Методические указания для выполнения заданий для самостоятельного изучения учебного материала дисциплины Математика

Типовые задания для СРС 3 состоят из следующих частей: неопределенный интеграл, определенный интеграл, несобственные интегралы, приложения определенного интеграла. Типовые задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса и содержит теоретические вопросы для подготовки к рубежному контролю.

Типовые задания для самостоятельной работы выполняются студентом в соответствии с первой буквой фамилии студента и последней цифрой номера по списку преподавателя по схеме из таблицы 1. Типовые задания выполняются в сроки, запланированные преподавателем в рабочей программе.

Контроль за выполнением проводится в два этапа:

1) предварительная проверка правильности письменного решения заданий;

2) защита заданий, заключающегося в объяснении решения задач и ответа на два теоретических вопроса из программного материала.

1 Интегральное исчисление функции одной переменной. Приложения определенных интегралов.

1.1 Методическое указание к заданию 1

Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на некотором множестве M, если выполняется тождество $F'(x) = f(x), \quad \forall x \in M$.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$

1 Основные свойства неопределенного интеграла и правила

$$\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx \quad \text{л}, \text{ k - const} \qquad (2.1)$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \qquad (2.2)$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{или} \quad d\left(\int f(x)\right) = f(x)dx \qquad (2.3)$$

$$\int dF(x)dx = F(x) + C \qquad (2.4)$$

Следствие:

1) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$ или

$$\int f(u)du = F(u) + C, \text{ где } u = \varphi(x) \qquad (2.5)$$

2) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C,$ где $a, b = const$ (2.6)

2 Таблица основных интегралов

1 $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$ **2** $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$

3 $\int du = u + C$

4 $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$

5 $\int sin\, u du = -cos\, u + C$

6 $\int cos\, u du = sin\, u + C$

7 $\int tgu du = -ln|cos\, u| + C$

8 $\int ctgu du = ln|sin\, u| + C$

9 $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C$

10 $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C$

11 $\int \frac{du}{sin\, u} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$

12 $\int \frac{du}{cos\, u} = ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

13 $\int e^u du = e^u + C$

14 $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C_0, \quad a \neq 0$

15 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C = -arccos\frac{u}{a} + C_0, \quad a > 0$

16 $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

Пример 1 Найти $\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx$

Решение Используя правила непосредственного интегрирования 1,2 и таблицу основных интегралов, получим

$$\int (x^5 - 3x^4 - 7x + 5)dx = \int x^5 dx - 3\int x^4 dx - 7\int x dx + 5\int dx =$$

$$=\frac{1}{6}x^6-3\frac{1}{5}x^5-7\frac{1}{2}x^2+5x+C=\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{5}x^5-\frac{7}{2}x^2+5x+C$$

Метод подстановки или замены переменной в неопределенном интеграле

Полагая $x=\varphi(t)$, где t новая переменная и $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, будем иметь

$$\int f(x)dx=\left|\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix}\right|=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2.7)$$

Пример 2 Найти $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

Решение

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\left|\begin{matrix} \sqrt{x-1}=t \quad x-1=t^2 \\ x=t^2+1 \quad dx=2t\,dt \end{matrix}\right|=\int(t^2+1)t\,2t\,dt=2\int(t^4+t^2)dx=$$

$$=2\cdot\frac{t^5}{5}+2\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$$

Во многих случаях оказывается более удобным использование преобразования дифференциалов; т.е. метод подведения функции под знак дифференциала:

1) $2xdx=d(x^2)$, **2)** $kdx=d(kx+C)$, **3)** $dx=d(x+C)$

4) $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$, **5)** $\cos x dx=d(\sin x)$, **6)** $\frac{dx}{\sin^2 x}=-d(ctgx)$

7) $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx)$, **8)** $k\cdot e^{kx}dx=d(e^{kx})$

Пример 3 $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$

Решение $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+5}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+5)}{\sqrt{3x+5}}=\frac{1}{3}\int(3x+5)^{-\frac{1}{2}}d(3x+5)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot(3x+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 2+C=\frac{2}{3}\sqrt{3x+5}+C$$

Интегрирование по частям. $\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$ - (2.8)

формула интегрирования по частям.

Пример 4 Найти $\int x\cdot e^{x}dx$

Решение $\int x\cdot e^{x}dx=$

$$\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{x}dx & v=e^{x} \end{vmatrix}=x\cdot e^{x}-\int e^{x}dx=x\cdot e^{x}-e^{x}+C=e^{x}(x-1)+C$$

Укажем несколько типов интегралов, которые удобно вычислять интегрированием по частям

$$\left.\begin{array}{l}\int P(x)\cdot e^{kx}dx\\ \int P(x)\cdot\sin kx\,dx\\ \int P(x)\cdot\cos kx\,dx\end{array}\right\}=\left|\begin{array}{l}P(x)=u\\ e^{kx}=dv\\ \sin kx\,dx=dv\\ \cos kx\,dx=dv\end{array}\right|$$, где $P(x)$ - полином;

$$\left.\begin{array}{l}\int P(x)\cdot\ln x\,dx\\ \int P(x)\cdot arctg\,x\,dx\\ \int P(x)\cdot\arccos kx\,dx\end{array}\right\}=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\\ u=arctg\,x\\ u=\arccos x\end{array}\right|$$, где dv-выражение $P(x)dx$

Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$P_i(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+..a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+..a_{m-1}x+a_m}, \qquad (2.9)$$

где a_i, b_j - действительные числа, $a_0\neq 0, b_0\neq 0$, $m, n\in N$

Если $m<n$, то рациональная дробь называется правильной, если $m \geq n$, то рациональная дробь называется неправильной.

Неправильную дробь можно представить, разделив числитель на знаменатель, в виде

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{f(x)}{Q_m(x)}$, где $M(x)$ - некоторый многочлен, а дробь $\frac{f(x)}{Q_m(x)}$ - правильная

Пример 5

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Всякая правильная дробь может быть разложена на сумму простейших дробей, вид которых зависит от типов множителей, входящих в разложение знаменателя

Если

$$Q_m(x) = b_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ действительные числа, то дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{f(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \ldots + \frac{B_{\alpha_2}}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_1x + q_1} +$$

$$+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \ldots$$

где A_i, B_j, M_k, N_l - действительные числа, подлежащие определению.

Пример 6 Найти $\int \frac{x + 2}{x^2 + 3x} dx$

Решение $\int \frac{x + 2}{x^2 + 3x} dx = \int \frac{x + 2}{x(x + 3)} dx$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$\frac{x + 2}{x(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} \Rightarrow \quad x + 2 = A(x + 3) + Bx$$

Это равенство является тождеством, коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа равны между собой

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 3A = 2 \\ x & A + B = 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x + 2}{x(x + 3)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} \right) dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 3} = \frac{2}{3} ln|x| + \frac{1}{3} ln|x + 3| + C =$$

$$= \ln\left|x^{\frac{2}{3}}\right| + \ln\left|(x + 3)^{\frac{1}{3}}\right| + C = \ln\sqrt[3]{x^2} + \ln\sqrt[3]{(x + 3)} + C = \ln\sqrt[3]{x^2(x + 3)} + C$$

Пример 7 Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$

Решение Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

Полагая $x=1,$ получим $1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

Полагая $x=0,$ получим $0=A-C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $0=A+B, B=-\frac{1}{2}$

Таким образом,

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{4}ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arctgx+C$$

Интегрирование тригонометрических функций

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ с помощью универсальной подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t, sinx=\frac{2t}{1+t^2}, cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad (2.10)$$

Приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной t.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

Пример 8 Найти $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

Решение Полагая $tg\frac{x}{2}=t$ будем иметь

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{8-4\cdot \frac{2t}{1+t^2}+7\cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=2\int \frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int \frac{dt}{(t-4)^2-1}=$$

$$\left|\begin{matrix} t-4=z \\ dt=dz \end{matrix}\right|=2\int \frac{dz}{z^2-1}=2\cdot \frac{1}{2\cdot 1}\cdot ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=$$

$$\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$$

Частные подстановки:

1) $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$.Подстановка $\cos x=t,\sin xdx=-dt$

Пример 9

$$\int\frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^3}=\int\frac{-dt}{(1-t)^3}=\int\frac{d(1-t)}{(1-t)^3}=\int(1-t)^{-3}d(1-t)=$$

$$=\frac{(1-t)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(1-t)^2}+C=-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}+C$$

2) $\int R((\sin x),\cos x)dx$. Подстановка $\sin x=t,\cos xdx=dt$

Пример 10

$$\int\frac{\cos xdx}{\sin^2x-6\sin x+5}=\int\frac{dt}{t^2-6t+5}=\int\frac{dt}{(t-3)^2-4}=\left|\begin{matrix}t-3=z\\dt=dz\end{matrix}\right|=\int\frac{dz}{z^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-5}{t-1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-5}{\sin x-1}\right|+C$$

3) $\int\sin^p x\cdot\cos^q xdx$

а) если p нечетное положительное число$(p=2m+1,m\in N)$,то

$$\int\sin^{2m+1}x\cdot\cos^q xdx=\int\sin^{2m}x\cdot\cos^q x\cdot\sin xdx=$$

$$=-\int(1-\cos^2 x)^m\cos^q xd(\cos x)=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\d(\cos x)=dt\end{matrix}\right|=-\int(1-t^2)^m t^p dt$$

б) если q нечетное положительное число$(q=2n+1,n\in N)$,то

$$\int\sin^p x\cdot\cos^{2n+1}xdx=\int\sin^p x\cdot\cos^{2n}x\cdot\cos xdx=$$

$$=\int\sin^p x(1-\sin^2 x)^n d(\sin x)=\left|\begin{matrix}\sin x=t\\d(\sin x)=dt\end{matrix}\right|=\int t^p(1-t^2)^n dt$$

в) если p и q четные положительные числа, то степени могут быть снижены вдвое, с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

4) Интегралы $\int \sin mx \cdot \cos nxdx$, $\int \sin mx \cdot \sin nxdx$, $\int \cos mx \cdot \cos nxdx$ вычисляется с помощью формул

$$\int \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nxdx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$$

Пример 11 Найти $\int \cos\frac{2x}{3} \cdot \sin\frac{x}{3}dx$

$$\int \cos\frac{2x}{3} \cdot \sin\frac{x}{3}dx = \begin{vmatrix} m = \frac{1}{3} & m+n=1 \\ n = \frac{2}{3} & m-n=-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\left(\sin x + \sin\left(-\frac{x}{3}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin xdx - \frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{3}dx = -\frac{\cos x}{2\cos x} - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left(-\cos\frac{x}{3}\right) + C =$$
$$= \frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x + C$$

Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right)dx$,

где R - рациональная функция, p_i, q_i -целые числа. Интегралы такого типа находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

где n - наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, q_3 \ldots$

Пример 12 Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$

Решение $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = \begin{vmatrix} x+1 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{2tdt}{t+t^3} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x+1} + C$$

Пример 13 Найти $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

Решение $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \\ \sqrt{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{1+t} \cdot 4t^3dt = 4\int \frac{t^5dt}{1+t} =$

$$= 4\int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 4 \cdot \frac{t^5}{5} - 4 \cdot \frac{t^4}{4} + 4 \cdot \frac{t^3}{3} -$$

$$- 4 \cdot \frac{t^2}{2} + 4 \cdot t - 4\ln|t+1| + C = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} -$$

$$- 4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right| + C$$

1.2 Методические указания к заданиям 2,3,4

При выполнении заданий **2, 3, 4** данного типового расчета для составления уравнений сторон фигур используются уравнения кривых второго порядка и уравнения прямой на плоскости:

1) $x^2+y^2=R^2$ – уравнение окружности с центром в точке $A(0,0)$, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ – уравнение окружности с центром в точке $A\left(x_0,y_0\right)$.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ либо $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – канонические уравнения эллипса.

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ либо $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – канонические уравнения гиперболы. $A\left(x_0,y_0\right)$

.

4) Виды уравнения парабол:

1) $y^2=2px,\ p>0$ либо $y^2=-2px,\ p>0$

2) $x^2=2qy, q>0$ либо $x^2=-2qy, q>0$

если вершина параболы в точке $A\left(x_0,y_0\right)$

.

Для удобства вычислений систему координат проводим через фигуру Φ произвольным образом так, чтобы координатные оси Ox, Oy совпали с основанием фигуры либо с осями вращения тела.

1.2.1 Методическое указание к заданию 2

Для вычисления площади в декартовой системе координат используются следующие формулы:

1) Пусть фигура Φ ограничена сверху кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и основанием $[a,b]$ на Ox.

$$S_{\phi}=\int_{a}^{b}|f(x)|dx. \qquad (2.11)$$

2) Если фигура Φ ограничена двумя линиями $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $f(x)\geq\varphi(x)\geq 0$, для $\forall x\in[a,b]$, тогда

$$S_{\phi}=\int_{a}^{b}[f(x)-\varphi(x)]dx. \qquad (2.12)$$

3) В полярной системе координат фигура Φ ограничена кривой $r=f(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ т.е. $\alpha\leq\varphi\leq\beta$, тогда

$$S_{\phi}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f^{2}(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^{2}d\varphi; \qquad (2.13)$$

если $\Phi=\begin{Bmatrix} r_1=f_1(\varphi) \\ r_2=f_2(\varphi),\text{ где } \alpha\leq\varphi\leq\beta \end{Bmatrix}\Rightarrow$

$$S_{\Phi}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[r_2^2-r_1^2\right]d\varphi; \qquad (2.14)$$

4) Пусть Φ ограниченная линией, заданной уравнением в параметрической форме $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha\leq t\leq\beta$ тогда

$$S_{\Phi}=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt; \qquad (2.15)$$

Пример 14 Вычислить площадь фигуры Π_2, где Π_2 – часть параллелограмма Π – $ABCD$, у которого известны параметры $a=3$, $b=2$, $h=5$. Проводим декартовую систему произвольным образом, в частности Ox по основанию фигуры, Oy по границе фигур Π_1 и Π_2.

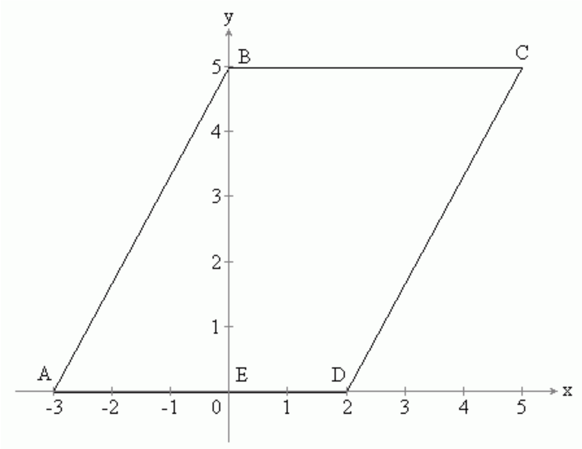

Рисунок 1

Составляем уравнения сторон данной фигуры, используя каноническое уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (2.16)$$

Либо уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \qquad (2.17)$$

где $k=\mathrm{tg}\,\alpha$ – угловой коэффициент прямой.

Тогда уравнение стороны AD: $y=0$, уравнение стороны BC: $y=5$. Для нахождения уравнения стороны DC подставляем точку $C(5;5)$ в уравнение (2.7), где $k=\frac{5}{3},\Rightarrow 5=\frac{5}{3}\cdot 5+b\Rightarrow b=-\frac{10}{3}$, следовательно DC: $y=\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}$

$$S_{П_2}=S_{ОВСК}-S_{ДСК}\int_0^5 5dx-\int_2^5\left(\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}\right)dx=$$

$$=25-\left(\frac{5}{6}x^2-\frac{10}{3}x\right)\Bigg|_2^5=\frac{140}{3}\approx 46{,}7 \text{ ед}^2.$$

1.2.2 Методическое указание к заданию 3

Площадь поверхности вращения.

1) Если дуга $\overset{\smile}{AB}$ кривой $y=f(x), a\le x\le b$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности фигуры Φ, образованной вращением, вычисляется по формуле

$$S_{ox}=2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx. \qquad (2.18)$$

2) Если дуга $\overset{\smile}{AB}$ вращается вокруг Oy, то уравнение кривой $\overset{\smile}{AB}$ имеет вид $x=\varphi(y)$, где $c\le y\le d$ $\Rightarrow$

$$S_{oy}=2\pi\int_c^d \varphi(y)\cdot\sqrt{1+\left[\varphi'(y)\right]^2}dy. \qquad (2.19)$$

3) Если кривая $\overset{\smile}{AB}$ задана в параметрической форме $\overset{\smile}{AB}$

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} t\in[\alpha,\beta] \Rightarrow$$

$$S_{пов}=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}dt. \qquad (2.20)$$

Пример 15 Вычислить площадь поверхности тела, которая получится в результате вращения фигуры *Ф* вокруг оси *L*. $Ф = P_1 = ABCA$, где $ABCA$ – половина ромба, $L = OB$, $d_1 = AC = 10$, $d_2 = BD = 6$.

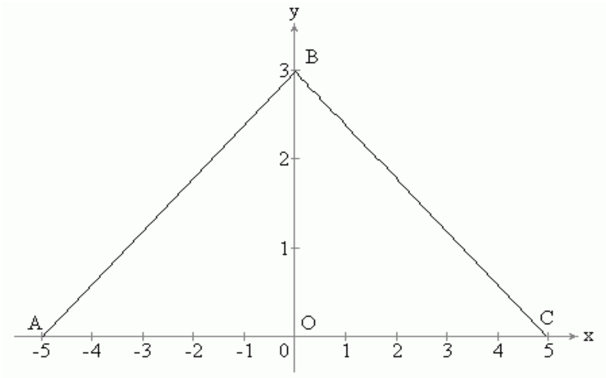

Рисунок2

Решение Проводим систему координат $0xy$ так, чтобы ось $0y$ совпала с осью вращения *L*. Тогда, для вычисления площади поверхности пользуемся формулой (2.19).

Составим уравнение прямой *BC*

$$B(0,3),\ C(5,0).\ BC: \frac{x-0}{5-0} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x}{5} = -\frac{y-3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}(y-3);\ x = 5 - \frac{5}{3}y;\ y \in [0,3],\ x'_y = -\frac{5}{3}.$$

$$S_{повФ} = 2\pi \int_0^3 \left(5 - \frac{5}{3}y\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{9}}dy = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{34}}{3}\left(y - \frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{10\sqrt{34}\pi}{3}\left(3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{10\sqrt{34}\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = 5\sqrt{34}\pi \text{ ед}^2.$$

Замечание. Можно также поступить следующим образом. Совместить ось вращения с осью $0x$, тогда фигура *Ф* поворачивается на 90° и прямая *AB* выражается в виде $y = f(x)$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{3}{5}x + 3$. В этом случае пользуемся формулой (2.18).

1.2.3 Методическое указание к заданию 4

Для вычисления объема тела вращения пользуемся следующими формулами:

1)Если $\overset{\smile}{AB}$: $y = f(x)$ вращается вокруг $0x$, $x \in [a.b]$ $\Rightarrow$

$$V = \pi\int_a^b |f(x)|^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx. \qquad (2.21)$$

2) $x = \varphi(y)$ вращается вокруг $0y$, $y = [c.d] \Rightarrow$

$$V = \pi\int_c^d |\varphi(y)|^2 dy = \pi\int_c^d x^2 dy. \qquad (2.22)$$

Пример 16 Вычислить объем *V* тела вращения части Φ_2 – эллиптического сегмента *Ф* вокруг оси *L*. Даны следующие параметры: $a = 5$, $\varepsilon = 0{,}8$. Ось $L = OB$. Проводим декартовую систему координат, совмещая ось вращения *L* с $0x$. Эллиптический сегмент $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $V_{\Phi_2} = V_\Phi - V_{\Phi_1}$. Составим уравнения дуги $\breve{BC}$ эллипса и уравнение прямой *FC*. Для этого найдем малую полуось *b* и фокальную полуось *c*.

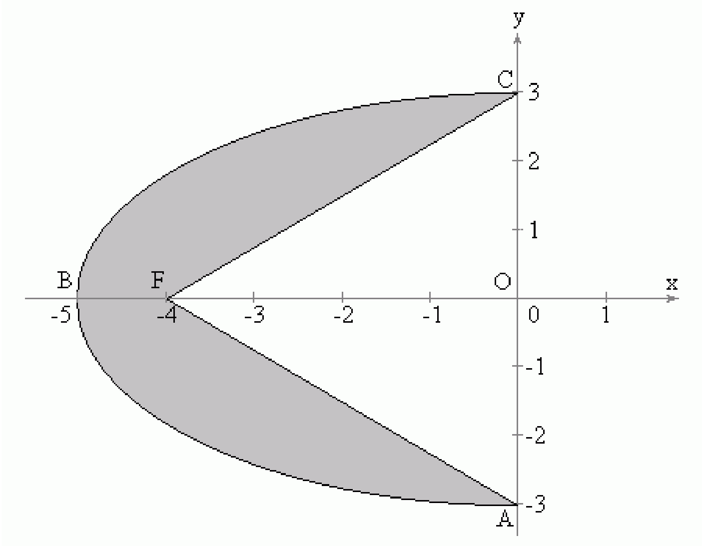

Рисунок 3

$BO = a = 5$, $F(-c,0)$ фокус $\varepsilon = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = \varepsilon \cdot a = 0.8\cdot 5 = 4$, $\Rightarrow F(-4,0)$ $b^2 = a^2 - c^2 = 9$, $\Rightarrow b = 3$. Следовательно, C(0,3).

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow$ дуга $\breve{BC}$: $y = \dfrac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$; где $x \in [-5,0]$ FC: $y = kx + b$, $k = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{4}$. Подставим точку *C*(0,3) в уравнение $FC \Rightarrow b = 3$ следовательно FC $y = \dfrac{3}{4}x + 3$; $x \in [-4,0]$.

Найдем:

$$V_\Phi = \pi\int_{-5}^{0} y^2 dx = \frac{9\pi}{25}\int_{-5}^{0}(25 - x^2)dx = \frac{9\pi}{25}\left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-5}^{0} = 30\pi \text{ ед}^3.$$

$$V_{\Phi_1} = \pi\int_{-4}^{0}\left(\frac{3}{4}x + 3\right)^2 dx = 9\pi\int_{-4}^{0}\left(\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 1\right)dx = 9\pi\left(\frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_{-4}^{0} =$$

$$= 9\pi\left(\frac{16\cdot 4}{48} - 4 + 4\right) = 12\pi \text{ ед}^3.$$

Тогда $V_{\Phi_2} = V_\Phi - V_{\Phi_1} = 18\pi$ ед^3.

Пример 17 Вычислить объем тела вращения параболического сегмента $Q = AOBA$ вокруг оси L.

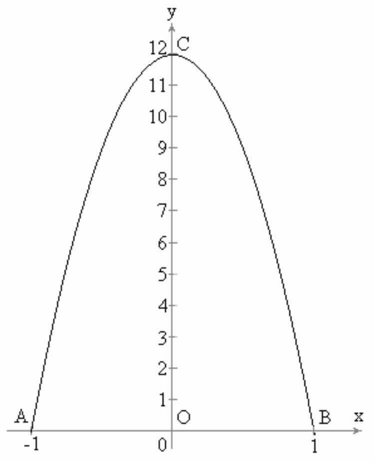

Рисунок 4

Дано: $L = OC$, $OC = h = 12$, $AB = 2$, $AO = 1$. Найти: $V_\Phi = ?$

Используем уравнение нисходящей параболы с вершиной в С(0,12): $x^2 = -(y - 12)\cdot 2q$ (*). Подставим точку A(-1,0) в уравнение (*) $\Rightarrow$ $1 = 24q$ $\Rightarrow$ $q = \dfrac{1}{24}$ $\Rightarrow$ уравнение дуги параболы $\overset{\frown}{OB}$: $x^2 = 1 - \dfrac{y}{12}$; $y \in [0,12]$. Используем уравнение (2.22)

$$V_\Phi = \pi \int_0^d x^2 dy = \pi \int \left(1 - \frac{y}{12}\right) dy = \pi \left(y - \frac{y^2}{24}\right)\Bigg|_0^{12} = \pi(12 - 6) = 6\pi \text{ ед}^3.$$

1.3 Методическое указание к заданию 5

Длина дуги кривой

Если плоская кривая дана в прямоугольной системе координат и задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$ или параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то дифференциал dl длины ее дуги выражается формулой

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt, \qquad (2.23)$$

а длина дуги АВ определяется формулой

$$L_{AB} = \int_A^B dl = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{x_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt \qquad (2.24$$

$x_A < x_B,\ y_A < y_B,\ t_A < t_B$

Если кривая задана в полярной системе координат $\rho=\rho(\varphi)$, то длина дуги $L_{AB}=\int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi,\ \varphi_A<\varphi_B$ (2.25)

Пример18 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ от $x_1=0$ до $x_2=2$, y>0.

Решение Так как $y=\frac{4}{3}x^{3/2}$, то $y'=2\sqrt{x}$

$$L=\int\limits_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^2\sqrt{1+4x}d(4x+1)=\frac{1}{4}\left.\frac{(1+4x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2=\frac{1}{6}(27-1)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$

Пример 19 Вычислить длину дуги астроиды

$$\begin{cases} x=R\cos^3 t, \\ y=R\sin^3 t. \end{cases}\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение $\begin{cases} x'=-3R\cos^2 t\cdot\sin t \\ y'=3R\sin^2 t\cdot\cos t \end{cases}$

$$L=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{9R^2\cos^4 t+\sin^2 t+9R^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=$$

$$=3R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\cos t dt=\frac{3}{2}R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=-\frac{3R}{4}\cos 2t=\frac{3}{2}R$$

Пример 20 Найти длину кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$

Решение $\rho'=-2\sin\varphi$. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Изменяя полярный угол φ от 0 до π, мы получим половину длину кардиоиды.

$$\frac{L}{2}=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{4(1+\cos\varphi)^2+4\sin^2\varphi}d\varphi=2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi$$

$$=4\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8\sin\left.\frac{\varphi}{2}\right|_0^{\pi}=8$$

Вся длина кардиоиды L=16$(ед.длины)$.

1.4 Методическое указание к заданию 6

Приближенное значение определенного интеграла можно найти по формуле Симпсона

$$\int f(x)dx = \frac{h}{3}((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}))$$

де $h = \frac{b-a}{n}$, n - четное число. Погрешность этой формулы

$|R_n| \le \frac{h^4}{180} \cdot (b-a) \cdot M_4$, где $M_4 = \sup_x |f^4(x)|$

Пример 21 Вычислить $\int_{-1}^{9} \sqrt{x^3 + 26}dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака. При выполнении работы рекомендуется использовать микрокалькуляторы.

i	x_i	$\sqrt{x_i^3 + 26}$	y_i
0	-1	$\sqrt{-1+26}$	$\sqrt{25} = 5{,}0000$
1	0	$\sqrt{0+26}$	$\sqrt{26} = 5{,}0990$
2	1	$\sqrt{1+26}$	$\sqrt{27} = 5{,}1962$
3	2	$\sqrt{8+26}$	$\sqrt{34} = 5{,}8309$
4	3	$\sqrt{27+26}$	$\sqrt{53} = 7{,}2801$
5	4	$\sqrt{64+26}$	$\sqrt{90} = 9{,}4868$
6	5	$\sqrt{125+26}$	$\sqrt{151} = 12{,}2882$
7	6	$\sqrt{216+26}$	$\sqrt{242} = 15{,}5563$
8	7	$\sqrt{343+26}$	$\sqrt{369} = 19{,}2094$
9	8	$\sqrt{512+26}$	$\sqrt{538} = 23{,}1948$
10	9	$\sqrt{729+26}$	$\sqrt{755} = 27{,}4773$

$$\int_{-1}^{9} \sqrt{x^3 + 26}dx \approx \frac{1}{3}((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_8)) =$$

$$= \frac{1}{3}(32{,}4773 + 326{,}6712 + 87{,}9478) = 119{,}0321$$

1.5 Методическое указание к заданию 7

Несобственные интегралы

В несобственных интегралах областью интегрирования является бесконечный сегмент, например $[a; +\infty), (-\infty; b]$ или бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

При вычислении такого вида интегралов, мы ограничиваем бесконечный интервал, некоторой конечной постоянной β, несобственный интеграл становится определенным. Вычислив его, в конце переходим к пределу, т.е. $\beta \to \pm\infty$ в зависимости от примера.

Пример 22 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta} x^{-2}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{\beta}+1\right) = 1$

Рассмотрим функцию y= $f(x)$ непрерывную на $a \le x < +\infty$. Для любого конечного сегмента $[a;b]$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. Если этот интеграл стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b, то этот предел называют несобственным с бесконечной верхней границей от функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Аналогично $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)$, где c - любая фиксированная точка. Если при вычислении интеграла его значение существует и конечно, то говорят несобственный интеграл - сходится, в противном случае - расходится.

Пример 23 Исследовать на сходимость интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (\alpha > 0)$. Если $\alpha > 1$, то

$$\int_1^{\infty} x^{-\alpha}dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta} x^{-\alpha}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Big|_1^{\beta} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\beta^{1-\alpha} - 1\right) == \frac{1}{1-\alpha}(0-1) = \frac{1}{\alpha-1}$$

Если $\alpha = 1$, то $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x} = \lim_{\beta\to\infty}(\ln x)\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\ln\beta = \infty$

Если $\alpha < 1$, то $\int_1^{\infty} x^{-\alpha}dx = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\beta^{1-\alpha} - 1\right) = +\infty$

Таким образом $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \begin{cases} при\ \alpha > 1, сходится \\ при\ \alpha \le 1, расходится \end{cases}$

Пример 24 $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} arctgx\Big|_{\alpha}^{0} = \lim_{\alpha\to-\infty}(arctg0 - arctg\alpha) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Пример 25 Исследовать на сходимость $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+16}}$.

При x=4 подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.

$\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+16}} = \lim_{\beta\to4-0}\int_1^{\beta}\frac{dx}{x-4} = \lim_{\beta\to4-0}\ln|x-4|\Big|_1^{\beta} =$

$$\lim_{\beta \to 4-0} \left(ln|\beta - 4| - ln|-3| \right) = ln0 - ln3 = -\infty$$

Составитель ст. преподаватель__________________ Шоманова Р.Е.

Утвержден на заседании кафедры «___» «_________» 2010г.

Протокол № __
Заведующий кафедрой: Павлюк И.И. ____________________________