int_{1,3}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+0,6}dx}{1,4+\sqrt{0,8x^2+1,3}}$;

№ 7. 1) $\int_{1,0}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+0,6}dx}{1,6+\sqrt{0,8x^2+2}}$;

№ 8. 1) $\int_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{2x^2+1,6}dx}{2x+\sqrt{0,5x^2+3}}$;

№ 9. 1) $\int_{0,8}^{2,4} \frac{\sqrt{0,4x^2+1,5}dx}{2,5+\sqrt{2x+0,8}}$;

№ 10. 1) $\int_{1}^{2,6} \frac{\sqrt{0,4x+3}dx}{0,7x+\sqrt{2x^2+0,5}}$;

№ 11. 1) $\int_{1,2}^{2,8} \frac{\sqrt{1,2x+0,7}dx}{1,4x+\sqrt{1,3x^2+0,5}}$;

№ 12. 1) $\int_{0,6}^{2,4} \frac{\sqrt{1,1x^2+0,9}dx}{1,6x+\sqrt{0,8x^2+1,4}}$;

№ 17. 1) $\int_{1}^{2,6} \frac{\sqrt{0,4x+3}dx}{0,7x+\sqrt{2x^2+0,5}}$;

№ 18. 1) $\int_{0,7}^{2,1} \frac{\sqrt{1,7x^2+0,5}dx}{1,4+\sqrt{1,2x+1,3}}$;

№ 19. 1) $\int_{0,6}^{2,2} \frac{\sqrt{1,5x+1}dx}{1,2x+\sqrt{x^2+1,8}}$;

№ 20. 1) $\int_{1,2}^{3} \frac{\sqrt{2x^2+0,7}dx}{1,5x+\sqrt{0,8x+1}}$;

2) $\int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x+0,5)dx}{2+\cos(x^2+1)}$.

2) $\int_{0,3}^{0,9} \frac{\cos(0,8x+1,2)dx}{1,5+\sin(x^2+0,6)}$.

2) $\int_{0,4}^{1,0} \frac{\sin(x+1,4)dx}{0,8+\cos(2x^2+0,5)}$.

2) $\int_{0,6}^{1,0} \frac{\cos(0,6x^2+0,4)dx}{1,4+\sin^2(x+0,7)}$.

2) $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0,5x+0,4)dx}{1,2+\cos(x^2+0,4)}$.

2) $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\cos(x^2+0,6)dx}{0,7+\sin(0,8x+1)}$.

2) $\int_{0,3}^{1,5} \frac{\sin(0,3x+1,2)dx}{1,3+\cos^2(0,5x+1)}$.

2) $\int_{0,5}^{1,8} \frac{\cos(x^2+0,6)dx}{1,2+\sin(0,7x+0,2)}$.

2) $\int_{0,4}^{1,4} \frac{\cos(0,8x^2+1)dx}{1,4+\sin(0,3x+0,5)}$.

2) $\int_{0,2}^{1} \frac{\sin(0,8x^2+0,3)dx}{0,7+\cos(1,2x+0,3)}$.

2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\cos(0,3x+0,5)dx}{1,8+\sin(x^2+0,8)}$.

2) $\int_{0,3}^{1,1} \frac{\sin(0,6x^2+0,3)dx}{2,4+\cos(x+0,5)}$.

2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(0,4x+0,6)dx}{0,8+\sin^2(x+0,5)}.$

2) $\int\limits_{0,4}^{1,8}\frac{\sin(0,2x^2+0,7)dx}{1,4+\cos(0,5x+0,2)}.$

2) $\int\limits_{0,2}^{1}\frac{\cos(0,3x+0,8)dx}{0,9+2\sin(0,4x+0,3)}.$

2) $\int\limits_{0,3}^{1,1}\frac{\sin(0,8x+0,3)dx}{1,2+\cos(x^2+0,4)}.$

2) $\int\limits_{0,5}^{1,3}\frac{\cos(x^2+0,2)dx}{1,3+\sin(2x+0,4)}.$

Тапсырманы орындау үлгісі

7.3.1 $I=\int\limits_{1,5}^{2,3}\frac{\sqrt{0,3x+1,2}dx}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}};$

7.3.2 $I=\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\sin(0,6x+0,3)dx}{1,7x+\cos(x^2+1,2)}$

7.3.1 пунктін шешу кезінде солжақты және оңжақты тіктөртбұрыш формуласы бойынша есептеу үшін **n=10** деп алып, интегралдау кесіндісін 10 бөлікке бөлеміз: $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2,3-1,5}{10}=0,08.$ Кесіндіні бөлу нүктесінде интеграл ішіндегі функцияның мәнінің 7.1 кестесін құрамыз.

7.1 кестесі

i	x_i	$0,3x_i+1,2$	$\sqrt{0,3x_i+1,2}$	$\sqrt{x_i^2+0,5}$	$1,6x_i+\sqrt{x_i^2+0,5}$	y_i
0	1,5	1,65	1,2845	1,6583	4,0583	0,3165
1	1,58	1,674	1,2938	1,7310	4,2590	0,3037
2	1,66	1,698	1,3031	1,8043	4,4603	0,2922
3	1,74	1,722	1,3122	1,8782	4,6622	0,2815
4	1,82	1,746	1,3214	1,9525	4,8545	0,2716
5	1,90	1,77	1,3304	2,0273	5,0673	0,2626
6	1,98	1,794	1,3394	2,1025	5,2705	0,2541
7	2,06	1,818	1,3483	2,1780	5,4740	0,2463
8	2,14	1,842	1,3572	2,2538	5,6778	0,2390
9	2,22	1,866	1,3660	2,3299	5,8819	0,2322
10		1,89	1,3748	2,4062	6,0862	0,2259

	2,30					
						Σ_1=2,6997
			Σ_2=2,6091			

Кестеде қосындының мәні табылады: $\sum_1 = \sum_{i=0}^{9} y_i = 2,6997;\ \sum_2 = \sum_{i=1}^{10} y_i = 2,6091.$

Интегралдың жуырқ мәңін табамыз: Солжақты тіқтөртбұрыш формуласы бойынша мынаны аламыз: $I_1 = h \cdot \sum_{i=0}^{9} y_i = 0,08 \cdot 2,6997 = 0,2158.$

Оңжақты тіқтөртбұрыш формуласы бойынша мынаны аламыз: $I_2 = h \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i = 0,08 \cdot 2,6091 = 0,2087.$

Бұл нәтижелер жүздік бөлшегімен ереқшеленеді. Үзілді – кесілді мәні регінде нәтижені мыңдыққа дейін айналдыра отырып табылған мәннің жарты қосындысын аламыз: $I = \frac{I_1 + I_2}{2} = 0,212.$

7.3.2 пункін шешу үшін орта тіктөртбұрыш формуласын қолданамыз:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} y\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

n_1=8 және n_2=10 деп алып, есептеуді 2 рет орындаймыз: $h_1=(b-a)/n_1=(1,2-0,4)/8=0,1$ и $h_2=(b-a)/n_2=(1,2-0,4)/10=0,08$.
Есептеудің нәтижесі 7.2 және 7.3 кестесінде келтірілген.

7.2 кестесі

i	x_i	$x_i+\frac{h}{2}$	sin(0,6x+0,3)	1,7+cos(x^2+1,2)	$Y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$
0	0,4	0,45	0,53963	1,86750	0,28896
1	0,5	0,55	0,58914	1,76824	0,33318
2	0,6	0,65	0,63654	1,64832	0,38618
3	0,7	0,75	0,68164	1,50947	0,45158
4	0,8	0,85	0,72429	1,35550	0,53433
5	0,9	0,95	0,76433	1,19300	0,64068
6	1,0	1,05	0,80162	1,03186	0,77687
7	1,1	1,15	0,83603	0,88559	0,94404
					Σ_1=4,35582

7.3 кестесі

i	x_i	$x_i+\frac{h}{2}$	sin(0,6x+0,3)	1,7+cos(x^2+1,2)	$Y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$
0	0,4	0,44	0,53457	1,86627	0,28491

1	0,48	0,52	0,57451	1,80022	0,31913
2	0,56	0,60	0,61312	1,71080	0,35838
3	0,64	0,68	0,65032	1,60852	0,40430
4	0,72	0,76	0,68602	1,49467	0,45898
5	0,80	0,84	0,72014	1,37142	0,52511
6	0,88	0,92	0,75260	1,24212	0,60590
7	0,96	1,00	0,78333	1,11150	0,70475
8	1,04	1,08	0,81225	0,98571	0,82403
9	1,12	1,16	0,83930	0,87241	0,96205
					Σ_2=5,44754

Интегралдың жуық мәңін табылмыз.

$$I_1 = h_1 \sum\nolimits_1 = 0{,}1 \cdot 4{,}35582 = 0{,}43558;$$
$$I_2 = h_2 \sum\nolimits_2 = 0{,}08 \cdot 5{,}44754 = 0{,}43580.$$

Мәндер ондық бөлшегімен иерекшеленеді, бірақ 2 мән 1-сіне қарағанда нақтырақ, сантықтан $I \approx 0{,}4358$ деп аламыз.

Бақылау сұрақтары

1. Анықталған интегралдың геометриялық мәні.
2. Солжақты, онжақты және орта тіктөртбұрыштың әдісінің мәні неде?
3. Тіктөртбұрыштың әдісі бойынша интегралдық қосындыны келтіріңіз.
4. Әдістің дәлдігі.

Зертханалық жұмыс № 8

Жұмыстың мақсаты: Студенттерді анықталған интегралды есептеудегі жуықтау әдісіне үйрету

Тапсырма: 1) Ондық таңбасы бар трапеция формуласы бойынша интегралды есептеу.

2) **n=8** деп алып, Симпсон формуласы бойынша интегралды есептеу; ақырлы айырым кестесін құра отырып, қателіктің нәтижесін бағалау.

№ 1. 1) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$;

№ 2. 1) $\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$;

№ 3. 1) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$;

№ 4. 1) $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

№ 5. 1) $\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$;

№ 6. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$;

№ 7. 1) $\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$;

№ 8. 1) $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$;

№ 9. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$;

№ 10. 1) $\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$;

№ 11. 1) $\int\limits_{2}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

№ 12. 1) $\int\limits_{0,5}^{1,3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$;

№ 13. 1) $\int\limits_{1,2}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$;

№ 14. 1) $\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$;

№ 15. 1) $\int\limits_{0,8}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

№ 16. 1) $\int\limits_{1,6}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$;

2) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{\lg(x+2)}{x}dx$.

2) $\int\limits_{1,6}^{2,4}(x+1)\sin x\,dx$.

2) $\int\limits_{0,2}^{1}\frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x^2+1}dx$.

2) $\int\limits_{0,6}^{1,4}\frac{\cos x}{x+1}dx$.

2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}\sqrt{x}\cos(x^2)dx$.

2) $\int\limits_{0,8}^{1,2}\frac{\sin(2x)}{x^2}dx$.

2) $\int\limits_{0,8}^{1,6}\frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$.

2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\cos x}{x+2}dx$.

2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}(2x+0,5)\sin x\,dx$.

2) $\int\limits_{0,4}^{0,8}\frac{\mathrm{tg}(x^2+0,5)}{1+2x^2}dx$.

2) $\int\limits_{0,18}^{0,98}\frac{\sin x}{x+1}dx$.

2) $\int\limits_{0,2}^{1,8}\sqrt{x+1}\cos(x^2)dx$.

2) $\int\limits_{1,4}^{3}x^2\lg x\,dx$.

2) $\int\limits_{1,4}^{2,2}\frac{\lg(x+2)}{x+1}dx$.

2) $\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$.

2) $\int\limits_{0,8}^{1,6}(x^2+1)\sin(x-0,5)dx$.

№ 17. 1) $\int\limits_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$;

№ 18. 1) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$;

№ 19. 1) $\int\limits_{1,4}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$;

№ 20. 1) $\int\limits_{3,2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$;

2) $\int\limits_{0,6}^{1,4}x^2\cos x\,dx$.

2) $\int\limits_{1,2}^{2}\frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$.

2) $\int\limits_{2,5}^{3,3}\frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1}dx$.

2) $\int\limits_{0,5}^{1,2}\frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x+1}dx$.

Тапсырманы орындау үлгісі

$$8.3.1\ \ I=\int_{0,4}^{1,3}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}};$$

$$8.3.2\ \ I=\int_{1,2}^{1,6}\frac{\sin(2x-2,1)}{x^2+1}\,dx.$$

8.3.1 пунктін шешуде, дәлдіктің берілген дәрежесіне жету үшін $\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2<0{,}0005.$ болғандай**,** **n** мәнін анықтау керек. Мұнда **a=0,7; b=1,3;** $\mathbf{M_2}$ $\max\limits_{[0,7;1,3]}\left|f''(x)\right|$ **,где** $f(x)=1/\sqrt{2x^2+0,3}.$ Табамыз**:**

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{(2x^2+0,3)^3}},$$

$$f''(x)=\frac{8x^2-0,6}{\sqrt{(2x^2+0,3)}}$$

,

$$\max_{[0,7;1,3]}\left|f''(x)\right|<\frac{8\cdot1,3^2-}{\sqrt{(2\cdot0,7^2+}}$$

$\mathbf{M_2=7}$ деп алайық, онда (*) теңсіздігі $\frac{0,6^3\cdot7}{12n^2}<0{,}0005,$ түріне ие болады, $\mathbf{n^2>252,}$ яғни **n>16; n=20** деп алсақ. Интегралды есептеуді мына формула бойынша жүргіземіз.

$$I\approx h\left(\frac{y_0+y_{20}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{19}\right),$$

мұндағы h=(b-a)/h=0,6/20=0,003; $y_i=y(x_i)=1/\sqrt{2x_i^2+0,3};$ $x_i=0,7+ih$ (I=0, 1, 2, …, 20). Барлық санау 8.1 кестесінде келтірілген.

Кесте 8.1

I	x_i	x_i^2	$2x_i^2+0,3$	$\sqrt{2x_i^2+0,3}$	y_0, y_{20}	y_1, y_2, …, y_{18},y_{19}
0 1 2 3 4 5 6	0,7 0,7 3 0,7 6 0,7 9	0,49 0,5329 0,5776 0,6241 0,6724 0,7225 0,7744	1,28 1,3658 1,4552 1,5482 1,6448 1,7450 1,8488	1,1314 1,1686 1,2063 1,2443 1,2825 1,3210 1,3597	0,88386	 0,8557 2 0,8289 8 0,8036 6

7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	0,82 0,85 0,88 0,91 0,94 0,97 1,00 1,03 1,06 1,09 1,12 1,15 1,18 1,21 1,24 1,27 1,30	0,8281 0,8836 0,9409 1,0000 1,0609 1,1236 1,1881 1,2544 1,3225 1,3924 1,4641 1,5376 1,6129 1,6900	1,9562 2,0672 2,1818 2,3000 2,4218 2,5472 2,6762 2,8088 2,9450 3,0848 3,2282 3,3752 3,5258 3,6800	1,3986 1,4378 1,4771 1,5166 1,5562 1,5960 1,6396 1,6759 1,7161 1,7564 1,7967 1,8372 1,8777 1,9187	0,52129	0,77973 0,75700 0,73546 0,71501 0,69551 0,67700 0,65937 0,64259 0,62657 0,61140 0,59669 0,58272 0,56935 0,55658 0,54431 0,53253
Σ					1,40515	12,77022

Сонда $I = 0{,}03\left(\frac{1{,}40515}{2} + 12{,}77022\right) = 0{,}40418 \approx 0{,}404.$

8.3.2 n=8 шарты бойынша h=(b-a)/n=(1,6-1,2)/8=0,05. Есептеу формуласы мынадай түрге ие:

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8),$$

мұнда $y_i = y(x_i) = \dfrac{\sin(2x_i - 2{,}1)}{x_i^2 + 1},\ x_i = 1{,}2 + ih\ (i = 0,1,\ldots,8).$

Функцияның мәнін, сонымен қатар формулада бірдей коэффициентке ие функциясының мәнінің қосуын есептеуде 8.2 кестесінде жүргіземіз.

Кесте 8.2

i	x_i	$2x_i$-2,1	sin($2x_i$-2,1)	x_i^2+1	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
Σ					0,3713	0,8305	0,6368

Демек, $I \approx \frac{0{,}05}{3}(0{,}3714 + 4 \cdot 0{,}8305 + 2 \cdot 0{,}6368) = \frac{0{,}05}{3} \cdot 4{,}9670 \approx 0{,}88278.$

Шыққан нәтиженің дәлдігінің бағасы үшін 4-ші реттегі айырымға дейін функцияның ақырлы айырымның кестесін құрамыз.

Кесте 8.3

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001
1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	0,0001
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	-
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	
6	0,2410	0,0063	-0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

					0,0001

max $|\Delta^4 y_i|$=0,0001 болса, онда формуланың қалдық мүшесі:

$$R_{ост} < \frac{(b-a)\cdot\max|\Delta^4 y_i|}{180} \approx \frac{0{,}4\cdot 0{,}0001}{180} \approx 0{,}0000003.$$

Есептеу 4 таңбалы цифрмен жүргізіледі, сондықтан да қалдық мүшенің шамасы қателікке әсер етпейді.

Есептеудің қателігін $\Delta I=(b-a)\Delta y \approx 0{,}4 \cdot 0{,}0001<0{,}00005$ арақатынасына бағалауға болады.

Яғни, шыққан 4 ондық таңбалы дұрыс.

Бақылау сұрақтары

1. Анықталған интегралдың геометриялық мәні.
2. трапеция әдісі бойынша интегралдық қосындысы.
3. Симпсон әдісі бойынша интегралдық қосындысы.
4. Әр әдістің дәлдігін бағалау.

Зертханалық жұмыс №9

Жұмыстың мақсаты: Студенттерді қарапайым дифференциалды теңдеулерді шешуде жуықтау әдісіне үйрету.

Тапсырма: Анықтауы бар Эйлердің әдісін қолдана отырып, [a,b] кесіндісінде $y(x_0)=y_0$ бастапқы шартымен қанағаттандырылатын дифференциалды теңдеудің интегралының жуықтау мәндерінің кестесін құру, қадам h=0,1. Барлық есеептеуді 4 ондық таңбамен жүргізу керек.

№ 1. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1,8)=2,6$, $x\in[1,8;2,8]$.

№ 2. $y'=x+\cos\frac{y}{3}$, $y_0(1,6)=4,6$, $x\in[1,6;2,6]$.

№ 3. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 4. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0,5)=0,6$, $x\in[0,5;1,5]$.

№ 5. $y'=x+\cos\frac{y}{\pi}$, $y_0(1,7)=5,3$, $x\in[1,7;2,7]$.

№ 6. $y'=x+\cos\frac{y}{2,25}$, $y_0(1,4)=2,2$, $x\in[1,4;2,4]$.

№ 7. $y'=x+\cos\frac{y}{e}$, $y_0(1,4)=2,5$, $x\in[1,4;2,4]$.

№ 8. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{2}}$, $y_0(0,8)=1,4$, $x\in[0,8;1,8]$.

№ 9. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{3}}$, $y_0(1,2)=2,1$, $x\in[1,2;2,2]$.

№ 10. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{11}}$, $y_0(2,1)=2,5$, $x\in[2,1;3,1]$.

№ 11. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{5}}$, $y_0(1,8)=2,6$, $x\in[1,8;2,8]$.

№ 12. $y'=x+\sin\frac{y}{3}$, $y_0(1,6)=4,6$, $x\in[1,6;2,6]$.

№ 13. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{10}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 14. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{7}}$, $y_0(0,5)=0,6$, $x\in[0,5;1,5]$.

№ 15. $y'=x+\sin\frac{y}{\pi}$, $y_0(1,7)=5,3$, $x\in[1,7;2,7]$.

№ 16. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 17. $y'=x+\sin\frac{y}{e}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 18. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{2}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 19. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{3}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

№ 20. $y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{11}}$, $y_0(0,6)=0,8$, $x\in[0,6;1,6]$.

Тапсырманы орындау үлгісі

$y'=x+\sin\frac{y}{\sqrt{2,25}}$, $y_0(1,4)=2,2$, $x\in[1,4;2,4]$.

Анықтауы бар Эйлердің әдісі былайша тұжырымдалады: $y(x)$- ізделінетін функция да әр $y_{k+1}=y(x_{k+1})$ мәні, ал $x_{k+1}=x_0+h(k+1)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ келесі түрде анықталады:

Бастапқы жуықтауға $y_{k+1}^{(0)}=y_k+hf(x_k,y_k)$ алынады, мұндағы $f(x,y)=y'(x,y)=y'(x,y)$.

Табылған $y_{k+1}^{(0)}$ мәні мына формула бойынша анықталады:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}] \quad (i = 1,2,...).$$

Анықтау талап етілегн дәлдіктің шегінде 2 тізбектелген жуықтау қатар келгенше жалғастырылады. 9.1 кестесіне мы салдың жауабын орналастырамыз.

Кесте 9.1

k	x_k	y_k	$f_k = f(x_k, y_k)$	hf_k
0	1,4	2,2	2,2292	0,2229
1	1,5	2,4306	2,3821	0,2382
2	1,6	2,6761	2,5281	0,2528
3	1,7	2,9357	2,6648	0,2665
4	1,8	3,2084	2,7895	0,2790
5	1,9	3,4929	2,8998	0,2900
6	2,0	3,7876	2,9936	0,2994
7	2,1	4,0908	3,0696	0,3070
8	2,2	4,4006	3,1268	0,3127
9	2,3	4,7152	3,1654	0,3165
10	2,4	5,0328		

Бақылау сұрақтары

1. Диффреенциалды теңдеуді шешу дегеніміз не?
2. Коши есебінің орны.
3. Эйлердің әдісінің мәні неде?
4. Эйлердің әдісі бойынша итерациялдық формула.

Зертханалық жұмыс №10

Жұмыстың мақсаты: Қарапайым дифференциалды теңдеуді шешудегі жуықтау әдістерін тәжірибелік меңгеру.

Тапсырма: $y' = f(x, y)$ диффренциалды теңдеудің интегралының жуықтау мәнінің кестесін құру. h=0.1 қадамы [0,1] кесіндісінде $y(x_0) = y_0$ бастапқы шарт ымен қанағаттандырылатын.

№ 1. $\mathbf{y' = 1 + 0,2y\sin x - y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 2. $y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y), y(0) = 0.$

№ 3. $\mathbf{y' = \frac{\cos x}{x + 1} - 0,5y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 4. $y' = (1 - y^2)\cos x + 0,6y, \quad y(0) = 0.$

№ 5. $\mathbf{y' = 1 + 0,4y\sin x - 1,5y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 6. $y' = \frac{\cos y}{x + 2} + 0,3y^2, \quad y(0) = 0.$

№ 7. $\mathbf{y' = \cos(1,5x + y) + (x - y), \quad y(0) = 0.}$

№ 8. $y' = 1 - \sin(x + y) + \frac{0,5y}{x + 2}, y(0) = 0.$

№ 9. $\mathbf{y' = \frac{\cos y}{1,5 + x} + 0,1y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 10. $y' = 0,6\sin x - 1,25y^2 + 1, y(0) = 0.$

№ 11. $\mathbf{y' = \cos(2x + y) + 1,5(x - y), y(0) = 0.}$

№ 12. $y' = 1 - \frac{0,1y}{x + 2} - \sin(2x + y), y(0) = 0.$

№ 13. $\mathbf{y' = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,1y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 14. $y' = 1 + 0,8y\sin x - 2y^2, \quad y(0) = 0.$

№ 15. $\mathbf{y' = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y), y(0) = 0.}$

№ 16. $y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x + 2}, y(0) = 0.$

№ 17. $\mathbf{y' = \frac{\cos y}{1,75 + x} - 0,5y^2, \quad y(0) = 0.}$

№ 18. $y' = 1 + (1 - x)\sin y - (2 + x)y, y(0) = 0.$

№ 19. $\mathbf{y' = (0,8 - y^2)\cos x + 0,3y, \quad y(0) = 0.}$

№ 20. $y' = 1 + 2,2\sin x + 1,5y^2, \quad y(0) = 0.$

Тапсырманы орындау үлгісі

Әр қадамда есептеу келесі формула бойынша жүргізіледі:

$y_{i+1}=y_i+\frac{1}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)})$, мұндағы

$k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i)$

$k_2^{(i)}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_1^{(i)}}{2})$

$k_3^{(i)}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{k_2^{(i)}}{2})$

$k_4^{(i)}=hf(x_i+h,y_i+k_3^{(i)})$

Сонымен бірге $x_i=x_0+ih$ $(i=\overline{0,n})$. Қателік *к* қадамында h^5 ретіне ие.

Зертханалық жұмыс №11

Жұмыстың мақсаты: Сызықтық емес программалаудың тапсырмаларын шешуде алтын қиманың әдісінің дағдысына ие болу.

f(x) функциясы [a, b] кесіндісінде анықталатын болсын. Егер f(x) функциясы экстремаль мәнді қабылдайтын бір ғана x* нүктесі бар болса, f(x) функциясы унимодальді деп аталады. Анықталған болу үшін [a, b] кесіндісіндегі f(x) функциясының минимумы туралы сөз болып жатыр деп есептейік. Унимодальды функциясы тегіс немесе типті үзіліссіз болмауы керек деп белгілейік. Унимодальдылықты анықтаудан келесіні байқаймыз: егер $x_1 < x_2 \leq x^*$, онда $f(x_1) > f(x_2)$.

Аналогиялық түрде егер $x^* \leq x_1 < x_2$ онда $f(x_1) < f(x_2)$. Есеп мынадай $\{x_k\}$ тізбегін құрудан тұрады, тек кейбір i кезінде функцияның минималды мәні $x_{i-1} \leq x^* \leq x_i$ интервалына жетеді. Мұндай интервалды анықталмағандық интервалы деп атайды.

$\{x_k\}$ абциссті таңдау алгоритмі іздеу стратегиясы деп аталады. Функцияның есептеуінің берілген өлшемі кезінде, анықталмағандықтың ең аз интервалына әкелсін, тиімді стратегия болып табылады. Мұндай жағдайда Фибонначи стратегиясын тиімді деп көрсетуге болады, былай атаудың себебі, ол Фибоначчидің атақты сандарымен тығыз байланысты.

Беріліп отырған тәжірибелік жұмыста бірөлшемді минималдау үшін алтын қиманың әдісі қолданылады. Функция есептеудің жеткілікті үлкен өлшемі кезінде соңғы интервал Фибоначчи әдісінде тек 17 % үлкен, бірақ есептеу процесінің ұйымдары едәуір қарапайым.

Белгілі болғандай, кесіндінің алтын қимасы деп кесіндіні 2 бөлікке бөлгенді атайды, барлық кесіндінің ұзындығының үлкен бөліктегі ұзындықтың кішіге қатынасына тең.

Алтын қиманың [a, b] кесіндісі симметриялы орналасқан 2 нүктені шығаратынын тексеру қиын емес: x_1=a+$(1-\tau)$(b - a), x_2=$a+\tau(b-a)$, мұндағы $\tau = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2 = 0.6180339$.

Іздеудің алгоритмін жазып көрсетейік. Бастапқы кесіндіні “алтын қиамның ережесі” бойынша x_1 мен x_2 нүктелерінде $f(x_1)$ мен $f(x_2)$ функцияларының мәнін есептейміз. Осы мәндерді салыстыру біресе [a, x_1], біресе [x_2, b] интервалын лақтыруға мүмкіндік береді. Қалған интервалда енді 1 нүкте бар, оны алтын қима шығарады, тапсырма дәл осындай 2-ші нүктені құрудан тұрады. Осыдан кейін процесті қайталаймыз. Осылайша, әр қадамды 2-шісінен бастап, функцияны 1 рет қана есептеу қажет етеді, және анықталмағандықтың интервалы 0,618 ретте азаяды. Итерация анықталмағандықтың интервалы кейбір берілген □ санынан аз болғанша жалғастырылады.

Алтын қиманың әдісі бисекция әдісін еске түсіреду, өйткені ол ең орайсыз жағдайда минимумды табуға кепілдік береді, бірақ баяу жинақтылыққа ие.

Тапсырмалар нұсқасы

1 кестесінде келтірілген өз вариантына сәйкес алтын қиманың әдісі бойынша унимодальды *f(x)* функциясын минималдау.

№ варианта	f (x)	a	b
1		1.0	-0.85
2		2.0	-0.65
3		3.0	-0.45
4		4.0	-0.25
5		5.0	-0.05
6	$f(x)=x^2 + ae^{bx}$	6.0	+0.15
7		7.0	0.35
8		8.0	0.55
9		9.0	0.75
10		10.0	0.95
11		-1.5	1.0
12		-1.3	1.5
13		-1.1	2.0
14		-0.9	2.5
15		-0.7	3.0
16	$f(x)=x^4 + a \operatorname{arctg} bx$	-0.3	3.5
17		-0.1	4.0
18		0.2	4.5
19		0.4	5.0
20		0.8	5.5
21		0.2	-4.0
22		0.4	-3.4
23		0.6	-2.8
24		0.8	-2.2
25		0.9	-1.6
26	$f(x)= bx + e^{\|x-a\|}$	1.2	-1.0
27		1.4	-0.4
28		1.6	-0.2
29		1.8	0.8
30		2.0	1.4

Бақылау сұрақтары

1. Функция градиенті дегеніміз не?
2. Алтын қиамның әдісінің мәні неде?
3. Алтын қиамның әдісі қандай типтегі есептер үшін қолданылады?

Зертханалық жұмыс №12

Жұмыстың мақсаты: Аргументтің берілген мәні кезінде функцияның жуықтау мәнін Лагранждың интерполяциондық көпмүше көмегімен есептеу.

Тапсырма: Аргументтің берілген мәнінде функцияның жуықтау мәнін Лагранж интерполяциондық көпмүше көмегімен табу.

12.2.1 *x=0,702*
7. *x=0,512*
13. *x=0,645*

x	*0,43*	*0,48*	*0,55*	*0,62*	*0,7*	*0,75*
y	*1,63597*	*1,73234*	*1,87686*	*2,03345*	*2,33846*	*2,35973*

2. *x=0,102*
8. *x=0,114*
14. *x=0,125*

x	*0,02*	*0,08*	*0,12*	*0,17*	*0,23*	*0,3*
y	*1,02316*	*1,0959*	*1,14725*	*1,21483*	*1,3012*	*1,40976*

3. *x=0,526*
9. *x=0,453*
15. *x=0,482*

x	*0,35*	*0,41*	*0,47*	*0,51*	*0,56*	*0,64*
y	*2,73951*	*2,3008*	*1,96864*	*1,78776*	*1,59502*	*1,34310*

4. *x=0,616*
10. *x=0,478*
16. *x=0,665*

x	*0,41*	*0,46*	*0,52*	*0,6*	*0,65*	*0,72*
y	*2,57418*	*2,32513*	*2,09336*	*1,86203*	*1,74926*	*1,62098*

5. *x=0,896*
11. *x=0,812*

x	*0,68*	*0,73*	*0,8*	*0,88*	*0,93*	*0,99*

17. *x=0,774* *y* *0,80866 0,89492 1,02964 1,20966 1,34087 1,52368*

6. *x=0,314* | *x* *0,11 0,15 0,21 0,29 0,35 0,4*

12. *x=0,235*

18. *x=0,332* *y* *9,05421 6,61659 4,69170 3,35106 2,73951 2,36522*

Тапсырманы орындау үлгісі

f(x) функциясы кестеде берілсін, $L_n(x)$ интерполяциондық көпмүше құрайық, оның дәрежесі n – нен үлкен емес, және ол үшін (2) шарт орындалған болсын. $L_n(x)$ көпмүшесін мынадай түрде табамыз:

$$L_n(x)=l_0(x)+l_1(x)+...+l_n(x) \quad (1)$$

Мұндағы $l_i(x)$ – n дәрежесінің көпмүшесі сонымен бірге

$$l_i(x_k)=\begin{cases} y_i, & i=k \\ 0, & i\neq k \end{cases} \quad (2)$$

$l_i(x)$ көпмүшесін келесі түрде құрамыз:

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad (3)$$

c_i – тұрақты коэффициент болғанда, мәнін (6) шарттың 1-ші бөлігінен табамыз:

$$c_i=\frac{y_i}{(x_i-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x-x_n)}.$$

c_i мәнін (7) шартқа қоямыз, алатынымыз: $l_i(x)=\frac{y_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}(x-x_0)\dots(x-x_n)$ және (5) есеппен біржолата

$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$ ие боламыз. Лагранж формуласының $\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ белгісін қолдана отырып, қысылған түрге келтіруге болады. $\Pi_{n+1}(x)$ x бойынша дифференциалдайық.

$x = x_i \ (i = 0,1,...,n)$ кезінде $\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n}(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$,

демек $L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}$.

$$\begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 \ldots x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 \ldots x_1 - x_n \\ \vdots & \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 \ldots x - x_n \end{bmatrix}$$

D_i - элементтер жолының көбейтіндісі.

$\Pi_{n+1}(x)$ - басты диагональдың элементінің көбейтіндісі.

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}$$

Мысалы, 12.1 кестесі берілген.

Кесте 12.1

x	1	3	4
f(x)	12	4	6

Лагранж көпмүшесін құрыңыз. Шешу үшін (4) формуласын қолданамыз,

$n = 2 \ x_0 = 1, \ x_1 = 3, \ x_2 = 4$

$$L_2(x) = 12\frac{(x - 3)(x - 4)}{(1 - 3)(1 - 4)} + 4\frac{(x - 1)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 4)} + 6\frac{(x - 1)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 3)} = 2x^2 - 12x + 22$$ аламыз.

Әдебиет

1 Бахвалов И. С. Численные методы. Ч.1. – М. : Наука, 1973. – 148 с.

2 Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М. : Наука, 1966 – 160 с, Т.2. – М.: Физматгиз, 1962. – 180 с.

3 Воробьева Г.И., Данилова А.И. Практикум по вычислительной математике. – М. : Высшая школа, 1990.- 241 с.

4 Воробьева Г. И., Данилова А. И. Практикум по численным методам. – М. : Наука, 1979. – 180 с.

5 Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. –
М. : Наука, 1977. – 448 с.

6 Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 120с.

7 Культин Н. Программирование на Object Pascal в Delphi 5. –
Спб. : БХБ, Санкт-Петербург, 1999. – 448 с.

8 Копченова И.А., Марон С.Т. Вычислительная математика в примерах и задачах. М. : 1972. – 186 с.Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М. : Наука, 1980. – 210 с.

9 Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языке Бейсик, Фортран, Паскаль. – Томск, 1991. – 320 с.

Турчак Л. И. Основы численных методов. – М. : Наука, 1987. – 240 с.

10Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М. : Наука, 1989. – 163 с.

11Фаронов В.В. Турбо Паскаль 7.0 Учебный курс. – М. : 1998. –433 с

12Фаронов В.В. DELPHI 4. Учебный курс. – М. : 1999. 464 с.