Зертханалық сабақтарға дайындалуға арналған тапсырмалар

1 тақырып Көп айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері

Бірнеше аргументтен тәуелді функциялар. Дербес туындылар және толық дифференциал. Күрделі және айқындалмаған функциялар, олардың туындылары. Жоғары ретті дербес туындылар мен дифференциалдар. Екі аргументтен тәуелді функцияның экстремумы.

А.01 1) Аймақ $y=0,\ y=2,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=\frac{1}{2}x-1$ түзулерімен шенелген шекарасыз параллелограмм. Осы аймақты теңсіздіктер арқылы жаз.

2) Аймақ $y=x^2$ және $x=y^2$ сызықтармен шенелген фигура (пішін). Осы аймақтың тұйықталуын теңсіздіктер арқылы жаз.

3) Бір төбесі координат басында жатқан, бір қабырғасы Ox өсінің оң бағытында орналасқан, қабырғалары а-ға тең дұрыс үшбұрыш болатын аймақты (шекарасыз) теңсіздік арқылы жаз. (Аймақ бірінші квадрантта жатыр).

4) Аймақ центрі (a, b, c) нүктесінде жатқан радиусы R -ге тең шар. Осы аймақтың тұйықталуын теңсіздік арқылы жаз.

5) Жазықтықта $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$ теңсіздігі арқылы анықталған аймақты сипатта.

6) Жазықтықта $0<y<1,\ -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}$ теңсіздіктері арқылы берілген аймақты сипатта.

7) Жазықтықта $x>0$ және $x^2+y^2<4$ теңсіздіктері арқылы берілген аймақты сипатта.

8) Кеңістікте $-1<x<1,\ -\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2},\ \ 0<z<x^2+y^2$ теңсіздіктері анықтайтын аймақты сипатта.

9) Кеңістікте $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1$ теңсіздігі қандай аймақты анықтайды?

10) Кеңістікте $z>0,\ x^2+y^2+z^2<r^2$ теңсіздіктері анықтайтын аймақты сипатта.

А.01 Конустың көлемі V-ны оның жасаушысы x пен биіктігі y арқылы өрнекте.

А.02 Үшбұрыштың S ауданын оның қабырғалары x, y, z арқылы өрнекте.

А.03 Берілген функцияның көрсетілген нүктедегі мәндерін есепте:

1) $z=\left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2,\quad M\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $z=e^{\sin(x+y)},\quad M\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $z=y^{x^2-1}+x^{y^2-1},\ M_1(2,2);\ M_2(1,2);\ M_3(2,1)$

А.04 Функциялардың анықталу аймақтарын тап:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; 2) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$;

3) $z = \ln(x^2 + y)$; 4) $z = x + \arccos y$;

5) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; 6) $z = \arcsin \dfrac{y}{x}$;

7) $z = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{4 - y^2}$; 8) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$;

9) $u = \ln(xyz)$.

А.05 Функцияның шегін тап:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

А.06 Функцияның үзілісті нүктелерін тап

1) $z = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$;

2) $z = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$;

А.07 Функцияны $M_0(0,0)$ нүктесінде үзіліссіздікке зертте

1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

3) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$.

А.08 Функцияның деңгей сызықтарын сал

1) $z = xy$, z-тің -5 тен 5-ке дейінгі бүтін мәндерінде;

2) $z = x^2 y + x$, z-тің -5; және 5-ке тең мәндерінде;

3) $z = y(x^2 + 1)$, z-тің -2 ден 2-ге дейінгі бүтін мәндерінде.

Б.01 Функцияның үзіліс нүктелерін тап.

1) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 2) $u = \dfrac{x - y}{x + y}$;

3) $u = \sin \dfrac{1}{xy}$; 4) $u = \dfrac{1}{\sin x \cdot \cos y}$;

5) $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$;　　　　6) $u = \dfrac{1}{xyz}$.

C.01 Шектерді тап

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2 + y^2\right)\sin\dfrac{1}{xy}$;　　　　2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;　　　　4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}} \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^x$.

A.01 Функцияның дербес туындыларын тап:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy$;　　2) $z = 100 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$;

3) $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 3$;　4) $z = 4(x - y - 1) - x^2 - y^2$;

5) $z = (x-1)^2 + 2y^2 + 1$;　　6) $z = x\sqrt{y} - x^2 + y + 6x$;

7) $\ln(x^2 + y^2)$;　　8) $z = \sin(xy)$;

9) $z = \dfrac{y^2}{x-1}$;　　10) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y+1}{x}$.

A.02 Функцияның толық дифференциалын табу керек.

1) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 5$;

2) $z = 6(x - y - 1) - 3x^2 - 3y^2$;

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 20$;

4) $z = 2x^3 + (y+1)^2 + 2$;

5) $z = 2xy - x^2 - 4y^3 + 1$;

6) $z = \sqrt{xy}$;

7) $z = \ln(x + y^2)$;

8) $z = (x + y^2)^3$;

9) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

A.03 Бетке M нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1) $z = \ln(1 - xy)$, $M(0,2,0)$;　　2) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y}}$, $M(0,1,1)$;

3) $z = \sqrt{x + y^2 + 2}$, $M(-2,-1,1)$;　　4) $z = \sqrt{xy} - 1$, $M(2,2,1)$;

5) $z = \dfrac{y-2}{x-y}$, $M(2,1,-1)$;　　6) $z = \dfrac{x^2+1}{y}$, $M(1,-1,-2)$.

A.04 Функциясының екінші ретті дербес туындыларын табу керек.

1) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$;　　2) $z = 2xy - 5x^3 - 3y^2 + 3$;

3) $z = \cos(x^2 + y)$;　　4) $z = \operatorname{tg}(x + y)$;

5) $z=\ln(1-xy)$; 6) $z=\dfrac{y^2}{x-1}$;

7) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; 8) $z=e^{x^2-y^2}$.

А.05 $\dfrac{dz}{dt}$-ны тап, егер:

1) $z=e^{x+2y},\ x=\cos t,\ y=t^2$ 2) $z=\dfrac{x}{y},\ x=e^t,\ y=\ln t$.

А.06 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ теңдігін тексер, егер $z=x^y$.

А.07 $d^2 z$ тап, егер: 1) $z=e^{xy}$; 2) $z=e^x\cdot\cos y$.

А.08

1) $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$ болса, онда $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$ теңдігі орындалатынын көрсет.

2) $u=(x-y)+(y-x)(z-x)$ болса, онда $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ теңдігі орындалатынын көрсет.

3) $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$ болса, онда $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$ теңдігі орындалатынын көрсет.

Б.01 $f'_x(x,1)$ тап, егер $f(x,y)=x+(y-1)\cdot\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

Б.02 Екінші ретті дербес туындыларын тап:

1) $u=xy+\dfrac{x}{y}$; 2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

3) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Б.03 Берілген беттер үшін көрсетілген нүктелерде жанама жазықтық пен нормаль түзудің теңдеуін жаз:

1) $z=x^2+y^2$ айналу параболоидының (1,-2,5) нүктесінде;

2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{8}=0$ конусының (4,3,4) нүктесінде;

3) $x^2+y^2+z^2=2Rz$ сфераның $(R\cos\alpha,\ R\sin\alpha,\ R)$ нүктесінде.

Б.04 Бірінші және екінші ретті дербес туындыларын тап:

1) $x^2+y^2+z^2=a^2$; 2) $z^3-3xyz=a^3$.

Б.05 $df(1,2)$ және $d^2 f(1,2)$ тап, егер $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ болса.

С.01

1) Дербес туынды $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ -ті тап, егер $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$ болса.

2) Дербес туынды $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ -ді тап, егер $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}$ болса.

C.02 Екінші ретті дербес туындыларын тап:

1) $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$; 2) $u = x^y$.

C.03 z-ті x және y айнымалыларының функциялары деп есептеп, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ табыңыз, егер $x = a\cos\varphi\cos\psi,\ y = b\sin\varphi\cos\psi,\ z = c\sin\psi$ болса.

C.04

1) $z = e^y \cdot \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ функциясы $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсет.

2) $z = y \cdot \varphi\left(x^2 - y^2\right)$ функциясы $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсет.

3) $z = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ функциясы $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ теңдеуін қанағаттандыратынын көрсет.

C.05 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ табу керек, егер:

1) $x = u\cos\frac{v}{u},\ y = u\sin\frac{v}{u}$; 2) $x = e^u + u\sin v,\ y = e^u - u\cos v$.

A.01 Функцияны экстремумға зертте.

1) $z = 4(x - y - 1) - x^2 - y^2$ 2) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 20$

3) $z = 2x^2 + (y+1)^2 + 2$ 4) $z = x^3 + y^3 - 3xy + 2$

5) $z = x^2 - (y-1)^2$ 6) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

A.02 Функцияның D аймағында ең үлкен және ең кіші мәнін табыңдар.

1) $z = 3x + y - xy,\ D:\ x = 0, y = 4, y = x$

2) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y,\ D:\ x = 0, y = 0, x + y = 1$

3) $z = x^2 + 2xy,\ D:\ y = 0, y = x^2 - 4$

A.03 Периметрі 2p –ға тең барлық үшбұрыштардың ішінен ауданы ең кіші болатын үшбұрышты табу керек.

A.04 Берілген нүктелерде gradz-ті тап:

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ (2;1)$; 2) $z = \sqrt{x^2 - y^2},\ (5;3)$;

3) $z = 2x^2 - 3y^2 + xy,\ (1;1)$.

Б.01 Функциялардың экстремумын тап:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; 2) $z = xy(6 - x - y)$;

3) $z = x^3y^2(6 - x - y), \quad (x > 0,\ y > 0)$;

4) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$;

5) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Б.02 D аймағында функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін тап:

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ D: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2$;

2) $z = x^2y,\ D: x^2 + y^2 \le 1$;

3) $z = x^2 - y^2,\ D: x^2 + y^2 \le 1$.

Б.03

1) Бетінің ауданы S-ке тең болатын көлемі ең үлкен болатын тікбұрышты параллелепипедті табыңыз.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстің қай нүктесінде жүргізілген жанама координат өстерімен ауданы ең кіші болатын үшбұрыш құрайды.

С.01 Функцияның экстремумын тап:

1) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;

2) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$;

3) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

С.02 Шартты экстремум нүктелерін тап.

1) $u = x^2 + y^2 + z^2$, егер $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a > b > c > 0)$;

2) $u = x - 2y + 2z$, егер $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

С.03 Берілген аймақтағы функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін тап:

1) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, егер $x^2 + y^2 \le 25$;

2) $z = x + y + z$, егер $x^2 + y^2 \le z \le 1$;

3) $u = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$, егер $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

С.04 Берілген функцияның көрсетілген нүктедегі градиентін тап:

1) $z = x^2 + y^2$, (3;2) нүктеде;

2) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, (2;1) нүктеде;

3) $z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, (x_0, y_0) нүктеде.

Құрастырушы: алгебра және математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы М.Құдайберген

200_ ж. «__» ___________ кафедра отырысында **құпталған.** Хаттама №___

Кафедра меңгерушісі _________________ И.И.Павлюк

Тәжірибелік сабақтарға дайындалуға арналған тапсырмалар

2 тақырып Еселі интегралдар

Еселі интегралдар. Екі еселі интегралдар. Үш еселі интегралдар. Олардың қолданулары. Грин формуласы.

Есептер

A.01 Еселі интегралдың интегралдау ретін ауыстыр

1) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$; 2) $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$;

3) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy$; 4) $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$;

5) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$; 6) $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy..$

A.02 Берілген сызықтармен шенелген еселі интегралдарды есептеңдер

1) $\iint_D xy^2dxdy,\ D: y = x^2,\ y = 2x$;

2) $\iint_D x^2ydxdy,\ D: y = 2 - x,\ y = x,\ x = 0$;

3) $\iint_D (y - x)dxdy,\ D: y = x,\ y = x^2$;

4) $\iint_D x^3y^2dxdy, \quad D: x^2 + y^2 \le R^2;$

5) $\iint_D (x^2 + y)dxdy, \quad D: y = x^2,\ y^2 = x;$

6) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy, \quad D: y = x,\ yx = 1,\ x = 2;$

7) $\iint_D \cos(x + y)dxdy, \quad D: y = x,\ y = \pi,\ x = 0;$

8) $\iint_D (x + 2y)dxdy, \quad D: y = x,\ y = 2x,\ x - 2,\ x = 3;$

9) $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy, \quad D: y = x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0;$

10) $\iint_D (3x^2 - 2xy + y)dxdy, \quad D: y = 2,\ y^2 = x,\ x = 0;$

11) $\iint_D y\ln ydxdy, \quad D: xy = 1,\ y = \sqrt{x},\ x = 2;$

12) $\iint_D \cos 2x + \sin y)dxdy, \quad D: 4x + 4y - \pi = 0,\ y = 0,\ x = 0;$

A.03 Тікбұрышты аймақта берілген екі еселі интегралдарды есептеңдер.

1) $\iint\limits_D xydxdy,\ D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$;

2) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy,\ D: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$;

3) $\iint\limits_D x^2 y\cos(xy^2)dxdy,\ D: 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le 2$;

4) $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy,\ D: 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$;

5) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy,\quad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$;

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}dxdy,\quad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$;

7) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy,\quad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$;

8) $\iint\limits_D x^2 ye^{xy}dxdy,\quad D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$;

9) $\iint\limits_D x\ln ydxdy,\quad D:\ 0 \le x \le 4,\ 1 \le y \le e$;

10) $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy,\quad D:\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}$.

А.04 Полярлық координаттар жүйесіне көшу арқылы еселі интегралдарды есептеңдер.

1) $\iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)dxdy,\ D: x^2 + y^2 \le \pi$;

2) $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy,\ D: x^2 + y^2 = 2ax$;

3) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy,\ D: x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = 4a^2$;

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$ интегралындағы x,y айнымалыларын $x = u(1 - v),\ y = u \cdot v$ ауыстырулары арқылы есептеңдер.

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}dy$.

Б.01 Интегралдарды есепте.

1) $\iint\limits_D ydxdy,\ D:$ центрі $O\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ нүктесінде, ал диаметрі а-ға тең жоғарғы жарты дөңгелек.

2) $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, егер D: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \ge 0)$ лемнискатамен шенелген аймақ.

3) $\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипспен шенелген аймақ.

4) $\iint\limits_D (h - 2x - 3y)dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le R^2$ дөңгелегі.

5) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, D: $x^2 + y^2 \ge 1, x^2 + y^2 \le 9, y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, y \le \sqrt{3}x$ сызықтармен шенелген сақина бөлігі.

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}dxdy,$ егер $D:\ y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2}$;

7) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy,$ егер $D:\ x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9},\ x^2 + y^2 = \pi^2$;

8) $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy,$ егер $D: x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = 4a^2$.

А.05 Мына беттермен шенелген дененің қөлемін есепте.

1) $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0$;

2) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1$;

3) $az = y^2,\ x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0$;

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = \frac{b}{a}x,\ y = 0,\ z = 0$;

5) $z = 2 - (x^2 + y^2),\ x + 2y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

6) $z = 2x^2 + 3y^2,\ \ y = x^2,\ y = x,\ z \ge 0$;

7) $z = 4 - x^2,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

8) $z = 10 + x^2 + 2y^2,\ \ y = x,\ x = 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

9) $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

10) $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$;

11) $y = 1 - z^2, y = x,\ y = -x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$;

12) $z = 2 - x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ z \ge 0$.

Б.02 Дененің көлемін полярлық координаталар жүйесінде есептеңдер.

1) $x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$;

2) $2az = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - z^2 = a^2,\ z = 0$;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид);

4) $2az = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ (параболоидпен шенелген дене).

А.06

1) $6x + 3y + 2z = 12$ жазықтықтың бірінші ширектегі бөлігі бетінің ауданын есепте.

2) $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндрінің ішінде жатқан $y^2 + z^2 = x^2$ бөлігі бетінің ауданын тап.

3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шар бетінің $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ бетпен қиылған бөлігінің ауданын есепте.

Б.03

1 $y = x^2,\ y = 2x^2, x = 1,\ x = 2$ сызықтармен шенелген ауданның ауырлық центрінің координаттарын тап.

2 $y^2 = ax$ парабола және $x = a,\ y = 0\ (y > 0)$ түзулерімен шенелген фигураның ауырлық центрінің координаттарын тап.

3 $y^2 = 2px$ парабола және $x = 2p$ түзуімен шенелген фигураның ауырлық центрінің координаттарын тап.

С.01

1 $\rho = a(1 + \cos\theta)$ кардиоидамен шенелген фигураның ауырлық центрінің координаталарын тап.

2 Тығыздығы $\rho(x, y) = 3{,}5$ болатын, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ сызығымен шенелген фигураның инерция моментін есепте.

3 $\rho(x, y) = 2$ деп алып, қабырғалары 4см және 6см тікбұрышты пластинканың инерция моментін, оның диагоналдарының қиылысу нүктесі бойынша есепте.

4 $x + y = 2,\ x = 2,\ y = 2$ түзулерімен шенелген ұшбұрыштың инерция моментін Ох µсі бойынша есепте.

С.02

1 $\rho(x, y) = 1$ деп алып, қырлары а, в және с тікбұрышты параллелпипедтің статикалық моментін оның жақтары бойынша есепте.

2 $(x^2 + y^2 + z)^2 = a^3 z$ бетпен шенелген тығыздығы $\rho(x, y) = 1$ болатын дененің ауырлық центрінің координаттарын тап.

А.01 Үш еселі интегралды есепте:

1 $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz$ 2 $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyzdz$

3 $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz$

Б.01

1 $\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz,\ \Omega$-аймағы $x + y = 1,\ z = 0\ (z \ge 0)$ жазықтықтарымен және $z = xy$ гиперболалық параболоидпен шенелген.

2 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z + x) dxdydz,\ \Omega$- аймағы $y = 0,\ z = 0,\ x + z = \frac{\pi}{2}$ жазықтықтары және $y = \sqrt{x}$ цилиндрмен шенелген.

Б.02 **Цилиндрлік немесе сфералық координатқа ауысу арқылы интегралдарды есепте:**

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz$;

2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$;

3) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$;

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

5) $z=4-y^2,\ z=y^2+2$ цилиндрлер және $x=-1,\ x=2$ жазықтықтармен шенелген дененің көлемін тап.

С.01 Үш еселі интегралды есепте

1) $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz$

2) $\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω-аймағы $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ жазықтықтармен шенелген.

С.02 **Берілген беттермен шенелген дененің ауырлық центрінінің координаттарын тап:**

1) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=4,\ x+y+z=8$ жазықтықтар (қиық конус).

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид және координаттық жазықтықтар (дене бірінші квадрантта).

3) $z=\frac{y^2}{2}$ цилиндр және $x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y-12=0$ жазықтықтары.

4) $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x}$ цилиндрлер және $z=0,\ x+z=6$ жазықтықтары.

Құрастырушы: алгебра және математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы М.Құдайберген

200_ ж. «__» ____________ кафедра отырысында **құпталған.** Хаттама №__

Кафедра меңгерушісі __________________ И.И.Павлюк

Тәжірибелік сабақтарға дайындалуға арналған тапсырмалар

3 тақырып Дифференциалдық теңдеулер

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Реттерін төмендетуге мүмкіндігі бар жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Біртектес және біртектес емес сызықтық дифференциалдық теңдеулер. Коэффициенттері тұракты сызықтық дифференциалдық теңдеулер.

А.04 1) $xy' - y = 0$; **2)** $xy' + y = 0$;
3) $yy' + x = 0$; **4)** $y' = y$.

А.05 **1)** $x^2y' + y = 0$; **2)** $y' = \frac{x}{y}$;
3) $y^2y' + x^2 = 1$; **4)** $xy' = 2y$.

А.06 **1)** $(x+1)y' + xy = 0$; **2)** $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$;
3) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; **4)** $xyy' = 1 - x^2$.

А.07 **1)** $yy' = \frac{1-2x}{y}$; **2)** $xy' + y = y^2$;
3) $y - xy' = 1 + x^2y'$; **4)** $(1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0$

А.08 **1)** $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2$; **2)** $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$;
3) $y' = 10^{x+y}$; **4)** $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

В.05 **1)** $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$; **2)** $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$;
3) $y' = \cos(x+y)$; **4)** $y' = \frac{1}{2x+y}$.

В.06 **1)** $y' = (4x + +y + 1)^2$; **2)** $y' = \sin(y - x - 1)$;
3) $2y'\sqrt{x} = y,\ y(4) = 1$; **4)** $x^2y' + y^2 = 0,\ y(-1) = 1$.

В.07 **1)** $(1+e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$; **2)** $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ y(e) = 1$;
3) $y'\sin x = y\ln y,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; **4)** $(1+y^2)dx - xydy = 0,\ y(1) = 0$.

С.02 **1)** $y'tgx = y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; **2)** $y' + 2y = 3x + 5, y(0) = 2$;
3) $dy - 2\sqrt{y}\ln xdx = 0, y(e) = 1$.

С.03 **1)** $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, y(1) = 1$; **2)** $y' = e^{x+y}, y(0) = 0$;
3) $y'tgx - y = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

А.09 **1)** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$; **2)** $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

3) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; 4) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

A.10 1) $y^2 + x^2 y' = xyy'$; 2) $y' = \frac{x - y}{x + y}$;

3) $(x - y)dx + xdy = 0$; 4) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

A.11 1) $x^2 dy = (y^2 - xy + x^2)dx$; 2) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$;

3) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; 4) $2x^2 y' = x^2 + y^2$.

B.08 1) $y' - \operatorname{tg}\frac{y - 2x}{x + 1} = \frac{y + 2}{x + 1}$;

2) $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$;

3) $(x + y)dx + (x - y - 2)dy = 0$;

4) $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$

B.09 1) $8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$;

2) $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$;

3) $xy' = y\ln\frac{y}{x}, y(1) = 1$;

4) $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, y(1) = 1$.

A.12 1) $y' + x^2 y = x^2$; 2) $xy' + y = e^x$;

3) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; 4) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

A.13 1) $y' = \frac{3y}{x} + x$; 2) $y' + y\operatorname{tg}x = \frac{1}{\cos x}$;

3) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$; 4) $xy' + y = \ln x + 1$.

A.14 1) $(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2$; 2) $y' + 2y = e^{2x}$;

3) $y' + y\cos x = \sin 2x$; 4) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x - 2)}{x}$;

A.15 1) $y'x + y = -xy^2$; 2) $y' = x^3 y^3 - xy$;

3) $xy' + y = y^2 \ln x$; 4) $xy' + 2y = x^5 y^2$.

A.16 1) $y' + 2y = 4x$; 2) $y' + y = \cos x$;

3) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$; 4) $y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

B.10 1) $y' = \frac{2y}{x + 1} + e^x (x + 1)^2$; 2) $y' = \frac{y}{x + y^2}$;

3) $xy' = y + x^2 \cos x$; 4) $xy' + x^2 + xy = y$.

B.11 1) $y - y' = y^2 + xy'$; 2) $y' - y\operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}x$;

3) $y' = \dfrac{y}{2\ln y + y - x}$; **4)** $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

B.12 **1)** $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$; **2)** $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$;

3) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0$;

4) $t(1 + t^2)dx = (x + xt^2 - t^2)dt, x(1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

C.04 **1)** $y' = 2y + e^x - x, y(0) = \dfrac{1}{4}$; **2)** $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}, \quad y(1) = 1$;

C.05 **1)** $3dy = -(1 + 3y^3)y\sin x dx, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

2) $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)dy = 0, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$;

A.17 **1)** $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xydy = 0$;

2) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dx = 0$;

3) $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$;

4) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$;

A.18 **1)** $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;

2) $yx^{y-1}dx + x^y\ln xdy = 0$;

3) $(x\cos 2y + 1)dx - x^2\sin 2ydy = 0$;

4) $(\ln y - 2x)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

A.19 **1)** $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx = \dfrac{2ydy}{x^3}$; **2)** $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$;

3) $\dfrac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx + \dfrac{x}{\cos^2(xy)}dy + \sin ydy = 0$;

4) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)ydy = 0$;

B.13 **1)** $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + 2xy - \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1 + x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0$;

2) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0, \quad y(1) = 1$;

3) $3x^2e^y + (x^3e^y - 1)y' = 0, \quad y(0) = 1.$

Интегралдаушы көбейткіштерін тауып, мына толық дифференциалды теңдеулерді шешіңіздер.

B.14 **1)** $\left(x^2+y\right)dx - xdy = 0$; **2)** $\left(x^2+y^2+2x\right)dx + 2ydy = 0$;

3) $2xtgydx + \left(x^2 - 2\sin y\right)dy = 0$; **4)** $\left(e^{2x} - y^2\right)dx + ydy = 0$.

B.15 **1)** $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln x\right)dy = 0$;

2) $(x\sin y + y)dx + \left(x^2\cos y + x\ln x\right)dy = 0$;

3) $\left(1+3x^2\sin y\right)dx - xctgydy = 0$; **4)** $y^2dx + (yx-1)dy = 0$.

C.06 **1)** $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$;

2) $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$; **3)** $\left(\sin x + e^y\right)dx + \cos xdy = 0$.

Әртүрлі есептер

A.20 **1)** $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$; **2)** $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$;

3) $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x+1)}$; **4)** $y' = \frac{y^3}{2\left(xy^2 - x^2\right)}$.

B.16 **1)** $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$;

2) $\left(2y + xy^3\right)dx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$

3) $y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$; **4)** $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$.

C.07 **1)** $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$;

2) $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \frac{x^2+y^2}{x} - 2x$.

A.21 **1)** Берілген $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін және кезкелген нүктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті жанасу нүктесінің абсциссасына тең қисықты табу керек.

2) Берілген $M(-1;1)$ нүктесі арқылы өтетін және кез келген нүктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті жанасу нүктесінің ординатасының квадратына тең қисықты табу керек.

3) Берілген $M\left(1;\sqrt{2}\right)$ нүктесі арқылы өтетін және кез келген нұктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті жанасу нүктесінің абсциссасының ординатасына қатынасына тең болатын қисықты табу керек.

4) Қисықтың жанамасы, жанасу нүктесінің радиус-векторы және Ox өсімен шектелген үшбұрыштың ауданы тұрақты саңға тең болатындай қисықтар үйірін табу керек.

A.22 **1)** Берілген $M(1;3)$ нүктесі арқылы өтетін және кез келген нүктесіндегі жанамасының бұрыштық коэффициенті оның жанасу нүктесінің радиус-векторының бұрыштық коэффициентінен үш есе үлкен болатын қисықты табу керек.

2) Радиус-вектор жанамасының жанасу нүктесі мен Ox өсі арасындағы кесіндісінің ұзындығына тең қисықты табу керек.

3) Берілген $M(2;2)$ нүктесі арқылы өтетін және кез келген нүктесіндегі жанамасының жанасу нүктесі жєне Ox өсімен қиылысу нүктесі арасындағы кесіндісінің проекциясы жанасу нүктесінің екі еселенген абсциссасына тең қисықты табу керек.

4) Жанамасы Оу өсінен жанасу нүктесінің координаталарының қосындысының $\frac{1}{n}$ бөлігіне тең болатындай кесінді қиып өтетін қисықты табу керек.

B.18 1) Координаттар жүйесінің бас нүктесі арқылы өтетін және кезкелген $[a, x]$ кесіндісінде осы қисықтың доғасымен шектелген
қисық сызықты трапецияның ауданы доғаның шеткі нүктесінің ординатасының куб дәрежесіне тең болатын қисықты табу керек.

2) Берілген $M(1;1)$ нүктесі арқылы өтетін және кез келген нүктесіндегі жанамасының абсцисса өсінен қиятын кесіндісінің ұзындығы осы жанама кесіндісінің ұзындығына тең болатын қисықты табу керек.

3) Берілген $M(1;0)$ нүктесі арқылы өтетін және қисықтың жанамасымен координат остерімен және жанасу нүктесінің ординатасымен шенелген трапецияның ауданы тұрақты және $\frac{3}{2}$ - ке тең болатындай қисықты табу керек.

4) Дене абсцисса өсінің бойымен $v = 2t - t^2$ жылдамдықпен қозғалады. Дененің $t = 0$ болғанда $x = 10$ болатын шартты қанағаттандыратын теңдеуін жазу керек.

B.19 1) Радийдің ыдырау жылдамдығы оның шамасына пропорционал. Радийдің бастапқы қорының жартысы 1600 жыл ішінде ыдырайтындығы белгілі. Олай болса 100 жылдан кейін оның неше проценті ыдырайтындығын анықтау керек.

2) Температурасы $20^{0}C$ бөлмеде $100^{0}C$ дейін қыздырылған дене 20 мин. ішінде $60^{0}C$ - ға дейін суыйды. Дененің суу заңдылығын табу керек. Егер дененің суу жылдамдығы сол сәттегі дененің температурасы мен бөлмедегі ауаның температурасының айырмасына пропорционал болса дененің неше минутта $30^{0}C$-ға дейін суыйтындығын анықтау керек.

3) Егер температурасы $20^{0}C$ бөлмеде дене 10 минут ішінде $40^{0}C$-ға дейін суыса, онда $100^{0}C$-ға дейін қыздырылған дене қанша уақытта $24^{0}C$ дейін суыйды?

4) Қалыңдығы $h = 10$ см. тақтайға оқ $v_0 = 200\,{}^{м}\!/_{сек}$ жылдамдықпен кіреді де $v_1 = 80\,{}^{м}\!/_{сек}$ жылдамдықпен шығады. Оқтың тақтайда қозғалысына кедергі күш жылдамдықтың квадратына пропорционал болса, онда оқтың тақтайды қанша уақытта тесіп өтетіндігін анықтау керек.

C.07 1) Резервуардағы 100 литр ертіндінің 10 литрі тұз. Резервуарға минут сайын 30 литр таза су құйылады да 20 литр қоспа ағып кетеді. Қоспа үздіксіз арастырылады деп есептеп t минуттан кейін резервуарда қанша тұз қалатынын анықтау керек.

2) Моторлы қайық тынық суда $5\,{}^{м}\!/_{сек}$ жылдамдықпен қозғалады.
Осы жылдамдықпен келе жатып ќайыќ моторы өшірілсе 40 секундтан кейін оның жылдамдығы $2\,{}^{м}\!/_{сек}$ дейін азаяды. Судың кедергісі қайықтың қозғалу жылдамдығына пропорционал деп есептеп мотор өшкеннен 2 минуттан кейін қайықтың жылдамдығы қандай болатындығын анықтау керек.

C.08 1) Массасы m материалдық нүкте түзу сызықты бағытпен оны өзіне $\frac{mk^2}{r^2}$ күшпен тартатын ортаға қарай қозғалады. Мұндағы r-нүктеден ортаға дейінгі қашықтық. Қозғалыс $r = a$ болғандағы тыныштық күйінен басталады. Нүктенің өзін тартқан ортаға қанша уақытта жететіндігін анықтау керек.

2) Кедергісі R, өздік индукциясы L және электр қозғаушы күші E болатын тізбектегі ток күші $L\frac{dJ}{dt} + RJ = E$ дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады. Мұндағы R және L шамаларын тұрақты деп есептеп, ал электрқозғаушы $E = kt$ заңдалағымен өзгереді депалыпосы теңдеудің шешімін табу керек Алғашқы шарт $t = 0$ болғанда $J = 0$ түрінде берілген.

А.27 Мына дифференциалдық теңдеулердің жалғыз ғана шешімі бар болатын облыстарын табу керек.

$$a)\ y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$$

$$b)\ y'' = y' \ln y'.$$

А.28 Мына дифференциалдық теңдеулер үшін жалғыз ғана шешімнің бар болуы туралы теореманың шарттары орындалатындығын тексеріп, немесе қандай нүктелерде теореманың шарттары орындалмайтындығын көрсету керек.

$$a)\ y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}, \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$$

$$b)\ (4 - x^2)y'' + 2xy' + \frac{(1+x^2)y}{x-3} = e^x$$

$$c)\ (5 - 2x)y''' + \frac{4}{1-x^2}y'' - \frac{7}{x^2 - y^2} = 0$$

$$d)\ y''' = \frac{8y'}{x^2 + y^2 - 16}$$

$$e)\ y'' = \sqrt[3]{(y')^2}$$

А.29 Берілген функциялар оларға сәйкес дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі болатындығын көрсету керек.

$$a)\ y = x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt + \cos x + C_1 x + C_2; \qquad xy'' = \sin x$$

$$b)\ y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3; \quad xy''' = 2;$$

$$c)\ y = C_1 \sin x + C_2 \cos x; \quad y'' + y = 0;$$

d) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}; \quad y^{//}-y^{/}-2y=0;$

e) $y=C_1x+C_2x^2; \; y^{//}-2\dfrac{y^{/}}{x}+2\dfrac{y}{x^2}=0;$

f) $y=C_1x+C_2\mathbf{l}nx; \; x^2(1-\mathbf{l}nx)y^{//}+xy^{/}-y=0;$

h) $y=C_1x+C_2x\int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt; \; y^{//}x\sin x-y^{/}x\cos x+y\cos x=0;$

j) $y=\dfrac{1}{x}(C_1e^{x}+C_2e^{-x}); \; xy^{//}+2y^{/}-xy=0$.

Б.26 Мына теңдеулердің ретін төмендетіп шешімдерін табу керек.

1) $y^{///}=-\cos x$; 2) $y^{///}=\dfrac{2}{x^3}$; 3) $y^{//}=e^x+\dfrac{3}{4}x^{5/2}$;

4) $yy^{//}=y^{/3}$; 5) $yy^{//2}=1$; 6) $1+y^{/2}=2yy^{//}$;

7) $xyy^{//}-xy^{/2}-yy^{/}-\dfrac{bxy^{/2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=0$

8) $x^2(yy^{//}-y^{/2})+xyy^{/}=y\sqrt{x^2y^{/2}+y^2}$;

9) $x^2yy^{//}=(y-xy^{/})^2$; 10) $yy^{//}-y^{/2}=\dfrac{yy^{/}}{\sqrt{1+x^2}}$;

11) $y^{//}=2yy^{/}$; 12) $y^{//}=y^{/2}y$; 13) $yy^{///}-y^{/}y^{//}=0$;

14) $y^{//}=(1+y^{/2})^{3/2}$;

15) $y^{/}y^{///}-3y^{//2}=0,\; y(0)=0,\; y^{/}(0)=1,\; y^{//}(0)=0.$

А.30 Мына теңдеулерді шешу керек

$$1)\ (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0; \quad 2)\ 2yy'' + y''^2 + y'^4 = 0;$$

$$3)\ xyy'' + y'^2 - yy' = 0; \quad 4)\ yy'' + y'^2 = y^2 \ln y;$$

$$5)\ yy'' = y^2 y' + y'^2; \ 6)\ xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \ 7)\ y'' + \frac{1}{1-y} y'^2 = 0;$$

$$8)\ y''' - \quad y''^3; \quad 9)\ xy'' - \quad y' = e^x x^2; \ 10)\ y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2;$$

$$11)\ (1+x^2)y'' + 2xy' = x^3;$$

$$12)\ 1 + y'^2 = 2yy'', \ y(1) = y'(1) = 1;$$

$$13)\ yy'' + y'^2 = y'^3, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0.$$

Б.27 Мына теңдеулердің ретін төмендетіп шешімін табу керек.

$$1)\ y^{(4)} = \frac{1}{x}; \quad 2)\ xy''' = 2x + 3; \quad 3)\ x^2 y'' = y'^2;$$

$$4)\ y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x; \quad 5)\ xy'' - y' = e^x x^2;$$

$$6)\ yy'' + y'^3 = y'^2; \quad 7)\ y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x;$$

$$8)\ (2y + y')y'' = y'^2; \quad 9)\ y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}; \ 10)\ y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$$

$$11)\ (y-1)y'' = 2y'^2; \ 12)\ y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \ y(2) = 0, \ y'(2) = 4;$$

$$13)\ (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1;$$

$$14)\ yy'' - y'^2 = y^2, y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$15)\ yy'' = 2xy'^2, y(2) = 2, \ y'(2) = 0{,}5$$

$$16)\ 2yy'' + y^2 - y'^2 = 0, \ y(0) = y'(0) = 1.$$

С.12 Массасы *m* дене *F* тұрақты күшінің әсерімен түзу сызық бойымен қозғалады. Егер дененің қозғалу жылдамдығы мен жүрген жолы алғашқы уақыт мезгілінде нөлге тең, ал ортаның кедергісі жылдамдықтың квадратына тең болса, онда дененің қозғалу жылдамдығы мен уақыттың функциясы болатын жолдың қандай болатындығын табу керек.

С.13 Массасы *m* дене алғашқы V_0 жылдамдықпен тік жоғары көтеріледі. Ауаның кедергісі дененің жылдамдығының квадратына пропорционал деп алып *(k>0),* дененің көтерілу биіктігі және алғашқы күйіне қайтып келгендегі жылдамдығын, сонымен қатар, дененің көтерілу және түсу уақыттарын табу керек.

С.14 Салмағы *300кг* моторлы қайық $66\,{}^{м}\!/_{сек}$ алғашқы жылдамдықпен тура қозғалады. Судың кедергісі жылдамдыққа пропорционал және $1\,{}^{м}\!/_{сек}$ жылдамдықта *10кг* тең. Қайықтың жылдамдығы қанша уақыттан кейін $8\,{}^{м}\!/_{сек}$ болады.

С.15 Бас нүкте арқылы өтетін қисық берілсін. Осы қисықтың бір нүктесіндегі жанамасы, сол нүктенің ординатасы және *Ox* өсімен шенелген үшбұрыштың ауданы осы қисық, *Ox* өсімен және осы нүктенің ординатасымен шенелген қисықсызықты трапецияның ауданына тең болатын қисықты табу керек.

Есептер

Белгілі сипаттауыш теңдеуі бойынша біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеу құру керек

А.39

1) $k^2+3k+2=0$; 2) $k(k+1)(k+2)=0$; 3) $k^3=0$;

4) $k^5-5k^4+12k^3+6k^2+12k-4=0$; 5) $9k^2-6k+1=0.$

А.40

1) $(k^2+1)^2=0$; 2) $2k^2-3k-5=0$; 3) $k^2-1=0$;

4) $k^2+2k+1=0$; 5) $k^3-8=0.$

Белгілі сипаттауыш теңдеуінің түбірлері бойынша біртектісызықтық дифференциалдық теңдеу құрып, оның жалпы шешімін табу керек

А.41 1) $k_1=3,\quad k_2=\ \ 2;$
2) $k_1=k_2=1;$
3) $k_{1,2}=3\pm 2i;$
4) $k_1=k_2=k_3=2;$
5) $k_1=0,\ k_2=k_3=4.$

А.42 1) $k_1=1,\quad k_2=2;$
2) $k_1=3i,\quad k_2=-3i;$
3) $k_1=2i,\quad k_2=-2i;$
4) $k_{1,2}=1\pm i;$
5) $k_1=1,\ k_2=k_3=0;$

Мына дифференциалдық теңдеулерді шешу керек

А.43 1) $y''-y'-2y=0;$
2) $y''+3y'-4y=0;$
3) $4y''+4y'+y=0;$
4) $y''+y'-2y=0;$
5) $y''+3y'=0;$

А.44 1) $3y''+2y'-8y=0;$
2) $9y''-2y'-7y=0;$
3) $y''-2y'+y=0;$
4) $y''+6y'+13y=0;$
5) $y''+\lambda^2 y=0;$

А.45 1) $y'''+2y''-y'-2y=0;$
2) $y'''-2y''+2y'=0;$
3) $4y''-8y'+5y=0;$

А.46 1) $y^{IV}-y=0;$
2) $2y'''-3y''+y'=0;$
3) $3y''-2y'-8y=0;$

4) $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0;$ 4) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0;$

5) $y^{IV} - y'' = 0;$ 5) $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

Мына дифференциалдық теңдеулердің дербес шешімдерін табу керек

Б.34 1) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1;$

2) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$

3) $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8;$

4) $y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3;$

5) $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Б.35 1) $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$

2) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

3) $y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

4) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2;$

5) $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1, y''' \quad y' = 0.$

Құрастырушы: алгебра және математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы М.Құдайберген

200_ ж. «__» ___________ кафедра отырысында **құпталған.** Хаттама №__

Кафедра меңгерушісі ________________ И.И.Павлюк

Тәжірибелік сабақтарға дайындалуға арналған тапсырмалар
4 тақырып Қатарлар

Сан қатарлары және оларға қолданылатын арифметикалық амалдар. Жинақтылық. Мүшелері оң таңбалы сан қатарларының жинақтылығының қажетті және жеткілікті белгілері. Ауыспалы таңбалы сан қатарлары. Лейбниц белгісі. Функционалдық қатарлар. Дәрежелік қатарлар. Тейлор мен Маклорен қатарлары, қолданулары. Фурье қатарлары. Тригонометриялық қатар және оның негізгі қасиеттері. Фурье қатарына жіктеу.

Сандық қатарлардың жинақталуы:

А.01. Берілген қатарлардың: 1) алғашқы n мүшесінің қосындысын тап (n-ші дербес қосынды S_n); 2) анықтама бойынша қатардың жинақтылығын дәлелде; 3) қатардың қосындысын тап.

1) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$$

2) $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$$

3) $$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots;$$

4) $$\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots.$$

Б.01. Берілген қатарлардың: **1)** n-ші дербес қосындысын тап; **2)** анықтама бойынша қатардың жинақтылығын дәлелде; **3)** қатардың қосындысын тап.

1) $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$$

2) $$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$$

3) $$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots.$$

Мүшелері оң сан болатын қатарлар:

А.02. Салыстыру белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\ldots;$$

2) $$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots;$$

3) $$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots;$$

4) $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}+\ldots.$$

Б.02. Салыстыру белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right);$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right).$

А.03. Даламбер белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}};$

4) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots.$

А.04. Коши белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\,\frac{1}{n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$

А.05. Кошидің интегралдық белгісін пайдаланып, берілген қатардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}.$

А.06. Берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}};$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1};$ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}};$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!};$ $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n};$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$

Таңбалары ауыспалы қатарлар. Абсолют жинақтылық

А.07. Берілген қатарлардың қайсысы абсолют, қайсысы шартты жинақты болатынын, қайсысы жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\alpha}{n^2}, \quad \alpha>0;$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n-\ln n}.$

Б.03. Егер $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ және $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ қатарлары жинақталса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ қатарының абсолют жинақталатынын көрсет.

Есептер

А.01. Берілген қатарлардың жинақталу аймағын тап:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n};$

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2^n}.$

А.02. Берілген қатарлардың Ох өсінде бірқалыпты (дұрыс) жинақталатынын көрсет:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left[1+(nx)^2\right]};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2};$

А.03. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\left[\varphi(x)\right]^2};$ қатары $\varphi(x)$ анықталған кез келген аймақта бірқалыпты (дұрыс) жинақталатынын көрсет.

Қатарларды интегралдау және дифференциалдау:

Б.01. $x^2+x^6+\ldots+x^{4n\ \ 2}$ қатарының $-1+\omega\le x\le 1-\omega$ аралығында бірқалыпты жинақталатынын көрест. Мұндағы w бірден кіші

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$$

қатарының $(-1;1)$ аралығындағы қосындысын тап.

Б.02. Берілген қатарлардың қосындысын тап:

1) $x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots;$

2) $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots;$

Б.03. $f(x)$ функциясы $f(x)=e^{-\ x}+2e^{\ 2x}+\ldots+n\,e^{-nx}+\ldots$ түрінде анықталған. Осы функция x - тің барлық оң мәндерінде үзіліссіз болатынын көрсетіп, $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 1}f(x)dx$ интегралын есепте.

Б.04. $f(x)$ функциясы

$$f(x)=1+2\cdot 3x+3\cdot 3^2x^2+\ldots+n\cdot 3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

түрінде анықталған. Осы функция $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ аралығында үзіліссіз болатынын көрсетіп, $\int\limits_{0}^{0{,}125}f(x)dx$ интегралын есепте.

Есептер

А.01. Берілген дәрежелік қатарлардың жинақталу аймағын тап:

1) $10x+100x^2+\ldots+10^n x^n+\ldots;$

2) $x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n};$

3) $x+\frac{x^2}{2\cdot 10}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}};$

4) $1+x+2!x^2+\ldots+n!x^n+\ldots;$

5) $1+2(x-1)^2+\ldots+2^{n-1}(x-1)^{2(n-1)}+\ldots.$

Б.01. Берілген дәрежелік қатарлардың жинақталу аймағын тап:

1) $(x+1)-\frac{1}{3\cdot 3!}(x+1)^3+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}(x+1)^{2n-1}+\ldots;$

2) $1+3(x+2)+\ldots+(n-1)3^{n-1}x^{n-1}+\ldots;$

3) $\frac{1}{1\cdot 2}x+\frac{1}{2\cdot 3}x^2+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}x^n+\ldots.$

Б.02. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$ қатарының жинақталу аймағын тап.

Нұсқау: n - нің үлкен мәндерінде Стирлингтің $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ жуық теңдігін пайдалан.

Б.03. Берілген дәрежелік қатарлардың жинақталу аймағын тап:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1};$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n.$

A.01 Берілген функцияны көрсетілген нүктенің маңайында Тейлор қатарына жікте:

1) $y=\ln x,\quad x_0=1;$

2) $y=\sqrt{x^3},\quad x_0=1;$

3) $y=\sin\frac{\pi x}{4},\quad x_0=2;$

A.02 Берілген функцияны Маклорен қатарына жікте:

1) $y=x^2\cdot e^x,$

2) $y=e^x\cdot\sin x,$

3) $y=\cos x\cdot \mathrm{ch}x,$

A.03 e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$ және $\ln(1+x)$ функциялардың Маклорен қатарына жектелуін пайдаланып, берілген функцияларды Маклорен қатарына жікте:

1) $y=e^{-x^2},$

2) $y = \begin{cases} \dfrac{e^{x^3} - e^{-x^3}}{2x^3}, \text{ егер } x \neq 0 \\ 1, \quad \text{егер } x = 0 \end{cases}$,

3) $y = \cos^2 x$,

4) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{ егер } x \neq 0 \\ 1, \quad \text{егер } x = 0 \end{cases}$,

5) $y = \ln(10 + x)$,

6) $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

А.04 e^x, $\sin x$, $\cos x$ және $(1+x)^m$ функцияларының Маклорен қатарына жектелуін пайдаланып, берілген өрнектердің мәндерін көрсетілген дәлдіктеп тап:

1) $\sqrt{e}$-ні $0{,}001$ дәлдікке дейін;

2) $y = \sin 1^0$-ты $0{,}0001$ дәлдікке дейін;

3) $y = \cos 10^0$-ты $0{,}0001$ дәлдікке дейін;

4) $y = \sqrt[10]{1027}$-ні $0{,}001$ дәлдікке дейін.

Б.02. $y = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ функциясын $x = 0$ нүктесінің маңайында Тейлор қатарына жікте. Осы жіктеуді пайдаланып $1 + \dfrac{4}{2} + \ldots + \dfrac{n^2}{2^{n-1}} + \ldots$ қатарының қосындысын тап.

Б.03. Берілген функцияны Тейлор қатарына жіктеу арқылы төмендігі шектерді тап:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(\mathrm{tg}x - \sin x) - x^3}{x^5}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)}$;

А.01. $(-\pi;0)$ интервалында -1-ге $(0;\pi)$ интервалда 1-ге тең функцияны Фурье қатарына жікте. $-\pi, 0, \pi$ нүктелерінде Фурье қатары қандай санға жинақталатынына көніл аудар.

А.02. $y = x^2$ функциясын $(-p;p)$ интервалында Фурье қатарына жікте.

А.03. $y = x^3$ функциясын $(-p;p)$ интервалында Фурье қатарына жікте.

А.04. $f(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{егер} \quad -\pi < x < 0, \\ 3, \quad \text{егер} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ функциясын Фурье қатарына жікте.

Б.01. $y = x^2$ функциясын $(0;2\pi)$ интервалында Фурье қатарына жікте.

Б.02. $y = x^2$ функциясын $(-\pi;\pi)$ интервалында Фурье қатарларына жіктелуін пайдаланып (А.02);

1) $S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

2) $S_1 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots$

қатарының қосындысы S_1 мен S_2-ні тап.

Б.03. $y = |x|$ функциясын $(-l;l)$ арлығында Фурье қатарына жікте.

Б.04. Фурье қатарының кешен пішінің пайдаланып, берілген функцияны көрсетілген аралығында Фурье қатарына жікте:

1) $y = e^x, \quad (-l;l)$ аралығында;

2) $e^x - 1, \quad (0;2\pi)$ аралығында.

Құрастырушы: алгебра және математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы М.Құдайберген

200_ ж. «__» ____________ кафедра отырысында **құпталған.** Хаттама №__

Кафедра меңгерушісі _________________ И.И.Павлюк

Тәжірибелік сабақтарға дайындалуға арналған тапсырмалар

5 тақырып Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика.

Ықтималдық теориясының элементтері. Оқиғалар және олардың ықтималдықтары. Ықтималдықтарды қосу және көбейту теоремалары. Толық ықтималдық. Байес формуласы. Бернулли формуласы.Пуассон формуласы. Кездейсоқ шамалар. Дискретті және үздіксіз кездейсоқ шамалар. Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары. Үлкен сандар заңы. Чебышев теңсіздігі. Математикалық статистика элементтері. Таңдама. Үлестіру функциясы. Статистикалық қатарды өңдеу. Корреляциялық талдау элементтері.

1 Студент емтиханның 60 сұрағының 45-ін дайындаған өрбір емтихан билеті үш сұрақтан түрады. Мына өқиғалардың ықтималдықтарын анықта: студент емтихан билетінің а) үш сұрағын біледі; б) тек қана екі сұрағын біледі; в) тек қана бір сұрағын біледі.

2. Екі жәшіктің әрқайсысында 5 ақ және 10 қара шар бар. Бірінші жәшіктен қалай болса солай бір шар алынып, екінші жәшікке ауыстырылған, содан кейін екінші жәшіктен бір шар алынған. Сол алынғаң шардың қара болуының ықтималдығы қандай?

3. Үш атқыш бір-біріне тәуелсіз нысанаға бір дүркін оқ атқан. Олардың нысанаға оқ тигізу ықтималдықтары: 0,9; 0,8; 0,7. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын есепте: атқыштардың а) тек қана біреуі; б) тек қана екеуі; в) үшеуі де нысанаға оқ тигізеді.

4. Оқиғаның әрбір тәуелсіз сынауда пайда болу ықтималдығы 0,8 болса, онда1600 сынауда оқиғаның 1200 рет пайда болу ықтималдығы қандай.

5. Оқиғаның әрбір тәуелсіз сынауда пайда болу ықтималдығы 0,02 болса, онда 150 сынауда оқиғаның 5 рет пайда болу ықтималдығы қандай?

6. Бір партиядағы 1000 бұйымның 10 жарамсыз. Осы партиядан алынған 50 бұйымның үшеуі жарамсыз болуының ықтималдығы қандай?

7. Оқиғаның әрбір тәуелсіз сынауда пайда болу ықтималдығы 0,8. Оқиғаның 125 сынауда 75 тен 90-ға дейін пайда болу ықтималдығы қандай?

8. Үш станокта бірдей және тәуелсіз біркелкі бөлшек тер жасалады. Бірінші станокта барлық бөлшектің 10% -і, екіншіде 30% -і, ал үшінші станокта 60% -і жасалады. Бөлшектің жарамды болуының ықтималдығы: бірінші станок үшін 0,7; екінші үшін 0,8 және үшінші станок үшін 0,9. Қалай болса солай алынған бөлшек жарамды болуының ықтималдығы қандай?

9. Ағалы-інілі балалар 12 адамнан тұратын екі команданыңқұрамына кіреді. Екі жәшікте нөмірлері 1-12 дейін билеттер бар. Әрбір команда мүшесі белгілі бір жәшіктен бір билеттен алады (билет жәшікке қайта салынбайды). Ағайынды екеуі де 6-шы нөмір билет алу ықтималдығын есепте.

10. Үш мерген бірдей және тәуелсіз жағдайда бір реттен атты. Бірінші мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,9; екінші мергеннің нысанаға тигізуінің ықтималдығы 0,8; үшінші мергеннің тигізуінің ықтималдығы 0,8. Мынадай ықтималдықтарды тап:а) тек бір мерген нысанаға тигізді; б) тек екі мерген нысанаға тигізді; в) үшеуі де нысанаға тигізді.

11. Екі рет оқ атқанда кем дегенде бір рет нысанаға тигізудің ықтималдығы 0,96-ға тең. 4 рет атқанда 3 рет тигізудің ықтималдығын тап.

12. Әрбір тәуелсіз сынақта оқиғаның пайда болуының ықтималдығы 0,8 тең. 100 сынақта оқиға 70 кем емес және 80 үлкен емес рет пайда болуының ықтималдығын тап.

13. Әрбір тәуелсіз сынақта оқиғаның пайда болуының ықтималдығы 0,2 тең. 900 сынақ жүргізілді. Оқиғаның пайда болуының салыстырмалы ықтималдығынан айырмасы 0,04 екенінің ықтималдығын тап.

14. Бір минутта әуежайға келетін ұшақтардың орта саны 2-ге тең. 3 минутта әуежайға келетін самолет саны: а) 2; б) 2-ден кем; в) 2-ден кем емес екенінің ықтималдығын тап.

15. Әрбір тәуелсіз сынақта оқиғаның пайда болуының ықтималдығы 0,8 тең. Қанша сынақ жүргізгенде оқиғаның салыстырмалы жиілігі мен ықтималдығының айырмасы 0,02 үлкен емес ықтималдығы 0,95 тең болады?

1-15. Дискретті кездейсоқ шама мүмкіншілігі бойынша 2 мән қабылдайды: x_1 және x_2 ($x_1<x_2$). Егер математикалық үміті, дисперсиясы, x_1 сәйкес P_1 ықтималдығы берілген болса, қалай үлестірім занын құруға болады?

1. P_1=0,9, M(x)=2,2, D(x)=0,36.
2. P_1=0,1, M(x)=3,9, D(x)=0,09.
3. P_1=0,2, M(x)=3,8, D(x)=0,16.
4. P_1=0,3, M(x)=3,7, D(x)=0,4.
5. P_1=0,4, M(x)=3,6, D(x)=0,24.
6. P_1=0,5, M(x)=3,5, D(x)=0,25.
7. P_1=0,6, M(x)=3,4, D(x)=0,24.
8. P_1=0,7, M(x)=3,3, D(x)=0,21.
9. P_1=0,8, M(x)=3,2, D(x)=0,16.
10. P_1=0,9, M(x)=3,1, D(x)=0,09.
11. P_1=0,1, M(x)=5,5, D(x)=2,25.
12. P_1=0,3, M(x)=3,7, D(x)=0,21.
13. P_1=0,9, M(x)=3,4, D(x)=0,09.
14. P_1=0,5, M(x)=2,5, D(x)=6,25.
15. P_1=0,1, M(x)=3,9, D(x)=0,09.

1-15. Кездейсоқ шаманың ықтималдықтар үлестірілуінің интегралдық функиясы берілген. Табу керек үлестірілуінің дифференциалдық функциясын, математикалық үмітін, дисперсиясын. Функциялардың графиктерін салу керек.

1. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{100} & при \quad 0<x\le 10,\\ 1 & при \quad x>10,\end{cases}$ 2. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{81} & при \quad 0<x\le 9,\\ 1 & при \quad x>9,\end{cases}$ 3. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{64} & при \quad 0<x\le 8,\\ 1 & при \quad x>8,\end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{49} & при \quad 0<x\le 7,\\ 1 & при \quad x>7,\end{cases}$ 5. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36} & при \quad 0<x\le 6,\\ 1 & при \quad x>6,\end{cases}$ 6. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{25} & при \quad 0<x\le 5,\\ 1 & при \quad x>5,\end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} & при \quad 0<x\le 4,\\ 1 & при \quad x>4,\end{cases}$ 8. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} & при \quad 0<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3,\end{cases}$ 9.

$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} & при \quad 0<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2,\end{cases}$ 10. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x^2 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1 & при \quad x>1,\end{cases}$ 11.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2,\end{cases}$$

12.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 3x^2+2x & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{1}{3},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3},\end{cases}$$

13.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2,\\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4,\\ 1 & \text{при} \quad x>4,\end{cases}$$

14.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2x-1 & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{1}{2},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

15.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ 3x-4 & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{4}{3},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{4}{3},\end{cases}$$

1-15. Қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың математикалық үміті және орташа квадраттық ауытқуы берілген. Кездейсоқ шаманың (α,β) интервалында жататының ықтималдығын табу керек.

1. $\alpha=2$, $\beta=13$, $a=10$, $\sigma=4$.
2. $\alpha=5$, $\beta=14$, $a=9$, $\sigma=5$.
3. $\alpha=4$, $\beta=9$, $a=8$, $\sigma=1$.
4. $\alpha=3$, $\beta=10$, $a=7$, $\sigma=2$.
5. $\alpha=2$, $\beta=11$, $a=6$, $\sigma=3$.
6. $\alpha=1$, $\beta=12$, $a=5$, $\sigma=1$.
7. $\alpha=2$, $\beta=11$, $a=4$, $\sigma=5$.
8. $\alpha=3$, $\beta=10$, $a=3$, $\sigma=2$.
9. $\alpha=4$, $\beta=9$, $a=2$, $\sigma=5$.
10. $\alpha=6$, $\beta=10$, $a=2$, $\sigma=4$.
11. $\alpha=3$, $\beta=6$, $a=1$, $\sigma=2$.
12. $\alpha=4$, $\beta=7$, $a=2$, $\sigma=1$.
13. $\alpha=5$, $\beta=8$, $a=3$, $\sigma=4$.
14. $\alpha=10$, $\beta=12$, $a=6$, $\sigma=8$.
15. $\alpha=11$, $\beta=14$, $a=8$, $\sigma=6$.

1-15. Сенімділік интервалын пайдаланып, статистикалық жинақтың белгілі қалыпты үлестірімді болған жағдайда математикалық үміті 0,95 тең сенімділікпен бағалаңыздар, егер $\overline{x}$ таңдамалы ортасы, n таңдаманың көлемі және σ орта квадраттық ауытқуы белгілі болса.

1. $\overline{x}=75{,}17$, $\sigma=6$, $n=36$.
2. $\overline{x}=75{,}16$, $\sigma=7$, $n=49$.
3. $\overline{x}=75{,}15$, $\sigma=8$, $n=64$.
4. $\overline{x}=75{,}14$, $\sigma=9$, $n=81$.
5. $\overline{x}=75{,}13$, $\sigma=10$, $n=100$.
6. $\overline{x}=75{,}12$, $\sigma=11$, $n=121$.
7. $\overline{x}=75{,}11$, $\sigma=12$, $n=144$.
8. $\overline{x}=75{,}10$, $\sigma=13$, $n=169$.
9. $\overline{x}=75{,}09$, $\sigma=14$, $n=196$.
10. $\overline{x}=75{,}08$, $\sigma=15$, $n=225$.

11. $\bar{x}=10,4,$ $\sigma=2,$ n=36.
12. $\bar{x}=10,6,$ $\sigma=6,$ n=64.
13. $\bar{x}=11,0,$ $\sigma=5,$ n=100.
14. $\bar{x}=11,8,$ $\sigma=4,$ n=16.
15. $\bar{x}=12,2,$ $\sigma=6,$ n=36.

1-15. Корреляция таблицасы берілген. Регрессияның түзу сызықтарының тандама теңдеулерін мынадай формула бойынша $\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ табу керек.

У	**X**						n_y
	5	10	15	20	25	30	
45	2	4	–	–	–	–	6
55	–	3	5	–	–	–	8
65	–	–	2	35	5	–	45
75	–	–	2	8	17	–	27
85	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	n=100

У	**X**						n_y
	10	15	20	25	30	35	
40	2	4	–	–	–	–	6
50	–	3	7	–	–	–	10
60	–	–	5	30	10	–	45
70	–	–	7	10	8	–	25
80	–	–	–	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n=100

У	**X**						n_y
	15	20	25	30	35	40	
15	4	1	–	–	–	–	5
25	–	6	4	–	–	–	10
35	–	–	2	50	2	–	54
45	–	–	1	9	7	–	17
55	–	–	–	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	n=100

У	**X**						n_y
	2	7	12	17	22	27	
110	1	5	–	–	–	–	6
120	–	5	3	–	–	–	8
130	–	–	3	40	12	–	55
140	–	–	2	10	5	–	17
150	–	–	–	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	N=100

y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	
10	3	5	–	–	–	–	8
20	–	4	4	–	–	–	8
30	–	–	7	35	8	–	50
40	–	–	2	10	8	–	20
50	–	–	–	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	n=100

y	X						n_y
	12	17	22	27	32	37	
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	35	4	–	45
55	–	–	2	8	6	–	16
65	–	–	–	14	7	3	124
n_x	2	10	11	57	17	3	n=100

y	X						n_y
	15	20	25	30	35	40	
25	3	4	–	–	–	–	7
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	35	2	–	43
55	–	–	12	8	6	–	26
65	–	–	–	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	n=100

y	X						n_y
	4	9	14	19	24	29	
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	40	2	8	–	50
60	–	–	5	10	6	–	21
70	–	–	–	4	7	3	14
n_x	3	9	49	16	21	3	n=100

y	X						n_y
	5	10	15	20	25	30	

30	2	6	–	–	–	–	8
40	–	5	3	–	–	–	8
50	–	–	7	40	2	–	49
60	–	–	4	9	6	–	19
70	–	–	–	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	n=100

y	**X**						n_y
	10	15	20	25	30	35	
20	5	1	–	–	–	–	6
30	–	6	2	–	–	–	8
40	–	–	5	40	5	–	50
50	–	–	2	8	7	–	17
60	–	–	–	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	N=100

y	**X**						n_y
	15	20	25	30	35	40	
30	3	3	–	–	–	–	6
40	–	5	4	–	–	–	9
50	–	–	8	40	2	–	50
60	–	–	5	10	6	–	21
70	–	–	–	4	7	3	14
n_x	3	8	17	54	15	3	n=100

y	**X**						n_y
	25	30	35	40	45	50	
35	4	2	–	–	–	–	6
45	–	5	3	–	–	–	8
55	–	–	5	45	5	–	55
65	–	–	2	8	7	–	17
75	–	–	–	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	n=100

y	**X**						n_y
	20	25	30	35	40	45	
25	2	4	–	–	–	–	6
35	–	6	3	–	–	–	9
45	–	–	6	45	4	–	55
55	–	–	2	8	6	–	16
65	–	–	–	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	n=100

У	Х						n_y
	25	30	35	40	45	50	
20 30 40 50 60	2 – – – –	4 6 – – –	– 3 6 2 –	– – 45 8 4	– – 4 6 7	– – – – 3	6 9 55 16 14
n_x	2	10	11	57	17	3	n=100

У	Х						n_y
	10	20	30	40	50	60	
25 30 35 40 45	3 – – – –	3 5 – – –	– 4 8 5 –	– – 40 10 4	– – 2 6 7	– – – – 3	6 9 50 21 14
n_x	3	8	17	54	15	3	n=100

1-15. Қалыпты бас жиындықтардан белгілі D(X) және D(Y) дисперсиялары арқылы таңдама көлемдері n=60, m=50 болғанда орташа таңдама $\overline{x}$, $\overline{y}$ берілген. Табу керек: 1) М(Х)=М(У) бәсекелес гипотеза H_0; 2) $M(X) \neq M(У)$ бәсекелес гипотеза H_1. Мұнда α=0,05-деңгей мәні (таңдама орташа мәнді немесе мәнсіз болатығын анықта).

1. $\overline{x}$=638, $\overline{y}$=625, D(X)=30, D(Y)=25.
2. $\overline{x}$=130, $\overline{y}$=125, D(X)=60, D(Y)=150.
3. $\overline{x}$=260, $\overline{y}$=250, D(X)=90, D(Y)=125.
4. $\overline{x}$=390, $\overline{y}$=375, D(X)=180, D(Y)=50.
5. $\overline{x}$=520, $\overline{y}$=500, D(X)=72, D(Y)=140.
6. $\overline{x}$=650, $\overline{y}$=640, D(X)=78, D(Y)=135.
7. $\overline{x}$=780, $\overline{y}$=785, D(X)=120, D(Y)=100.
8. $\overline{x}$=910, $\overline{y}$=885, D(X)=180, D(Y)=50.
9. $\overline{x}$=1000, $\overline{y}$=990, D(X)=84, D(Y)=130.
10. $\overline{x}$=13,8, $\overline{y}$=17,1, D(X)=96, D(Y)=120.
11. $\overline{x}$=658, $\overline{y}$=605, D(X)=30, D(Y)=25.
12. $\overline{x}$=123, $\overline{y}$=120, D(X)=60, D(Y)=150.
13. $\overline{x}$=220, $\overline{y}$=250, D(X)=90, D(Y)=125.
14. $\overline{x}$=390, $\overline{y}$=375, D(X)=180, D(Y)=60.
15. $\overline{x}$=520, $\overline{y}$=500, D(X)=76, D(Y)=140.

Құрастырушы: алгебра және математикалық талдау кафедрасының аға оқытушысы М.Құдайберген
200_ ж. «__» ____________ кафедра отырысында **құпталған.** Хаттама №__

Кафедра меңгерушісі __________________ И.И.Павлюк