Тит методических
р и указаний
ме екомендаций;
к указаний

Форма
Ф СО ПГУ 7.18.3/40

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Кафедра Математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И УКАЗАНИЯ

к изучению дисциплины «Теория моделей»

для магистрантов специальности 6М060100 «Математика»

Павлодар

верждения методических
омендаций и указаний;
дических рекомендаций;
тодических указаний

Форма
Ф СО ПГУ 7.18.3/41

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР
___________ Пфейфер Н.Э

«___»_____________201_г.

Составитель: д.п.н., проф., Дроботун Б.Н.

Кафедра Математи

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И

по дисциплине «Теория моделей»
для магистрантов специальности 6М060100 «Математика»

Рекомендовано на заседании кафедры
«_19_»_____10_______2012г., протокол № 3

Заведующий кафедрой _____________ Исин М.Е. «____» ________2012г.

Одобрено УМС факультета физики, математики и информационных технологий

«_16_»_______11_______2012г., протокол № 4

Председатель УМС _______________ Искакова А.Б. «____» ________2012г.

ОДОБРЕНО:
Начальник УМО _____________ Жуманкулова Е.Н. «____» ________201_г.

Одобрена учебно-методическим советом университета
«___»______________201_г. Протокол №____

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ»

Цели дисциплины:

- формирование у магистрантов общей теоретико-множественной и логико-алгебраической культуры, как научно-теоретической и идейно-методологической основы овладения синтаксической и семантической составляющими формальных языков классических исчислений;
- формирование у магистрантов системы знаний, умений и навыков применения в логико-математической практике методов, технологий и канонических конструкций, свойственных современной теории моделей;
- формирование у магистрантов научно-теоретической базы, достаточной для обеспечения возможностей оперирования с абстрактными типами данных, логическим программированием, языками спецификаций, проблемами семантики языков программирования и спецификаций, синтеза и верификации программ.

Задачи дисциплины:

- изучение основных понятий канонических конструкций, методов и технологий теории моделей (алгебр и алгебраических систем);
- изучение: синтаксиса и семантики; индуктивных и дедуктивных, алгебраических и алгоритмических свойств формальных языков 1-ой и 2-ой ступени и их выразительных возможностей;
- освоение основных методов построения моделей и технологий описания их свойств средствами формальных языков логических исчислений;
- освоение элементов теории конструктивных моделей, как научно-теоретической основе теории вычислимости, обеспечивающей возможности приложений математической логики в современном программировании.

Краткие исторические сведения и содержание дисциплины.

Понятие модели возникло в математике еще в 19 веке. Вплотную к нему подошел Н.И.Лобачевский, но в полной мере оно появилось в работах Э. Бельтрами и Ф. Клейна, посвященных непротиворечивости геометрии.

В дальнейшем понятие модели развивается и уточняется в связи с развитием формальных теорий и становится одним из основных понятий семантики символических языков.

Современная формулировка понятия модели и других понятий семантики сложилась в конце 20-х и в начале 30-х годов в работах Д.Гильберта и А. Тарского.

К тому же времени на основе фундаментальных работ Д.Гильберта и развитие его идей в математической логике были получены и основные теоремы: теорема Геделя о полноте узкого исчисления предикатов, локальная теорема Мальцева, теорема Левенгейма-Сколема, теорема о расширении моделей и др.

Естественно возникла идея применения этих достижений в математике. Формальные системы, изучаемые в математической логике, являются примерами алгебр с частичными операциями, и основные теоремы о формальных системах, основные методы математической логики являются алгебраическими. В соответствии с этим, алгебра и арифметика явились первыми математическими объектами, где применялись методы математической логики.

Пионерами в этом направлении были А.И.Мальцев и Т.Сколем. Их первые работы показали плодотворность нового направления. В работе Сколема построен пример нестандартной модели арифметики, в работе Мальцева дан новый метод получения локальных теорем в теории групп, который позволил не только обобщить известные, но и получить новые локальные теоремы. В этих же работах введены новые понятия, оказавшиеся очень плодотворными (например, понятие ультрастепени модели, понятие описания модели)

Так на стыке двух наук, алгебры и математической логики, возникла новая теория, изучающая связь алгебры и арифметики с математической логикой, которую в первые годы считали алгебраической и называли метаматематикой алгебры. Дальнейшее развитие показало, что теория имеет свою систему понятий, свои методы и, важнее всего, свою проблематику. В настоящее время ее называют теорией моделей.

В сороковых годах теория моделей развивалась в разных направлениях: изучались модели узкого исчисления предикатов, исчисления второй ступени, модели многозначной логики, модели логики с бесконечно длинными формулами и т.д.

Расширение области применения методов теории моделей и обилие результатов, полученных в самой теории, вызвало интерес к теории моделей среди математиков разных специальностей и предопределило необходимость изучения теории моделей в высших учебных заведениях при подготовке студентов по математическим направлениям.

В 50-е годы XX века в работах А.Фрелиха, Д. Шефердсона, А.И.Мальцева, В.А. Кузнецова, О. Рабина и Р. Воота возникло новое направление теории моделей – конструктивные модели. Это направление связано с исследованием зависимости алгоритмических свойств абстрактных моделей на основе построениядля них представления на натуральных числах и изучение взаимоотношений алгоритмических и структурных свойств этих моделей.

В математической школе алгебры и логики, созданной А.И.Мальцевым, исследования по конструктивным и рекурсивным алгебраическим системам были начаты А.И.Мальцевым и продолжены его учениками и их последователями. В основу предложенного им подхода положено понятие нумерации. Нумерации позволяют транслировать основные алгоритмические проблемы над абстрактными структурами к изучению алгоритмов на натуральных числах или словах некоторого конечного алфавита. Такие нумерации можно рассматривать также как введение системы координат («эффективной» системы координат), если эта нумерация является конструктивизацией.

Использование нумераций (конструктивизаций) позволяет изучать алгоритмические свойства системы, их (не)зависимость от выбора конструктивизации. К числу фундаментальных проблем этого направления относятся проблемы существования и (не)единственности конструктивизаций (со специальными свойствами),проблемы продолжения конструктивизаций, вычислимости семейств конструктивизаций, классификации алгоритмических проблем по сложности и многие другие.

В первой теме: рассматриваются общие схемы построения логических исчислений; изучаются основные понятия синтаксиса и семантики; рассматриваются подходы к проблеме классификации формул по определенным признакам; вводится понятие (конечно) аксиоматизированного класса моделей и выявляются условия универсальной аксиоматизируемости. Как ответ на вопрос о том, что можно выразить в логике 1-го порядка, рассматриваются примеры конкретных аксиоматических теорий. Одновременно, на основе этих теорий, демонстрируются теоретико-модельные технологии и выявляются механизмы, обуславливающие возможности и специфику и продуктивность описания алгебраических свойств на языке теории моделей.

В рамках второй темы изучаются основные методы и конструкции канонического характера, свойственные классической теории моделей: методы построения моделей из констант, построение моделей и расширение моделейпосредством применения техники элементарных цепей и ультра произведений; доказываются основные теоремы теории моделей: теорема Левенгейма-Сколема, теорема о существовании модели, теорема компактности Мальцева и ряд других фундаментальных теорем.

Третья тема посвящена изложению элементов теории конструктивных моделей, средствами которой даются точные математические формулировки вопросов алгоритмического характера о свойствах счетных абстрактных моделей. В теме рассматриваются технологии, позволяющие посредством нумераций основных множеств алгебраических систем, свести алгоритмические проблемы, связанные с элементами абстрактных систем, к изучению соответствующих проблем на натуральных числах – номерах этих элементов.

Тема 1. Формальные языки первой и второй ступени. Синтаксис и семантика.

Логические исчисления. Индуктивные доказательства, определения и построения. Основные понятия синтаксиса: термы и формулы сигнатуры общего вида. Модели алгебры и алгебраические системы. Элементарные теории и аксиоматизируемые классы. Классификация формул. $\forall$-формулы и $\exists$-формулы. Универсально аксиоматизируемые подклассы. $\forall\exists$ и $\exists\forall$- формулы. Позитивные формулы и мультипликативно устойчивые формулы. Конечно аксиоматизируемые классы. Проблемы аксиоматизируемости и неаксиоматизируемости. Примеры аксиоматизируемых и конечно-аксиоматизируемых теорий.

Тема 2. Теоретико-модельные методы и конструкции.

Полнота и компактность. Модели, построенные из констант. Полнота и непротиворечивость аксиоматических теорий. Метод Хенкина. Теорема о существования модели и теорема компактности. Опускание типов и интерполяционные теоремы. Счетные модели полных теорий. Элементарные расширения и элементарные цепи. Приложения элементарных цепей. Фильтры и ультрафильтры. Ультрапроизведения. Некоторые применения ультрапроизведений. Условно фильтрирующиеся формулы. Полнота и модельная полнота. Полные совокупности формул. Модельные пополнения.

Тема 3. Конструктивные модели.

Элементы теории нумераций и теории рекурсивных множеств. Нумерованные модели и алгебраические системы. Конструктивные и сильно конструктивные модели и их простейшие свойства. Существование конструктивизаций. Теорема о существовании сильно конструктивных моделей разрешимых теорий. Условия, при которых любая конструктивная модель данной теории будет являться сильно конструктивной. Теорема о ядре. Сильная конструктивизируемость и типы. Проблема сложности простых моделей полных, разрешимых теорий и получение точных верхних оценок сложности в арифметической иерархии Клини-Мостовского. Счетные модели полных разрешимых тотально трансцендентных теорий. Теории с сильно минимальными формулами.

Тема 1. Формальные языки первой и второй ступени. Синтаксис и семантика.

Лекция 1. Индуктивные и дедуктивные свойства логических исчислений
План:
1. Логические исчисления.
2. Индуктивные доказательства, определения и построения.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С. Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. стр 52 – 59; стр 77 - 82
2. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н, Никитин А.А.. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть I.- Новосибирск: изд-во НГУ, 2008. - стр 25 – 58; стр 145 – 153.

Лекция 2. Синтаксис и семантика
План:
1. Основные понятия синтаксиса: термы и формулы сигнатуры общего вида.
2. Модели алгебры и алгебраические системы.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть II. Новосибирск: изд-во НГУ, 2008. стр 154 – 182.
2. Гончаров С.С. Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. стр 98 - 129.
3. Мальцев А.И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970. стр 138 – 154.
4. Сакс Д. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир,1976. стр. 16 - 18

Лекция 3. Классификация формул и выразительные возможности формальных языков 1-го порядка.

План:

1. Элементарные теории и аксиоматизируемые классы.
2. $\forall$-формулы и $\exists$-формулы.
3. Универсально аксиоматизируемые подклассы.
4. $\forall\exists$ и $\exists\forall$- формулы.

Рекомендуемая литература:

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970. стр 160 – 176.
2. Гончаров С.С. Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007, стр 264 – 278.

Лекция 4. Классы формул и проблема аксиоматизируемости.

План:

1. Позитивные формулы и мультипликативно устойчивые формулы.
2. Конечно аксиоматизируемые классы.
3. Аксиоматизируемость и неаксиоматизируемость.
4. Примеры аксиоматизируемых и конечно-аксиоматизируемых теорий.

Рекомендуемая литература:

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970. стр 177 – 192.
2. Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. под ред. Дж.Барвайса. - М.: Наука,1982. стр 13 – 24.

Тема 2. Теоретико-модельные методы и конструкции.

Лекция 5.

План:

1. Полнота и компактность.
2. Полнота и непротиворечивость аксиоматических теорий.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть II. Новосибирск: изд-во НГУ, 2008. стр 283 – 287.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970. стр 248 – 266.
3. Сакс Д. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир,1976. стр. 26 – 31.
4. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Наука, 1967, стр 128 - 257.

Лекция 6 . Метод Хенкина и теорема о существования модели.

План:

1. Модели, построенные из констант.

2. Аксиомы Хенкина
3. Теорема о существования модели.
4. Теорема компактности.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть II. Новосибирск: изд-во НГУ, 2008. стр 288 – 308.
2. Сакс Д. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир,1976. стр. 20 – 25.
3. Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. под ред. Дж.Барвайса. - М.: Наука,1982. стр 30 – 42.
4. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Наука, 1967, стр 30 - 41
5. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, стр 78 – 94.

Лекция 7 . Методы построения моделей с конкретными свойствами.

План:

1. Опускание типов и интерполяционные теоремы.
2. Счетные модели полных теорий.
3. Элементарные расширения и элементарные цепи.
4. Приложения элементарных цепей.

Рекомендуемая литература:

1. Сакс Д. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир,1976. стр. 45 – 47; стр 59 – 62.
2. . Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, стр 113 – 128.

Лекция 8 .Фильтрованные произведения и их применения.

План:

1. Фильтры и ультрафильтры.
2. Ультрапроизведения.
3. Некоторые применения ультрапроизведений.
4. Условно фильтрирующиеся формулы.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С. Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007, стр 140 – 162.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы.- М.: Наука, 1970. стр 1937 – 224.
3. Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. под ред. Дж.Барвайса. - М.: Наука,1982. стр 109 – 140.
4. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, стр 194 – 210.

Лекция 9. Дальнейшие теоретико-модельные конструкции.

План:

1. Полнота и модельная полнота.
2. Полные совокупности формул.
3. Модельные пополнения.

Рекомендуемая литература:

1. Сакс Д. Теория насыщенных моделей. - М.: Мир,1976. стр. 38 – 43.

2 Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. под ред. Дж.Барвайса. - М.: Наука,1982. стр 141 – 182.

3. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. – М.: Наука, 1967, стр 128 – 155.

Тема 3. Конструктивные модели.

Лекция 10. Технологии сведения алгоритмических проблем абстрактных структур и теория рекурсии.

План:

1. Элементы теории нумераций и теории рекурсивных множеств.
2. Нумерованные модели и алгебраические системы.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 30 – 57.
2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 293 – 295.
3. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – Наука , 1977. стр 32 - 40.

Лекция 11 . Основные понятия конструктивных моделей.

План:

1. Конструктивные и сильно конструктивные модели.
2. Простейшие свойства конструктивизации.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 58 – 67; стр 147 - 152
2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 295 – 308.

Лекция 12 . Проблема существования конструктивизаций.

План:

1. Существование конструктивизаций.
2. Теорема о существовании сильно конструктивных моделей разрешимых теорий.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 68- 82
2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 309 – 324.

Лекция 13 . Теорема о ядре

План:

1. Алгебраические элементы моделей.
2. Теорема о ядре и ее приложения.
3. Условия, при которых любая конструктивная модель данной теории будет являться сильно конструктивной.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 83- 101.
2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 325 – 343.

Лекция 14 . Простые модели полных, разрешимых теорий

План:

1. Проблема сложности простых моделей полных, разрешимых теорий.

2. Получение точных верхних оценок сложности в арифметической иерархии Клини-Мостовского.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 172 – 178.

2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 31 – 44, стр 365 – 380.

3. Дроботун Б.Н. О нумерациях специальных моделей. канд. диссерт. – Новосибирск: НГУ. 1978. – стр.5 - 47.

Лекция 15 . Конструктивные модели тотально трансцендентных теорий

План:

1. Сильная конструктивизируемость и типы элементов.

2. Счетные модели полных разрешимых тотально трансцендентных теорий.

3. Теории с сильно минимальными формулами.

Рекомендуемая литература:

1. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели. – Новосибирск: Научная книга, 1999. стр 147 – 190.

2. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980, стр 381 – 390.

3. Дроботун Б.Н. О нумерациях специальных моделей. канд. диссерт. – Новосибирск: НГУ. 1978. – стр. 47 – 89.