

Титульный лист методических
рекомендаций и указаний
методических рекомендаций;
методических указаний



Форма
Ф СО ПГУ 7.18.3/40

Министерство образования и науки Республики Казахстан
Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова
Кафедра Математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И УКАЗАНИЯ

к изучению
по дисциплине «Теория моделей»

для студентов специальности 5В060100 «Математика»

Павлодар

Лист утверждения методических
рекомендаций и указаний;
методических рекомендаций;
методических указаний



Форма
Ф СО ПГУ 7.18.3/41

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по УР

_____ Пфейфер Н.Э

«___» _____ 2012 г.

Составитель: д.п.н., проф., Дроботун Б.Н.

Кафедра Математи

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И _____

по дисциплине «Теория моделей»
для студентов специальности 5В060100 «Математика»

Рекомендовано на заседании кафедры
«___» _____ 2012г., протокол №__

Заведующий кафедрой _____ Исин М.Е. «___» _____ 2012г.

Одобрено УМС факультета физики, математики и информационных
технологий

«___» _____ 2012г., протокол №__

Председатель УМС _____ Искакова А.Б. «___» _____ 2012г.

ОДОБРЕНО:

Начальник ОПиМОУП _____ Варакута А.А. «___» _____ 2012г.

Одобрена учебно-методическим советом университета

«___» _____ 2012г. Протокол №__

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ»

. **Цели дисциплины:** формирование у студентов общей теоретико-множественной и логико-алгебраической культуры, как научно-теоретической и идейно-методологической основы овладения синтаксической и семантической составляющими формальных языков классических исчислений; формирование у студентов системы знаний, умений и навыков применения в логико-математической практике методов, технологий и канонических конструкций, свойственных современной теории моделей.

Задачи дисциплины: изучение основных понятий канонических конструкций, методов и технологий канторовской теории множеств; изучение свойств отношений (предикатов), заданных на конкретных и абстрактных множествах, операций над предикатами и выразительных возможностей языка алгебры предикатов, как пропедевтической основы теоретико-модельных концепций; освоение структурных свойств базовых моделей и выявление их роли в обосновании методов индуктивных определений и метода формальных аксиоматических теорий; формирование понятия мощности и порядкового числа; изучение основ кардинальной и ординальной «арифметики»; освоение методологии применения обобщенно-индуктивных определений и построение максимальных подобъектов на основе применения принципа максимума; выявление общности технологических подходов к построению фактор-структур, изучению гомоморфизмов и изоморфизмов классических алгебр и моделей, как пропедевтической основы обоснования правомерности принятия концепции изучения математических структур с точностью до изоморфизма.

Краткие исторические сведения о дисциплине и содержание дисциплины.

Понятие модели возникло в математике еще в 19 веке. Вплотную к нему подошел Н.И.Лобачевский, но в полной мере оно появилось в работах Э. Бельтрами и Ф. Клейна, посвященных непротиворечивости геометрии.

В дальнейшем понятие модели развивается и уточняется в связи с развитием формальных теорий и становится одним из основных понятий семантики символических языков.

Современная формулировка понятия модели и других понятий семантики сложилась в конце 20-х и в начале 30-х годов в работах Д.Гильберта и А. Тарского.

К тому же времени на основе фундаментальных работ Д.Гильберта и развитие его идей в математической логике были получены и основные теоремы: теорема Геделя о полноте узкого исчисления предикатов, локальная теорема Мальцева, теорема Левенгейма-Сколема, теорема о расширении моделей и др.

Естественно возникла идея применения этих достижений в математике. Формальные системы, изучаемые в математической логике, являются примерами алгебр с частичными операциями, и основные теоремы о формальных системах, основные методы математической логики являются алгебраическими. В соответствии с этим, алгебра и арифметика явились первыми математическими объектами, где применялись методы математической логики.

Пионерами в этом направлении были А.И.Мальцев и Т.Сколем. их первые работы показали плодотворность нового направления. В работе Сколема построен пример нестандартной модели арифметики, в работе Мальцева дан новый метод получения локальных теорем в теории групп, который позволил не только обобщить известные, но и получить новые локальные теоремы. В этих же работах введены новые понятия, оказавшиеся очень плодотворными (например, понятие ультрастепени модели, понятие описания модели)

Так на стыке двух наук, алгебры и математической логики, возникла новая теория, изучающая связь алгебры и арифметики с математической логикой, которую в первые годы считали алгебраической и называли метаматематикой алгебры. Дальнейшее развитие показало, что теория имеет свою систему понятий, свои методы и, важнее всего, свою проблематику.

Изучение специальной дисциплины «Теория моделей» предполагается осуществить в течение 5 и 6 семестров. Предметное содержание этой дисциплины представляет собой органическое единство двух разделов:

1. Теоретико-множественные и логико-алгебраические основания теории моделей.
2. Элементы теории моделей.

В пятом семестре предусматривается изучение первого раздела, включающего в себя темы: алгебра множеств, базовые модели, мощности и порядковые числа. Следует отметить, что в рамках учебных дисциплин, в соответствии с государственными стандартами обучения по специальности 5В060100 «Математика», затрагиваются те или иные вопросы, связанные с теоретико-множественными и логико-алгебраическими концепции канторовской теории множеств. Тем не менее, систематическое изучение теории множеств (ни в содержательном, ни в формально-аксиоматическом аспекте) в учебных программах этих дисциплин не предусматривается.

В настоящее время, впервые обоснованная Б. Расселом идея о том, что формальная математика есть единство логики и теории множеств, является общепринятым. Можно показать, проявляя исключительную настойчивость, внимательность и аккуратность, что определение любых математических понятий может быть сведено к понятиям теории множеств и логике, а доказательства – выведены формальным путем в исчислении предикатов.

Все это говорит о том, что изучение понятия модели, как одного из важнейших понятий семантики символических языков логических исчислений с неизбежностью предполагает свободное владение понятиями, методами и технологиями как математической логики, так и теории множеств.

В соответствии с этим, в рамках первой темы излагаются первичные понятия, составляющие основу понятийно-терминологической базы содержательной теории множеств.

Изучение материала второй темы обеспечивает формирование пропедевтических представлений о понятии модели. В этой части на примере простейшей модели, представляющей собой множество с одним, определенным на нем бинарным отношением, осуществляется ознакомление с базовыми понятиями теории моделей. В качестве бинарного отношения берутся отношение эквивалентности и различные порядковые отношения: квазипорядка, частичного (линейного, полного) порядка. На примерах этих моделей отрабатываются технологии построения фактор-структур, отношений изоморфизма и гомоморфизма. С использованием частично (линейно, вполне) упорядоченных множеств в качестве области изменения параметра, вводятся различные формы индуктивных и обобщенно индуктивных определений, построений и доказательств и отрабатываются общие конгитивные схемы их применения. На основе теоремы о переходе отрабатываются технологии применения метода определения от абстракции.

Изучение материала третьей темы ориентировано на выявление понятия мощности, концепций кардинального и ординального числа. Свободное владение операционными средствами кардинальной и ординальной арифметики необходимо при построении носителей моделей, подмоделей расширений и элементарных расширений моделей тех или иных мощностей. Завершает материал третьей темы анализ аксиомы выбора и теоремы Цермело.

Тема 1. Алгебра множеств.

Лекция 1. Множества, отношения и операции над ними.

План:

1. Понятие множества.
2. Операции над множествами.
3. Декартово произведение множеств.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с. – стр 11 – 27.
2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр 11 – 27.
3. Б.Н. Дроботун. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике Часть I. Учебное пособие. Павлодар: Кереку, 2010. – 380с., стр 15-46.

Лекция 2. Соответствия. Операции над соответствиями.

План:

1. Соответствия и способы их задания.
2. Операции над соответствиями и их свойства.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с..стр 28 – 33.
2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр. 31 -34
3. Б.Н. Дроботун. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике Часть I. Учебное пособие. Павлодар: Кереку, 2010. – 380с., стр 47-56.

Лекция 3 . Отношения и предикаты

План:

1. Отображения и виды отображений.
2. Отношения и предикаты в теоретико-множественном и логическом смысле.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с..стр 34 – 36.
2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр. 35 -39
3. Б.Н. Дроботун. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике Часть I. Учебное пособие. Павлодар: Кереку, 2010. – 380с., стр 57-60.

Лекция 4. Бинарные отношения

План:

1. Бинарные отношения, заданные на данном множестве, и их свойства.
2. Способы задания бинарных отношений.
3. Операции над бинарными отношениями.
4. Алгебра бинарных отношений и алгебра характеристических матриц.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с..стр 65 – 75.

2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр. 39 -41

3. Б.Н. Дроботун. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике Часть I. Учебное пособие. Павлодар: Кереку, 2010. – 380с., стр 65-76.

Тема 2. Базовые модели.

Лекция 5. Понятие модели

План:

1. Понятие модели и подмодели. Гомоморфизмы и изоморфизмы моделей.
2. Изоморфизм алгебры бинарных отношений и алгебры характеристических матриц.
3. Множество с отношением эквивалентности, как модель. Эквивалентности и разбиения.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с..стр 76 – 80. стр 139-140

2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр. 41 -42

3. Гончаров С.С. Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007.- 166с., стр 114 - 123

Лекция 6. Разбиение множеств и отношение эквивалентности.

План:

1. Отношение эквивалентности и принцип включений и исключений.
2. Теорема о соответствии.
3. Фактор-множество. Теорема о композиционном представлении отображений.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с..стр 76 – 80.

2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр. 41 -42

3. Б.Н. Дроботун. Руководство к решению задач по дискретной математике и математической логике Часть I. Учебное пособие. Павлодар: Кереку, 2010. – 380с., стр 76-81.

Лекция 7. Упорядоченные множества, как модели

План:

1. Упорядоченные множества, как модели.

2. Частично упорядоченные множества. Наибольшие и наименьшие, максимальные и минимальные элементы. Верхние и нижние, точные верхние и нижние грани.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с. стр. 81-90, стр 129 - 138

2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр 51 – 60

Лекция 8. Методы индуктивных и обобщенно-индуктивных определений.

План:

1. Условия минимальности, индуктивности и обрыва убывающих цепей.
2. Индуктивные и обобщенно-индуктивные определения, построения и доказательства.

Рекомендуемая литература:

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений. Часть I. Новосибирск: изд-во НГУ, 2008. –221с. стр 25 – 58.

Лекция 9. Изоморфизмы и гомоморфизмы упорядоченных множеств.

План:

1. Понятие изоморфизма и гомоморфизма применительно к упорядоченным множествам.
2. Представления частично упорядоченных множеств.

Рекомендуемая литература

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с., стр 141 - 147

2. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с. стр 77 – 82

Лекция 10. Отношение квазипорядка.

План:

1. Отношение квазипорядка и теорема о переходе.
2. Теорема о переходе и композиционное строение отображений.

Рекомендуемая литература

1. С.С.Гончаров, Б.Н.Дроботун, А.А.Никитин. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении. Новосибирск: изд-во НГУ, 2007. – 251с., стр 148 - 153

Тема 3. Мощности и порядковые числа.

Лекция 11. Концепция мощности

План:

1. Понятие мощности множества. Счетные и несчетные множества.
2. Свойства счетных множеств.
3. Диагональный метод Кантора.

4. Мощность континуума

Рекомендуемая литература:

1. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с., стр 112 – 150.
2. С.С. Гончаров Математическая логика. Часть I, II. Учеб. пособие. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2007, - 166с., стр 60 - 76
3. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.- М.: Мир, 1970. – 416с.,стр 176 – 184.

Лекция 12. Кардинальные числа и арифметика кардинальных чисел.

План:

1. Операция сложения кардинальных чисел
2. Операция умножения кардинальных чисел
3. Операция возведения в степень для кардинальных чисел

Рекомендуемая литература:

1. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с., стр 152– 160.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.- М.: Мир, 1970. – 416с., стр 185 – 191.

Лекция 13. Сравнение кардинальных чисел.

План:

1. Отношение порядка на кардинальных числах.
2. Теорема Кантора-Бернштейна.

Рекомендуемая литература:

1. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с., стр 161– 170.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.- М.: Мир, 1970. – 416с., стр 192 – 199.

Лекция 14. Вполне упорядоченные множества

План:

1. Определения и примеры вполне упорядоченных множеств.
2. Свойства вполне упорядоченных множеств.
3. Операции над вполне упорядоченными множествами.

Рекомендуемая литература:

1. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с., стр 171– 190.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.- М.: Мир, 1970. – 416с., стр 232 – 257.

Лекция 15. Порядковые числа

План:

1. Порядковые числа, как типы изоморфизмов вполне упорядоченных множеств.
2. Аксиома выбора.
3. Лемма Цорна.

4. Теорема Цермело.

Рекомендуемая литература:

1. Б.Н.Дроботун, Г.М.Муканов. Введение в теорию кардинальных и ординальных чисел. Учебное пособие, Павлодар, ПГУ, 2003.- 214с., стр 190– 213.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.- М.: Мир, 1970. – 416с., стр 263 – 270.