Ф СО ПГУ 7.18.2/06

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Кафедра информатики и информационных систем

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

дисциплины «Численные методы решения задач математической физики»

для специальности 050601 Математика

Павлодар

Форма
Ф СО ПГУ 7.18.1/07

**УТВЕРЖДАЮ**
Декан ФФМиИТ
_________ С.К. Тлеукенов
"___" __________200__г.

Составители: доцент Даутова А.З.,
преподаватель Оспанова Г.А.

Кафедра «Информатика и информационные системы»

**Методические указания к лабораторным занятиям**

по дисциплине «Численные методы решения задач математической физики»

для студентов специальностей 050601 Математика

Рекомендована на заседании кафедры от “____”___200___г.
Протокол № ___

Заведующая кафедрой ___________ Ж.К.Нурбекова

Одобрена учебно - методическим советом факультета Физики, математики и информационных технологий “___”______200_г. Протокол №___

Председатель МС__________________________ А.З. Даутова

## 1 Цели и задачи дисциплины

**Целью** преподавания дисциплины является выработка необходимой интуиции для нахождения эффективных алгоритмов решения задач вычислительной математики, а также познакомить студентов с принципами построения численных алгоритмов, на основе которых осуществляется наиболее рациональная стратегия численного решения задач.

**В результате изучения дисциплины студенты должны:**

- знать основные понятия и идеи методов вычислительной математики,
- уметь решать практические задачи, умело использовать те или иные методы вычислительной математики для реализации на ПЭВМ простейших математических моделей и анализировать численный результат (осуществить "обратную связь").

### Лабораторное занятие №1

### Тема: Основные задачи математической физики.

*Цель: Ознакомиться с разностной схемой, с уравнением теплопроводности и решить ее.*

Разностная схема для решения уравнения теплопроводности при заданных начальных и граничных условий имеет следующий вид:

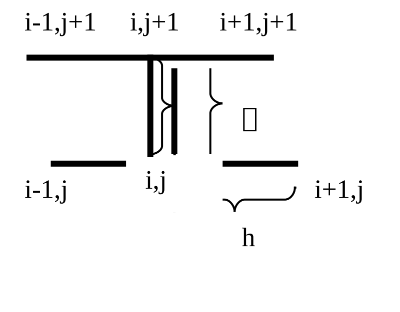
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1 \quad \mathrm{t} > 0,\ \mathrm{a} > 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{U(x,0)} = \varphi(x) \quad U(0,t) = \psi_1(t) \quad U(1,t) = \psi_2(t)$$

$\varphi(\mathrm{x})$ - начальное распределение ттемператры U при $\mathrm{t} = 0$.

$\psi_1(\mathrm{t})$ и $\psi_2(\mathrm{t})$ - распределение температуры на концах рассматриваемого отрезка [0,1] в любой момент, начальные и граничные условия должны быть согласованы, то есть $U(0,0) = \varphi(0) = \psi_1(0) \quad U(1,0) = \varphi(1) = \psi_2(1)$. Вводим прямоугольную сетку:
$x_i = ih \quad (i = 0,1,\ldots,I) \quad t_j = j\tau \quad (j = 0,1,\ldots,J)$, где $\mathrm{h}, \tau$ - шаги. $U_i^j = U(x_i, t_j)$ - значение функции в узлах сетки. Таким образом,

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (i = 1,2,\ldots I-1; \quad j = 0,1,\ldots) \qquad (2)$$



$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=a\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad (i=1,2,\ldots I-1; \quad j=0,1,\ldots) \qquad (3)$$

Получаем систему алгебраических уравнений для определения значений сеточных функции во внутренних узлах. Из граничного условия

$$u_0^j=\psi_1(t_j) \quad u_I^j=\psi_2(t_j) \qquad (4)$$

При $t=const$ совокупность узлов называется слоем. Из (2) находим последовательно значения $u_i^{j+1}$ $(i=1,2,\ldots,I-1)$ на $j+1$ слое через соответствующие значения $u_i^j$ на $j$- том слое. Такие схемы называются явными. Для начала счета при $j=1$ необходимо решение на начальном слое, которое определяется начальным условием, имеющим следующий вид:

$$u_i^0=\varphi(x_i) \quad i=1,2,\ldots,I-1 \qquad (5)$$

В отличие от явной схемы каждое разностное уравнение (3) содержит на каждом новом слое значения неизвестных в трех точках, поэтому нельзя сразу определить эти значения через известное решение на предыдущем слое. Они носят названия неявных схем. При этом разностная схема (3) состоит из линейных трехточечных уравнений, то есть каждое уравнение содержит неизвестную функцию в трех точках данного слоя. Решаются методом прогонки.

В данном примере рассматривали двухслойную схему, т.е. в каждое разностное уравнение входят значения функции их двух слоев – нижнего, на котором решение уже найдено, и верхнего, в узлах которого решение ищется.

**Задание:**

1. Дать определение задачи Коши
2. Решить заданную выше задачу методом прогонки.
3. Какая схема называется явной?
4. Какая схема называется неявной.

## Лабораторное занятие №2

## Тема: Разностные схемы для уравнений параболического типа

*Цель: Рассмотреть третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, и составить блок схему её решения.*

Пример 2.1.

Решить третью начально-краевую задачу для параболического уравнения, содержащего как конвективные члены (пропорциональные производной $\partial u/\partial x$), так и источниковые члены, содержащие искомую функцию $u(x,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + gu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \varphi_0(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \varphi_l(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad t = 0. \end{cases} \qquad (2.1)\text{-}(2.4)$$

Решение.

Во внутренних узлах конечно-разностной сетки неявная конечно-разностная схема для уравнения (2.1) имеет вид:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \frac{a^2}{h^2}\left(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}\right) + \frac{b}{2h}\left(u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}\right) + gu_j^{k+1} + O\left(\tau + h^2\right),$$

$$j = \overline{1, N-1}. \qquad (2.5)$$

Если производные первого порядка в граничных условиях (2.2) и (2.3) аппроксимировать по следующей схеме (с помощью отношения конечных разностей справа и слева)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + O(h); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + O(h)$$

то граничные условия аппроксимируются с первым порядком, и глобальный порядок будет равен первому порядку несмотря на то, что во всех остальных узлах порядок аппроксимации по пространственным переменным равен двум. Для сохранения порядка аппроксимации, равного двум, в граничных узлах разложим на точном решении значение $u_1^{k+1}$ в окрестности точки x=0 в ряд Тейлора по переменной x до третьей производной включительно, $u_{N-1}^{k+1}$ - в аналогичный ряд в окрестности точки x=l, получим (в предположении что функция u(x,t) в граничных узлах имеет первые производные по времени и вторые - по x):

$$u_1^{k+1} = u\left(o + h, t^{k+1}\right) = u_0^{k+1} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0^{k+1} h + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_0^{k+1} \frac{h^2}{2} + O\left(h^3\right) \qquad (2.6)$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u\left(l - h, t^{k+1}\right) = u_N^{k+1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_N^{k+1} h + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N^{k+1} \frac{h^2}{2} + O\left(h^3\right). \qquad . (2.7)$$

Далее, подставим сюда значения второй производной в граничных узлах, полученные из дифференциального уравнения (2.21):

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{j=0,N}^{k+1} = \left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{b}{a^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{g}{a^2}u\right)_{j=0,N}^{k+1},$$

и найдем из полученных выражений (2.6), (2.7) значения первой производной $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j=0,N}^{k+1}$ в граничных узлах с порядком $O(\tau + h^2)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{0}^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 - bh)}\cdot\left(u_1^{k+1} - u_0^{k+1}\right) - \frac{h}{2a^2 - bh}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{0}^{k+1} + \frac{gh}{2a^2 - bh}\cdot u_0^{k+1} + O_1(h^2),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{N}^{k+1} = \frac{2a^2}{h(2a^2 + bh)}\cdot\left(u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}\right) + \frac{h}{2a^2 + bh}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{N}^{k+1} - \frac{gh}{2a^2 + bh}\cdot u_N^{k+1} + O_2(h^2).$$

Подставляя $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{0}^{k+1}$ в (2.2), а $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{N}^{k+1}$ в (2.3) и аппроксимируя полученные соотношения в соответствующих граничных узлах (при этом $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{0}^{k+1} = \left(u_0^{k+1} - u_0^{k}\right)/\tau + O(\tau)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{N}^{k+1} = \left(u_N^{k+1} - u_N^{k}\right)/\tau + O(\tau)$ получим алгебраические уравнения для граничных узлов, в каждом из которых два неизвестных:

$$b_0\cdot u_0^{k+1} + c_0\cdot u_1^{k+1} = d_0, \qquad j = 0;$$

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh - \frac{\beta}{\alpha}(2a^2 - bh); \qquad c_0 = -\frac{2a^2}{h};$$

$$d_0 = \frac{h}{\tau}\cdot u_0^k - \varphi_0(t^{k+1})\cdot\frac{2a^2 - bh}{\alpha}; \tag{2.8}$$

$$a_N\cdot u_{N-1}^{k+1} + b_N\cdot u_N^{k+1} = d_N, \qquad j = N;$$

$$a_N = -\frac{2a^2}{h}; \qquad b_N = \frac{2a^2}{h} + \frac{h}{\tau} - gh + \frac{\delta}{\gamma}\cdot(2a^2 + bh); \qquad c_n = 0;$$

$$d_N = \frac{h}{\tau}\cdot u_N^k + \varphi_1(t^{k+1})\cdot\frac{2a^2 + bh}{\gamma}. \tag{2.9}$$

Таким образом, (2.8) - конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (2.2) на левой границе x=0, а (2.9) - конечно-разностная аппроксимация граничного условия 3-го рода (2.3) на правой границе x=l, которые сохраняют тот же порядок аппроксимации, что и в конечно-разностной аппроксимации (2.5) дифференциального уравнения (2.1).

Приписывая к граничным конечно-разностным уравнениям (2.8), (2.9), каждое из которых содержит два значения сеточной функции, алгебраические уравнения (2.25), записанные в виде

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, \qquad j = \overline{1, N-1};$$

$$a_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2h}\right); \quad b_j = \frac{2a^2}{h^2} + \frac{1}{\tau} - g; \quad c_j = -\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b}{2h}\right); \quad d_j = \frac{1}{\tau} \cdot u_j^k,$$

(2.10)

получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей, решаемую методом прогонки $(a_0 = 0; c_N = 0)$

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}}; \quad B_j = \frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}} \quad \left(A_0 = -\frac{c_0}{b_0}; B_0 = \frac{d_0}{b_0}; A_N = 0\right), \quad j = \overline{0, N}$$

$$u_j^{k+1} = A_j u_{j+1}^{k+1} + B_j \quad \left(u_N^{k+1} = B_N\right), \qquad j = N, N\text{-}1, \ \ldots, \ 0.$$

(2.11)

(j = N, N-1, ... , 0.) (2.12)

Изложенный метод аппроксимации краевых условий, содержащих производные по пространственным переменным, повышает не только порядок аппроксимации, но и сохраняет консервативность конечно-разностной схемы, т.е. в конечно-разностной аппроксимации соблюдаются законы сохранения, на основе которых выведены дифференциальные соотношения задачи (2.1) - (2.4).

Аналогичный подход можно осуществить в краевых задачах для дифференциальных уравнений любых типов.

## Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Задача: Найти непрерывную функцию u(x,y), удовлетворяющую внутри прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) | 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b\}$ уравнению Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, и принимающая заданные значения на границе области $\Omega$, т.е. $\begin{matrix} u(0,y) = f_1(y), \ y \in [0,b] & u(a,y) = f_2(y) \ y \in [0,b] \\ u(x,0) = f_3(x), \ x \in [0,a, & u(x,b) = f_4(x), \ x \in [0,a]] \end{matrix}$, где $f_i \quad (i = 1,2,3,4)$ - заданные функции.

Пусть u(x,y) – непрерывная функция на границе области , т.е. $f_1(0) = f_3(0), \quad f_1(b) = f_4(0), \quad f_2(0) = f_3(a), \quad f_2(b) = f_4(a).$

Выбрав шаги h, l по x, y соответственно, строим сетку $x_i = ih \quad (i = 0,1,\ldots,n), \quad y_j = jl \quad (j = 0,1,\ldots,m)$, где $x_n = nh = a \quad y_m = ml = b$.

Обозначения: $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Аппроксимируем частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в каждом внутреннем узле сетки центрально- разностными производными 2- го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} + O(l^2)$$

уравнение Лапласа заменяем конечно- разностным уравнением $\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)\ (j = 1,2,\ldots,m-1)$.

При $l = h$: $u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$ (14)

$u_{i0} = f_3(x_i) \quad u_{i,m} = f_4(x_i) \quad u_{0j} = f_1(y_i) \quad u_{nj} = f_2(y_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n-1,\ j = 1,2,\ldots,m-1)$

Численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области состоит в нахождении приближенных значении $u_{ij}$ искомой функции $u(x,y)$ во внутренних узлах сетки. Для определения $u_{ij}$ требуется решить систему линейных алгебраических уравнений (14). Систему решаем итерационным методом Гаусса- Зейделя, который состоит в построении последовательности итерации вида $u_{ij}^{(s+1)} = \frac{u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)} + u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}}{4}$ при $s \to 0$ последовательность $u_{ij}^{(s)}$ стремится к точному решению (14). Условия окончания итерационного процесса: $\max\left|u_{ij}^{(s)} - u_{ij}^{(s+1)}\right| < \varepsilon \quad 1 \le i \le n-1 \quad 1 \le j \le m-1$. Таким образом, погрешность приближенного решения, полученного методом сеток, складывается из двух погрешностей: погрешности аппроксимации дифференциальных уравнений разностными уравнениями и погрешности, возникающей в результате приближенного решения системы разностных уравнений (14). Устойчивость схемы означает, что малые изменения в начальных данных приводят к малым изменениям решения разностной задачи. Сходимость схемы означает, что при стремлении шага сетки к нулю $h \to 0$ решение разностной задачи стремится в некотором смысле к решению исходной задачи. Таким образом, выбрав достаточно малый шаг $h$, можно как угодно точно решить исходную задачу.

**Задание:**

1. Решение линейного уравнения переноса ищется в ограниченной области, заданной в полярной системе координат (r, φ): $r_0 \le r \le r_1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Сформулировать математическую постановку задачи и построить разностные схемы расщепления ее решения

a) явную;

b) неявную.

2. Построить блок-схему решения смешанной задачи для одномерного линейного уравнения переноса с использованием неявной разностной схемы.

3.Решить задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$\bar{D}\{0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T\}$ при $f = 0$ $u_0 = x(1 - x)$ $u_1 = \varphi_0 = \phi = 0$ $T = 0.6$

**Лабораторное занятие №3**

**Тема: Разностные схемы для уравнений гиперболического типа.**

*Цель: Освоить разностные схемы для уравнения колебания струны.*

Пример 3.1.
Выписать явную конечно-разностную схему для третьей начально-краевой задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu + f(x,t), & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \alpha \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \beta u(0,t) = \varphi_0(t), & x = 0, \quad t > 0; \\ \gamma \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \delta u(l,t) = \varphi_l(t), & x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi_1(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0; \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), & 0 \le x \le l, \quad t = 0. \end{cases}$$

Решение.
Аппроксимация дифференциального уравнения на шаблоне (3.1б) выглядит следующим образом:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} + cu_j^k + f_j^k, \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1,2,\dots$$

где . $f_j^k = f(x_j, t^k)$

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} + \beta u_0^{k+1} = \varphi_0(t^{k+1})$$

$$\gamma\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} + \delta u_N^{k+1} = \varphi_l(t^{k+1})$$

. В результате переход на новый временной слой представляется следующим алгоритмом:

$$u_j^{k+1} = u_{j+1}^k\left(\frac{a^2\tau^2}{h^2} + b\frac{\tau^2}{2h}\right) + u_j^k\left(-2\frac{a^2\tau^2}{h^2} + 2 + c\tau^2\right) + u_{j-1}^k\left(\frac{a^2\tau^2}{h^2} - b\frac{\tau^2}{2h}\right) - u_j^{k-1} + \tau^2 f_j^k$$

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha / h}{\beta - \alpha / h} u_1^{k+1} + \frac{\varphi_0(t^{k+1})}{\beta - \alpha / h},$$

$$u_N^{k+1} = \frac{\gamma / h}{\delta + \gamma / h} u_{N-1}^{k+1} + \frac{\varphi_l(t^{k+1})}{\delta + \gamma / h}.$$

Таким образом, сначала рассчитываются значения искомой функции u во внутренних узлах на новом временном слое, после чего из аппроксимации граничных условий находятся значения функции в крайних узлах.
Для окончательного замыкания вычислительного процесса определим, исходя из начальных условий, значения искомой функции на двух первых временных слоях $t^0, t^1$

В начальный момент времени значения $u_j$ определяются точно: $u_j^0 = \psi_1(x_j)$. Если воспользоваться аппроксимацией первого порядка по времени, то как было показано выше, получим $u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau$. Для повышения порядка аппроксимации разложим в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности t=0 :

$$u_j^1 = u(x_j, 0+\tau) = u_j^0 + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^0 \tau + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3)$$

где, согласно исходному уравнению

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^0 = a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^0 + b\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^0 + c u_j^k + f_j^k = a^2\psi_1''(x_j) + b\psi_1'(x_j) + c\psi_1(x_j) + f_j^k$$

Окончательно получаем

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + (a^2\psi_1''(x_j) + b\psi_1'(x_j) + c\psi_1(x_j) + f_j^k)\frac{\tau^2}{2}.$$

**Лабораторное занятие №4**

**Тема: Разностные схемы для уравнений эллиптического типа**

*Цель:* Решить з*адачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате.*

Пример 4.1

Решить уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), \quad x\in(0,l_1),\ y\in(0,l_2) \\ \alpha_1\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)+\beta_1 u(0,y)=\varphi_1(y), \\ \alpha_2\dfrac{\partial u}{\partial x}(l_1,y)+\beta_2 u(l_1,y)=\varphi_2(y), \\ \alpha_3\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,0)+\beta_3 u(x,0)=\varphi_3(x), \\ \alpha_4\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,l_2)+\beta_4 u(x,l_2)=\varphi_4(x) \end{cases}$$

Как и ранее в прямоугольнике $x\in[0,l_1],\ y\in[0,l_2]$ построим сетку $\omega_{h_1,h_2}=\{x_i=ih_1, i=\overline{0,N_1};\quad y_j=jh_2, j=\overline{0,N_2}\}$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах по рассмотренной выше центрально-разностной схеме

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_2^2}=f(x_i,y_j),\quad i=\overline{1,N_1-1},\quad j=\overline{1,N_2-1}$$
.

Граничные условия аппроксимируем с первым порядком с помощью направленных разностей:

$$\alpha_1 \frac{u_{1j} - u_{0j}}{h_1} + \beta_1 u_{0j} = \varphi_1(y_j)\,,\;\; j = \overline{1, N_2 - 1}\,,$$

$$\alpha_2 \frac{u_{N_1 j} - u_{N_1 j}}{h_1} + \beta_2 u_{N_1 j} = \varphi_2(y_j)\,,\;\; j = \overline{1, N_2 - 1}$$

$$\alpha_3 \frac{u_{i1} - u_{i0}}{h_2} + \beta_3 u_{i0} = \varphi_3(x_i)\,,\; i = \overline{1, N_1 - 1}$$

$$\alpha_4 \frac{u_{iN_2} - u_{iN_2 - 1}}{h_2} + \beta_4 u_{iN_2} = \varphi_4(x_i)\,,\; i = \overline{1, N_1 - 1}\,.$$

.

В результате получена СЛАУ, содержащая уравнений $(N_1+1)(N_2+1)-4$ относительно неизвестных $u_{i,j}$ (i=0,1,…,$N_1$ , j=0,1,…,$N_2$ ) при этом угловые узлы с координатами (i,j), равными $(0,0)$, $(0, N_2)$, $(N_1, 0)$, $(N_1, N_2)$ в вычислениях не участвуют). Как и в случае граничных условий первого рода, она имеет пятидиагональный вид и может быть решена, например, итерационным методом Либмана.

Замечание. Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим.

**Задание:**

1. Построить блок-схему решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения по неявной схеме.
2. Построить блок-схему решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности по неявной схеме.
3. Построить блок-схему решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности по явной схеме.

## Лабораторное занятие №5

## Тема: Вариационные и вариационно-разностные методы

***Цель:*** *Метод Ритца. Решение одномерного уравнения Шрёдингера.*

**Упражнение № 1.** Решение одномерного уравнения Шрёдингера. Дискретный спектр собственных значений.

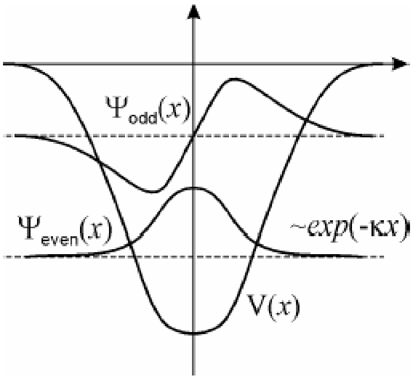



**Рис. 1**

**Цель и задание:** Определить собственные значения и собственные функции гамильтониана $H$ следующего уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x), \tag{1.1}$$

где $m$ – масса частицы, $V(x)$ – произвольный потенциал внешнего поля, $E$ – энергия состояния, $\psi(x)$ - искомая волновая функция.

Для решения уравнения (1.1) необходимо определить граничные условия. Для короткодействующего потенциала можно записать, что

$$\psi(x\to\pm\infty)\to Ce^{\mp\kappa x}, \tag{1.2}$$

где C – некоторая константа, а $\kappa=\sqrt{2m\,|\,E\,|\,/\hbar^2}$ - волновое число.

Волновая функция вблизи нуля может быть четной или нечетной функцией координаты (см. рисунок 1). При $x\to 0$ волновая функция для собственных состояний должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned}\psi_{odd}(x\to 0)&\to 0, & \psi'_{odd}(x\to 0)&\to const,\\ \psi_{even}(x\to 0)&\to const, & \psi'_{even}(x\to 0)&\to 0.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Таким образом, собственные значения гамильтониана могут быть найдены интегрированием уравнения Шредингера «вперед» (стартуя из точки $x\to 0$) и «назад» (стартуя из точки $x\to X_{\max}\to\infty$) с последующим требованием равенства логарифмических производных этих решений в точке сшивки $X_{match}$. Величины $X_{\max}$ и $X_{match}$ подбираются из «физических соображений».

1. Реализовать предложенную схему решения уравнения Шредингера, используя метод Нумерова для численного решения (см. ниже).
2. Обосновать выбор величин $X_{\max}$ и $X_{match}$.
3. Проверить работоспособность кода для точно решаемого гамильтониана.
4. Проверить свойство ортогональности полученных решений.
5. Результаты работы оформить в виде краткого отчета (1-2 стр.).

<u>Способ решения № 1.</u> Методом Нумерова применяется для решения дифференциальных уравнений вида

$$y''(x)=F(x,y). \tag{1.4}$$

Для этого используется следующая разностная схема

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=\frac{h^2}{12}\left(F_{n+1}+10F_n+F_{n-1}\right),$$

где $y_i=y(x_i)$ и $F_i=F(x_i,y(x_i))$, величина $h$ - шаг разностной схемы.

**Лабораторное занятие №6**
**Тема: Численные методы решения интегральных уравнений**

*Цель: Научиться решать методом Монте-Карло.*

### Метод Монте-Карло

Рассматривание задачи в условиях неопределённости.

Неопределённость была стохастической. Строим математическую модель. Эта математическая модель является аналитической. В рассматриваемых задачах требовалось, чтобы рассматриваемые процессы были марковскими. На практике это не всегда выполняется.

В случаях, когда аналитические модели не приемлемы, строят статистические модели. Рассматривают метод статистического моделирования.

Статистические модели можно назвать имитационными. Они моделируют случайный процесс при помощи ПК.

Метод Монте-Карло является методом статистического моделирования.

*Метод Монте-Карло* - это численный метод решения задач при помощи моделирования случайных величин.

### Происхождение метода Монте-Карло

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1948г. создателями метода считают математиков Дж. Неймана и С. Улама.

Теоретическая основа метода была известна давно. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти широкого применения.

Само название метода происходит от названия города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка. Возникает вопрос: помогает ли метод Монте-Карло выигрывать в рулетку? Нет не помогает. И даже не занимается этим.

### Идея метода

Идея метода чрезвычайно проста и состоит в следующем.

Вместо того, чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, проводится розыгрыш случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в себя случайность и дающей случайный результат. Реализация случайного процесса каждый раз складывается по-разному, т.е. мы получаем различные исходы рассматриваемого процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки можно получить: вероятность события, математическое ожидание и т. д.

Метод Монте-Карло может быть решима любая вероятностная задача, но оправданным он является тогда, когда процедура разыграна проще, а не сложнее аналитического расчета.

### Пример

По цели производится 3 независимых выстрела, из которых каждый попадает в цель с вероятностью 1/2. Требуется найти вероятность хотя бы одного попадания.

$P(k >= 1) = P(1)+P(2)+P(3) = 1-P(k < 1)$

$P(0) = 1/2*1/2*1/2 = 1/8$

$P(k >= 1) = 1-1/8 = 7/8$

**Эту задачу можно решить розыгрышем - статистическим моделированием.** Вместо 3 выстрелов будем бросать 3 монеты, считая, что герб - попадание, решка - промах. Опыт считается удачным, если на одной из монет выпадет герб. Проведем множество опытов, подсчитаем общее количество удач и разделим на число - N (количество проведённых опытов). Таким образом, они получили частоту события, а она при большом числе опытов близка к вероятности.

Метод Монте-Карло применяется: при моделировании случайных процессов, где присутствует множество случайных факторов.

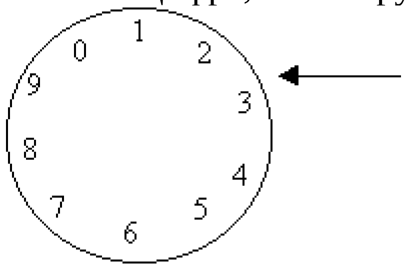
**Получение случайных величин**

**Таблица случайных чисел.**

Выбирается случайная величина, распределенная по следующему закону:

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

Монтируется диск (рулетка). Диск вращается и резко останавливается, и выбирается та цифра, на которую указывает неподвижная стрелка.




Ряд цифр 20389320...

Составляется таблица случайных чисел, выбирается определённое их количество (400).

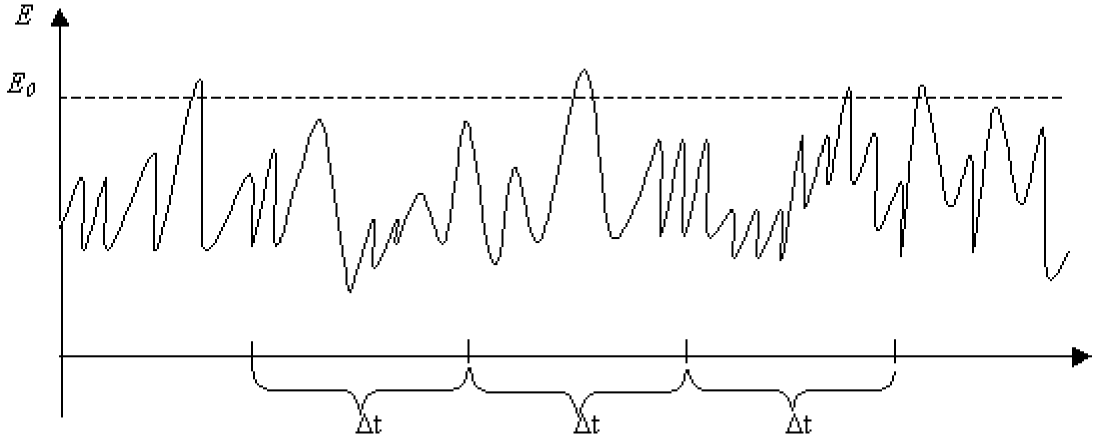
Составит хорошую таблицу случайных чисел не так-то просто: любой реальный физический прибор вырабатывает случайные величины с распределением, несколько отличающимся от реального распределения.

**Генераторы случайных чисел**

Любой механический прибор будет слишком медленным для ЭВМ. Поэтому в качестве генераторов случайных чисел чаще всего используют шумы в электронных лампах (рис.8): если за некоторый промежуток времени уровень шума превысил заданный порог чётное число раз, то записывается единица *).

На первый взгляд это очень удобный способ. Пусть m таких генераторов работают параллельно, работают всё время и засылают случайные нули и единицы во все двоичные разряды специальной ячейки. Каждый такт - одно m-разрядное число. В любой момент счёта можно обратиться к этой ячейке и взять оттуда значение случайной величины, равномерно распределённой в интервале

(0,1). Конечно, это значение приближенное, записанное в форме m-разрядной двоичное дроби




0,a1,a2,...am, где каждая из величин ai имитирует случайную величину с распределением:

| 0 | 1 |
|---|---|
| 1/2 | 1/2 |

Однако и этот метод не свободен от недостатков. Во-первых, трудно проверить "качество" вырабатываемых чисел. Проверки приходится делать периодически, так как из-за каких-либо неисправностей может возникнуть так называемый дрейф распределения (т.е. нули и единицы в каком-либо из разрядов станут появляться не одинаково часто). Во-вторых, обычно все расчёты на ЭВМ проводят дважды, чтобы исключить возможность случайного сбоя. Но воспроизвести те же случайные числа невозможно, если их по ходу счёта не запоминать. А если их запоминать, то мы снова приходим к случаю таблиц.

Датчики такого типа, несомненно, окажутся полезными тогда, когда будут производиться специализированные ЭВМ для решения задач методом Монте-Карло. А для универсальных ЭВМ, на которых расчёты с помощью случайных чисел проводятся лишь изредка, содержать и эксплуатировать специальное устройство просто неэкономично. Лучше использовать так называемые псевдослучайные числа.

**Задания:**

1. Суть метода Монте-Карло.
2. Компьютерная реализация метода.

## 5. Список литературы

*Основная:*

1 .Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.Э. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. Том 1, изд. 2-е, стереотипное, М.,1975.
4. Ермаков СМ., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. Изд. 2-е. М.: Наука, 1982.
5. Соболь И.М.. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.

6. Соболь И.М.. Метод Монте-Карло. М.: Наука,   1985.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.:Наука, 1989.
9. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука. 1986.
10. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. 1. М.: Наука, 1976, Т. 2. М.: Наука, 1977.
11.Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
12.Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы, введение в теорию. М: Наука, 1977.
13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980 – 520 с. с илл.
14. Габассов Р. Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – Минск: Наука и техника, 1974.
15. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1977

*Дополнительная:*

1.Шакенов К.К. Методы Монте-Карло и их приложения. Алматы: КазГУ,1993.
2. Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. М.: Наука, 1980.
3.Копченова Н.В., Марон И.А., Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972.
4.Черкасова М.П. Сборник задач по численным методам. Минск: Высшая школа, 1967.
5.ВазовВ., Дж.Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1963.
6.Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Наука, 1975.
7.Митчел Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
8.Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1983.
9.Михлин С.Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: ЛГУ, 1988.
10.Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1970.