

## Методические указания для выполнения заданий для самостоятельного изучения учебного материала дисциплины Математика

Типовые задания для СРС 3 состоят из следующих частей: неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы, приложения определенного интеграла. Типовые задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса и содержит теоретические вопросы для подготовки к рубежному контролю.

Типовые задания для самостоятельной работы выполняются студентом в соответствии с первой буквой фамилии студента и последней цифрой номера по списку преподавателя по схеме из таблицы 1. Типовые задания выполняются в сроки, запланированные преподавателем в рабочей программе.

Контроль за выполнением проводится в два этапа:

- 1) предварительная проверка правильности письменного решения заданий;
- 2) защита заданий, заключающегося в объяснении решения задач и ответа на два теоретических вопроса из программного материала.

### 1 Интегральное исчисление функции одной переменной. Приложения определенных интегралов.

#### 1.1 Методическое указание к заданию 1

Функция  $F(x)$  называется первообразной для  $f(x)$  на некотором множестве  $M$ , если выполняется тождество  $F'(x) = f(x), \forall x \in M$ .

Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом и обозначается символом  $\int f(x)dx$

#### 1 Основные свойства неопределенного интеграла и правила

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx \quad k, k - \text{const} \quad (2.1)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (2.2)$$

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \quad \text{или} \quad d(\int f(x)) = f(x)dx \quad (2.3)$$

$$\int dF(x)dx = F(x) + C \quad (2.4)$$

Следствие:

- 1) Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$  или

$$\int f(u)du = F(u) + C, \text{ где } u = \varphi(x) \quad (2.5)$$

- 2)  $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ , где  $a, b = \text{const}$  (2.6)

## 2 Таблица основных интегралов

$$1 \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \quad 2 \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$3 \int du = u + C$$

$$4 \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$5 \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$6 \int \cos u du = \sin u + C$$

$$7 \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$8 \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$$

$$9 \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$10 \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$11 \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C$$

$$12 \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + C$$

$$13 \int e^u du = e^u + C$$

$$14 \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C_0, \quad a \neq 0$$

$$15 \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{u}{a} + C_0, \quad a > 0$$

$$16 \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad a \neq 0$$

**Пример 1** Найти  $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx$

**Решение** Используя правила непосредственного интегрирования 1,2 и таблицу основных интегралов, получим

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5) dx = \int x^5 dx - 3 \int x^4 dx - 7 \int x dx + 5 \int dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - 3\frac{1}{5}x^5 - 7\frac{1}{2}x^2 + 5x + C = \frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + 5x + C$$

### Метод подстановки или замены переменной в неопределенном интеграле

Полагая  $x = \varphi(t)$ , где  $t$  новая переменная и  $\varphi(t)$  - непрерывно дифференцируемая функция, будем иметь

(2.7)

**Пример 2** Найти  $\int x\sqrt{x-1} dx$

**Решение**

$$= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 2 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$$

Во многих случаях оказывается более удобным использование преобразования дифференциалов; т.е. метод подведения функции под знак дифференциала:

1)  $2x dx = d(x^2)$ ,

2)  $k dx = d(kx + C)$ ,

3)  $dx = d(x + C)$

4)  $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$ ,

5)  $\cos x dx = d(\sin x)$ ,

6)  $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$

7)  $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$ ,

8)  $k \cdot e^{kx} dx = d(e^{kx})$

**Пример 3**  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$

**Решение**  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+5}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+5)}{\sqrt{3x+5}} = \frac{1}{3} \int (3x+5)^{-\frac{1}{2}} d(3x+5) =$

$$= \frac{1}{3} \cdot (3x+5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+5} + C$$

**Интегрирование по частям.**  $\int u dv = u \cdot v - \int v du$  - (2.8)

формула интегрирования по частям.

**Пример 4** Найти  $\int x \cdot e^x dx$

**Решение**  $\int x \cdot e^x dx =$

$$\left| \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

Укажем несколько типов интегралов, которые удобно вычислять интегрированием по частям

$$\left. \begin{array}{l} \int P(x) \cdot e^{kx} dx \\ \int P(x) \cdot \sin kx dx \\ \int P(x) \cdot \cos kx dx \end{array} \right| \begin{array}{l} P(x) = u \\ e^{kx} = dv \\ \sin kx dx = dv \\ \cos kx dx = dv \end{array} \right\} \text{, где } P(x) \text{ - полином;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \int P(x) \cdot \ln x dx \\ \int P(x) \cdot \arctg x dx \\ \int P(x) \cdot \arccos kx dx \end{array} \right| \begin{array}{l} u = \ln x \\ u = \arctg x \\ u = \arccos x \end{array} \right\} \text{, где } dv \text{-выражение } P(x) dx$$

### Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$P_i(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}, \quad (2.9)$$

где  $a_i, b_j$  - действительные числа,  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$

Если  $m < n$ , то рациональная дробь называется правильной, если  $m \geq n$ , то рациональная дробь называется неправильной.

Неправильную дробь можно представить, разделив числитель на знаменатель, в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{f(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } M(x) - \text{некоторый многочлен, а дробь } \frac{f(x)}{Q_m(x)} - \text{правильная}$$

**Пример 5**

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Всякая правильная дробь может быть разложена на сумму простейших дробей, вид которых зависит от типов множителей, входящих в разложение знаменателя

Если

$$Q_m(x) = b_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_k$  действительные числа, то дробь  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{f(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \\ + \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \dots + \frac{B_{\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots \end{aligned}$$

где  $A_i, B_j, M_k, N_l$  - действительные числа, подлежащие определению.

**Пример 6** Найти  $\int \frac{x+2}{x^2+3x} dx$

**Решение**  $\int \frac{x+2}{x^2+3x} dx = \int \frac{x+2}{x(x+3)} dx$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$\frac{x+2}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow x+2 = A(x+3) + Bx$$

Это равенство является тождеством, коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  слева и справа равны между собой

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 3A = 2 \\ x & A + B = 1 \end{array} \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x(x+3)} dx &= \int \left[ \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \right] dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+3} = \frac{2}{3} \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|x+3| + C = \\ &= \ln \left| x^{\frac{2}{3}} \right| + \ln \left| (x+3)^{\frac{1}{3}} \right| + C = \ln \sqrt[3]{x^2} + \ln \sqrt[3]{x+3} + C = \ln \sqrt[3]{x^2(x+3)} + C \end{aligned}$$

**Пример 7** Найти  $\int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}$

**Решение** Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

Полагая  $x=1$ , получим  $1=2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Полагая  $x=0$ , получим  $0=A-C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Приравнивая коэффициенты при  $x^2$ , получим  $0=A+B, B = -\frac{1}{2}$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

### Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  с помощью универсальной подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (2.10)$$

Приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной  $t$ .

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R \left[ \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right] \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

**Пример 8** Найти  $\int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}$

**Решение** Полагая  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  будем иметь

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{8-4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 7 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} = 2 \int \frac{dt}{(t-4)^2 - 1} =$$

$$\left| \begin{array}{l} t-4=z \\ dt=dz \end{array} \right| = 2 \int \frac{dz}{z^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \ln \left| \frac{t-4-1}{t-4+1} \right| + C =$$

$$\ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C$$

**Частные подстановки:**

1)  $\int R(\cos x) \cdot \sin x dx$ . Подстановка  $\cos x = t, \sin x dx = -dt$

**Пример 9**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^3} &= \int \frac{-dt}{(1-t)^3} = \int \frac{d(1-t)}{(1-t)^3} = \int (1-t)^{-3} d(1-t) = \\ &= \frac{(1-t)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(1-t)^2} + C = -\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C \end{aligned}$$

2)  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . Подстановка  $\sin x = t, \cos x dx = dt$

**Пример 10**

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} &= \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5} = \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 4} \left| \begin{array}{l} t-3=z \\ dt=dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{z^2 - 4} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-5}{t-1} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 5}{\sin x - 1} \right| + C \end{aligned}$$

3)  $\int \sin^p x \cdot \cos^q x dx$

а) если  $p$  нечетное положительное число ( $p = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$ ), то

$$\begin{aligned} \int \sin^{2m+1} x \cdot \cos^q x dx &= \int \sin^{2m} x \cdot \cos^q x \cdot \sin x dx = \\ &= - \int (1 - \cos^2 x)^m \cos^q x d(\cos x) = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ d(\cos x) = -dt \end{array} \right| = - \int (1 - t^2)^m t^q dt \end{aligned}$$

б) если  $q$  нечетное положительное число ( $q = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ ), то

$$\begin{aligned} \int \sin^p x \cdot \cos^{2n+1} x dx &= \int \sin^p x \cdot \cos^{2n} x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^p x (1 - \sin^2 x)^n d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ d(\sin x) = dt \end{array} \right| = \int t^p (1 - t^2)^n dt \end{aligned}$$

в) если  $p$  и  $q$  четные положительные числа, то степени могут быть снижены вдвое, с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

4) Интегралы  $\int \sin mx \cdot \cos nxdx$ ,  $\int \sin mx \cdot \sin nxdx$ ,  $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$  вычисляются с помощью формул

$$\int \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nxdx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$

**Пример 11** Найти  $\int \cos \frac{2x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3} dx$

$$\int \cos \frac{2x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3} dx = \left| \begin{array}{l} m = \frac{1}{3} \quad m+n=1 \\ n = \frac{2}{3} \quad m-n = -\frac{1}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int (\sin x + \sin \frac{x}{3}) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin x dx - \frac{1}{2} \int \sin \frac{x}{3} dx = -\frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \cos \frac{x}{3} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \cos \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cos x + C$$

### Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

Интегралы вида  $\int R(x) \cdot \frac{ax+b}{cx+d} \cdot \frac{ax+b}{cx+d} \cdot \dots dx$ ,

где  $R$  - рациональная функция,  $p_i, q_i$  - целые числа. Интегралы такого типа находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

где  $n$  - наименьшее общее кратное чисел  $q_1, q_2, q_3 \dots$

**Пример 12** Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

**Решение**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| =$



$$= \int \frac{2t dt}{t+t^3} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$$

**Пример 13** Найти  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$

**Решение**  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$

$$= 4 \int \left( t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \cdot \frac{t^5}{5} - 4 \cdot \frac{t^4}{4} + 4 \cdot \frac{t^3}{3} -$$

$$- 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 4 \cdot t - 4 \ln|t+1| + C = \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} -$$

$$- 4 \ln|1+\sqrt[4]{x}| + C$$

## 1.2 Методические указания к заданиям 2,3,4

При выполнении заданий **2, 3, 4** данного типового расчета для составления уравнений сторон фигур используются уравнения кривых второго порядка и уравнения прямой на плоскости:

1)  $x^2 + y^2 = R^2$  – уравнение окружности с центром в точке  $A(0,0)$ ,  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$  – уравнение окружности с центром в точке  $A(x_0, y_0)$ .

2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  либо  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  – канонические уравнения эллипса.

3)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  либо  $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  – канонические уравнения гиперболы.  $A(x_0, y_0)$

### 4) Виды уравнения парабол:

1)  $y^2 = 2px, p > 0$  либо  $y^2 = -2px, p > 0$

2)  $x^2 = 2qy, q > 0$  либо  $x^2 = -2qy, q > 0$

если вершина параболы в точке  $A(x_0, y_0)$

Для удобства вычислений систему координат проводим через фигуру  $\Phi$  произвольным образом так, чтобы координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$  совпали с основанием фигуры либо с осями вращения тела.

### 1.2.1 Методическое указание к заданию 2

Для вычисления площади в декартовой системе координат используются следующие формулы:

1) Пусть фигура  $\Phi$  ограничена сверху кривой  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и основанием  $[a, b]$  на  $Ox$ .

$$S_{\phi} = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.11)$$

2) Если фигура  $\Phi$  ограничена двумя линиями  $y = f(x)$ ,  $y = \varphi(x)$ ,  $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ , для  $\forall x \in [a, b]$ , тогда

$$S_{\phi} = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx. \quad (2.12)$$

3) В полярной системе координат фигура  $\Phi$  ограничена кривой  $r = f(\varphi)$  и лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  т.е.  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ , тогда

$$S_{\phi} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi; \quad (2.13)$$

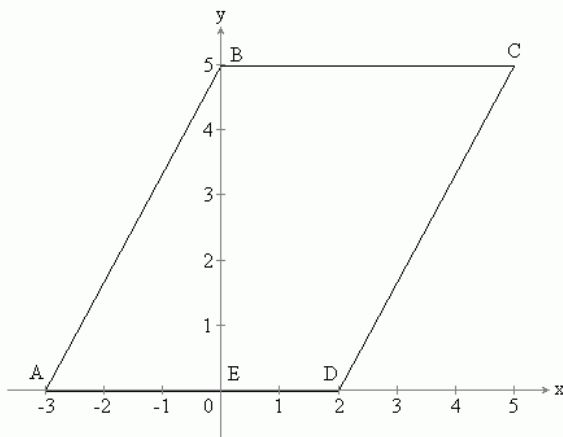
если  $\Phi = \left\{ \begin{array}{l} r_1 = f_1(\varphi) \\ r_2 = f_2(\varphi) \end{array} \right.$ , где  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$   $\Rightarrow$

$$S_{\phi} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2 - r_1^2] d\varphi; \quad (2.14)$$

4) Пусть  $\Phi$  ограниченная линией, заданной уравнением в параметрической форме  $\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right.$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  тогда

$$S_{\phi} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt; \quad (2.15)$$

**Пример 14** Вычислить площадь фигуры  $\Pi_2$ , где  $\Pi_2$  – часть параллелограмма  $\Pi - ABCD$ , у которого известны параметры  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $h = 5$ . Проводим декартовую систему произвольным образом, в частности  $Ox$  по основанию фигуры,  $Oy$  по границе фигур  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .



## Рисунок 1

Составляем уравнения сторон данной фигуры, используя каноническое уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2.16)$$

Либо уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \quad (2.17)$$

где  $k = \operatorname{tg} \alpha$  – угловой коэффициент прямой.

Тогда уравнение стороны  $AD$ :  $y = 0$ , уравнение стороны  $BC$ :  $y = 5$ . Для нахождения уравнения стороны  $DC$  подставляем точку  $C(5;5)$  в уравнение (2.7), где  $k = \frac{5}{3}$ ,  $\Rightarrow 5 = \frac{5}{3} \cdot 5 + b \Rightarrow b = -\frac{10}{3}$ , следовательно  $DC$ :  $y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} S_{\Pi_2} &= S_{\text{ОВСК}} - S_{\text{ДСК}} = \int_0^5 5 dx - \int_2^5 \left( \frac{5}{3}x - \frac{10}{3} \right) dx = \\ &= 25 - \left[ \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{3}x \right]_2^5 = \frac{140}{3} \approx 46,7 \text{ ед}^2. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Методическое указание к заданию 3

#### Площадь поверхности вращения.

1) Если дуга  $\overset{\cup}{AB}$  кривой  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  вращается вокруг оси  $Ox$ , то площадь поверхности фигуры  $\Phi$ , образованной вращением, вычисляется по формуле

$$S_{ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2.18)$$

2) Если дуга  $\overset{\cup}{AB}$  вращается вокруг  $Oy$ , то уравнение кривой  $\overset{\cup}{AB}$  имеет вид  $x = \varphi(y)$ , где  $c \leq y \leq d \Rightarrow$

$$S_{oy} = 2\pi \int_c^d \varphi(y) \cdot \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy. \quad (2.19)$$

3) Если кривая  $\overset{\cup}{AB}$  задана в параметрической форме  $\overset{\cup}{AB}$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$$

$$S_{\text{нов}} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2} dt. \quad (2.20)$$

**Пример 15** Вычислить площадь поверхности тела, которая получится в результате вращения фигуры  $\Phi$  вокруг оси  $L$ .  $\Phi = P_1 = ABCA$ , где  $ABCA$  – половина ромба,  $L = OB$ ,  $d_1 = AC = 10$ ,  $d_2 = BD = 6$ .

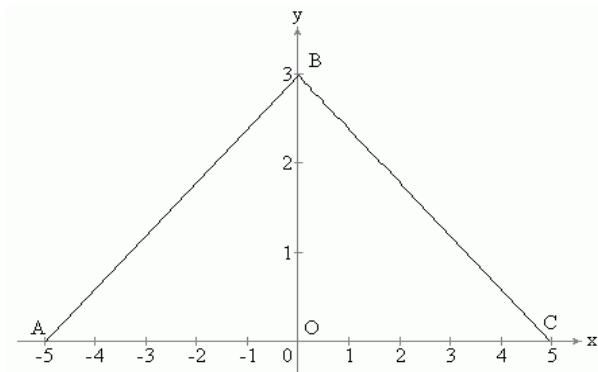


Рисунок 2

**Решение** Проводим систему координат  $Oxy$  так, чтобы ось  $Oy$  совпала с осью вращения  $L$ . Тогда, для вычисления площади поверхности пользуемся формулой (2.19).

Составим уравнение прямой  $BC$

$$B(0,3), C(5,0). BC: \frac{x-0}{5-0} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x}{5} = -\frac{y-3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}(y-3); x = 5 - \frac{5}{3}y; y \in [0,3], x'_y = -\frac{5}{3}.$$

$$S_{\text{пов}\Phi} = 2\pi \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{3}y\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{9}} dy = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{34}}{3} \left[ y - \frac{y^2}{6} \right]_0^3 =$$

$$= \frac{10\sqrt{34}\pi}{3} \left[ 3 - \frac{3}{2} \right] = \frac{10\sqrt{34}\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = 5\sqrt{34}\pi \text{ ед}^2.$$

**Замечание.** Можно также поступить следующим образом. Совместить ось вращения с осью  $Ox$ , тогда фигура  $\Phi$  поворачивается на  $90^\circ$  и прямая  $AB$  выражается в виде  $y = f(x) \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + 3$ . В этом случае пользуемся формулой (2.18).

### 1.2.3 Методическое указание к заданию 4

Для вычисления объема тела вращения пользуемся следующими формулами:

1) Если  $\overline{AB}$ :  $y = f(x)$  вращается вокруг  $Ox$ ,  $x \in [a,b] \Rightarrow$

$$V = \pi \int_a^b |f(x)|^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (2.21)$$

2)  $x = \varphi(y)$  вращается вокруг  $Oy$ ,  $y = [c, d] \Rightarrow$

$$V = \pi \int_c^d |\varphi(y)|^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (2.22)$$

**Пример 16** Вычислить объем  $V$  тела вращения части  $\Phi_2$  – эллиптического сегмента  $\Phi$  вокруг оси  $L$ . Даны следующие параметры:  $a = 5$ ,  $\varepsilon = 0,8$ . Ось  $L = OB$ . Проводим декартовую систему координат, совмещая ось вращения  $L$  с  $Ox$ . Эллиптический сегмент  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ ,  $V_{\Phi_2} = V_{\Phi} - V_{\Phi_1}$ . Составим уравнения дуги  $BC$  эллипса и уравнение прямой  $FC$ . Для этого найдем малую полуось  $b$  и фокальную полуось  $c$ .

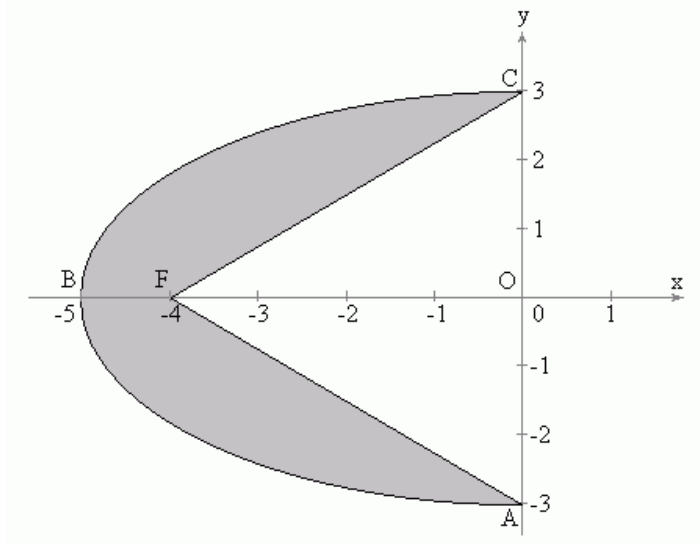


Рисунок 3

$BO = a = 5$ ,  $F(-c, 0)$  фокус  $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = 0,8 \cdot 5 = 4$ ,  $\Rightarrow F(-4, 0)$   $b^2 = a^2 - c^2 = 9$ ,  $\Rightarrow b = 3$ . Следовательно,  $C(0, 3)$ .

Уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow$  дуга  $BC$ :  $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ ; где  $x \in [-5, 0]$   $FC$ :  $y = kx + b$ ,  $k = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ . Подставим точку  $C(0, 3)$  в уравнение  $FC \Rightarrow b = 3$  следовательно  $FC$   $y = \frac{3}{4}x + 3$ ;  $x \in [-4, 0]$ .

Найдем:

$$V_{\Phi} = \pi \int_{-5}^0 y^2 dx = \frac{9\pi}{25} \int_{-5}^0 (25 - x^2) dx = \frac{9\pi}{25} \left[ 25x - \frac{x^3}{3} \right]_{-5}^0 = 30\pi \text{ ед}^3.$$

$$\begin{aligned} V_{\Phi_1} &= \pi \int_{-4}^0 \left( \frac{3}{4}x + 3 \right)^2 dx = 9\pi \int_{-4}^0 \left( \frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 1 \right) dx = 9\pi \left[ \frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{4} + x \right]_{-4}^0 = \\ &= 9\pi \left[ \frac{16 \cdot 4}{48} - 4 + 4 \right] = 12\pi \text{ ед}^3. \end{aligned}$$

Тогда  $V_{\Phi_2} = V_{\Phi} - V_{\Phi_1} = 18\pi \text{ ед}^3$ .

**Пример 17** Вычислить объем тела вращения параболического сегмента  $Q = AOB$  вокруг оси  $L$ .

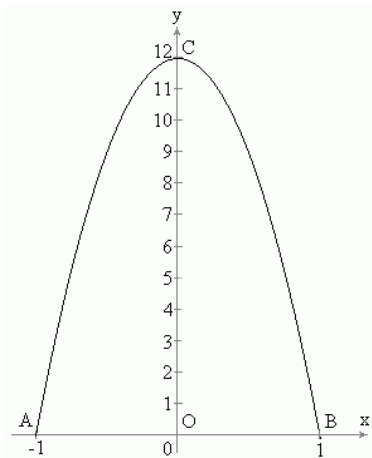


Рисунок 4

Дано:  $L = OC$ ,  $OC = h = 12$ ,  $AB = 2$ ,  $AO = 1$ . Найти:  $V_{\Phi} = ?$

Используем уравнение нисходящей параболы с вершиной в  $C(0,12)$ :  $x^2 = -(y - 12) \cdot 2q$  (\*).

Подставим точку  $A(-1,0)$  в уравнение (\*)  $\Rightarrow 1 = 24q \Rightarrow q = \frac{1}{24} \Rightarrow$  уравнение дуги параболы

$OB$ :  $x^2 = 1 - \frac{y}{12}$ ;  $y \in [0, 12]$ . Используем уравнение (2.22)

$$V_{\Phi} = \pi \int_0^{12} x^2 dy = \pi \int_0^{12} \left(1 - \frac{y}{12}\right) dy = \pi \left[ y - \frac{y^2}{24} \right]_0^{12} = \pi(12 - 6) = 6\pi \text{ ед}^3.$$

### 1.3 Методическое указание к заданию 5

#### Длина дуги кривой

Если плоская кривая дана в прямоугольной системе координат и задана уравнением

$y = f(x)$  или  $x = \varphi(y)$  или параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , то дифференциал  $dl$  длины

ее дуги выражается формулой

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + (x')^2} dy = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt \quad (2.23)$$

а длина дуги  $AB$  определяется формулой

$$L_{AB} = \int_A^B dl = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2} dy = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt \quad (2.24)$$

$$x_A < x_B, y_A < y_B, t_A < t_B$$

Если кривая задана в полярной системе координат  $\rho = \rho(\varphi)$ , то длина дуги  $L_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \varphi_A < \varphi_B$  (2.25)

**Пример 18** Вычислить длину дуги полукубической параболы  $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$  от  $x_1=0$  до  $x_2=2$ ,  $y>0$ .

**Решение** Так как  $y = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ , то  $y' = 2\sqrt{x}$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 \sqrt{1 + 4x} (4x + 1) dx = \frac{1}{4} \left. \frac{(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^2 = \frac{1}{6} (27 - 1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

**Пример 19** Вычислить длину дуги астроиды

$$\begin{cases} x = R \cos^3 t, \\ y = R \sin^3 t. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

**Решение**  $x' = -3R \cos^2 t \cdot \sin t$   
 $y' = 3R \sin^2 t \cdot \cos t$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9R^2 \cos^4 t + \sin^2 t + 9R^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3R \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t dt = \frac{3}{2} R \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -\frac{3R}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} R \end{aligned}$$

**Пример 20** Найти длину кардиоиды  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$

**Решение**  $\rho' = -2 \sin \varphi$ . Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Изменяя полярный угол  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ , мы получим половину длины кардиоиды.

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{4(1 + \cos \varphi)^2 + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8 \end{aligned}$$

Вся длина кардиоиды  $L=16$ (ед.длины).



## 1.4 Методическое указание к заданию 6

Приближенное значение определенного интеграла можно найти по формуле Симпсона

$$\int f(x)dx = \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}))$$

де  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$ - четное число. Погрешность этой формулы

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} \cdot (b-a) \cdot M_4, \text{ где } M_4 = \sup_x |f^4(x)|$$

**Пример 21** Вычислить  $\int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 26} dx$  с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака. При выполнении работы рекомендуется использовать микрокалькуляторы.

$i$	$x_i$	$\sqrt{x_i^3 + 26}$	$y_i$
0	-1	$\sqrt{-1 + 26}$	$\sqrt{25} = 5,0000$
1	0	$\sqrt{0 + 26}$	$\sqrt{26} = 5,0990$
2	1	$\sqrt{1 + 26}$	$\sqrt{27} = 5,1962$
3	2	$\sqrt{8 + 26}$	$\sqrt{34} = 5,8309$
4	3	$\sqrt{27 + 26}$	$\sqrt{53} = 7,2801$
5	4	$\sqrt{64 + 26}$	$\sqrt{90} = 9,4868$
6	5	$\sqrt{125 + 26}$	$\sqrt{151} = 12,2882$
7	6	$\sqrt{216 + 26}$	$\sqrt{242} = 15,5563$
8	7	$\sqrt{343 + 26}$	$\sqrt{369} = 19,2094$
9	8	$\sqrt{512 + 26}$	$\sqrt{538} = 23,1948$
10	9	$\sqrt{729 + 26}$	$\sqrt{755} = 27,4773$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^9 \sqrt{x^3 + 26} dx &\approx \frac{1}{3}((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_8)) = \\ &= \frac{1}{3}(32,4773 + 326,6712 + 87,9478) = 119,0321 \end{aligned}$$

## 1.5 Методическое указание к заданию 7

### Несобственные интегралы

В несобственных интегралах областью интегрирования является бесконечный сегмент, например  $[a; +\infty)$ ,  $(-\infty; b]$  или бесконечный интервал  $(-\infty; +\infty)$ .

При вычислении такого вида интегралов, мы ограничиваем бесконечный интервал, некоторой конечной постоянной  $\beta$ , несобственный интеграл становится определенным. Вычислив его, в конце переходим к пределу, т.е.  $\beta \rightarrow \pm\infty$  в зависимости от примера.

**Пример 22** 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} x^{-2} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{\beta} + 1 \right] = 1$$

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$  непрерывную на  $a \leq x < +\infty$ . Для любого конечного сегмента  $[a; b]$  интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  существует. Если этот интеграл стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании  $b$ , то этот предел называют несобственным с бесконечной верхней границей от функции  $f(x)$  и обозначается  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Аналогично 
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x) dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$
 где  $c$  - любая фиксированная точка. Если при вычислении интеграла его значение существует и конечно, то говорят несобственный интеграл - сходится, в противном случае - расходится.

**Пример 23** Исследовать на сходимость интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ( $\alpha > 0$ ). Если  $\alpha > 1$ , то

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} x^{-\alpha} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{\beta} = \frac{1}{1-\alpha} (\beta^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{1-\alpha} (0 - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Если  $\alpha = 1$ , то 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{dx}{x} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\ln x) \Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \beta = \infty$$

Если  $\alpha < 1$ , то 
$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (\beta^{1-\alpha} - 1) = +\infty$$

Таким образом 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \text{при } \alpha > 1, \text{ сходится} \\ \text{при } \alpha \leq 1, \text{ расходится} \end{cases}$$

**Пример 24** 
$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_{\alpha}^0 = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (\arctg 0 - \arctg \alpha) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

**Пример 25** Исследовать на сходимость 
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$$
.

При  $x=4$  подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

$$\lim_{\beta \rightarrow 4-0} (\ln|\beta - 4| - \ln| - 3|) = \ln 0 - \ln 3 = -\infty$$

Составитель ст. преподаватель \_\_\_\_\_ Шоманова Р.Е.

Утвержден на заседании кафедры «\_\_\_» «\_\_\_\_\_» 2010г.

Протокол № \_\_\_

Заведующий кафедрой: Павлюк И.И. \_\_\_\_\_