Әдістемелік нұсқаулардың титулдық парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.3/40

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

Математика пәні бойынша
5В060800 – Экология мамандығының студенттеріне арналған

ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫ ОРЫНДАУҒА ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Павлодар

Әдістемелік нұсқауларды бекіту парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.3/41

БЕКІТЕМІН
ОІ жөніндегі проректор
________Пфейфер Н.Э.

20__ж.
«___»____________

Құрастырушы: аға оқытушы ___________Құдайберген М.Қ.

Математика кафедрасы

Математика пәні бойынша

5В060800 – Экология мамандығының сырттай оқу нысанындағы студенттеріне арналған

зертханалық жұмыстарды орындауға
әдістемелік нұсқаулар

Кафедраның отырысында ұсынылды
20__ж. «___»______________, №__ Хаттама

Кафедра меңгерушісі _____________ Павлюк И.И. 20__ж. «____» ________

Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультетінің ОӘК мақұлданды 20__ж. «___»______________, №____ Хаттама

ОӘК төрағасы _______________ Мұқанова Ж.Ғ. 20__ж. «____» ________

МАҚҰЛДАНДЫ:
ЖжӘҚБ бастығы _____________ Варакута А.А. 20__ж. «____» ________

Университеттің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданды

20__ж. «___»_____________ №____ Хаттама

Зертханалық сабақтарға орындауға арналған әдістемелік нұсқаулар

1. Сызықтық алгебра элементтері

Аныктама 1 Екінші ретті анықтауыш деп

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

санын айтамыз. Бұл сан екі тік және екі жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

кестесі түрінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады.

Анықтама бойынша, екінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кестенің негізгі диагоналындағы элементтерінің көбейтіндісі мен қосалқы диагоналындағы элементтерінің көбейтіндісінің айырымына тең. Демек,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Анықтама 2 Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{23} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

санын айтамыз. Бұл сан үш тік және үш жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

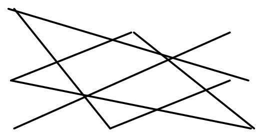
кестесі ретінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады. Мұндағы $a_{ij}(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$ - анықтауыштың элементтері, i – жатық, ал j – тік жолдарының нөмірі.

Үшінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кесте элементтерінен үшбұрыш немесе **Саррюс ережесі** бойынша есептеледі. Бұл ереже бойынша плюс таңбасымен алынған үш қосылғыш төменде келтірілген «+» **сұлба,** ал минус таңбасымен алынған үш қосылғыш **«-» сұлба** бойынша есептеледі:

«+» сұлба

«-» сұлба

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

***n* белгісізі бар *n* теңдеулер жүйесін шешу әдістері:**

1) Крамер әдісі: Біртекті емес *n* белгісізді *n* теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

(10)

Осы ж‰йенњ негізгі матрицасынњ анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

нөлге тең болмасын.

Осы анықтауыштың k нөмерлі тік жолының элементтерін (10) жүйесінің сәйкес бос мүшелерімен алмастырғанда шыққан анықтауышты Δ_k деп белгілеік:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$k = \overline{1, n}$

Осы анықтауыштар бойынша (10) теңдеулер жүйесінің шешімі Крамер формулалары арқылы анықталады:

$x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta}, k = 1,2,...,n$.

2) Гаусс әдісі Гаусс әдісі матрицаның рангін өзгертпейтін элементар түрлендірулерге негізделген. Бұл түрлендірулер теңдеулер жүйелерінің эквиваленттігін сақтайды. Шешімдері бірдей немесе екеуі де үйлесімсіз болатын теңдеулер ж‰йелері эквивалентті деп аталады.

Гаусс әдісінің сұлбасы: Алдымен (10) теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасы құралады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Элементар түрлендірулер арқылы бұл матрица үшбұрышты түрге келтіріледі:

$$\begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \dots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_m \end{pmatrix}$$

(11)

Элементар түрлендірулердің қасиеті бойынша, (11) теңдеулер жүйесі (10) жүйесіне эквивалентті. (11) жүйесінің ең соңғы теңдеуінен x_n-ді, бір қадам жоғары көтеріліп, келесі теңдеуден x_{n-1}-ді табамыз. Осылай табылған $x_1, x_2, ... x_n$ белгісіздерінің мәндері (10) жүйесінің шешімі болады.

Ескерту: (10) теңдеулер жүйесіне қойылған негізгі шарт осы жүйенің анықталғандығы, демек жүйенің анықтауышы $D \neq 0$ болуы. Сондықтан, $a^*_{nn} \neq 0, ..., a^*_{22} \neq 0, a^*_{11} \neq 0$. Бұл шарт матрицалар әдісінде де сақталады.

3) Матрица әдісі. (10) теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазамыз $A \cdot X = B$. (9 теңдеуі)

(5) формуласы бойынша A матрицасына кері A^{-1} матрицасын табамыз. Енді (9) теңдеуін сол жағынан A^{-1}-ге көбейтіп және $A^{-1}A = E$ екенің ескеріп,

$X = A^{-1}B$ түрінде (9) теңдеуінің шешімін табамыз.

Жаттығу сабақ№1-№2: 2-ші, 3-ші ретті анықтауыштарды есептеу. 4-ші, n-ші ретті анықтауышты есептеу, сызықтық теңдеулер жүйесін Крамер формуласын қолданып, Гаусс әдісін қолданып шығару. Матрицаларды қосу, нақты санға, бір біріне көбейту. Кері матрицаны есептеу. Сызықтық теңдеулер жүйесін матрицалық әдісті қолданып шығару. **ЖС 1** [8] №1-45, **ЖС 2** [8] № 47-67;

Төменгі есептерді шеш.

1 a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix}$;

2 a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

3 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ анықтауышты үшінші жатық

жолының элементтері бойынша жіктеп есепте.

4 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$

5 Теңдеулер жүйесін Крамер және Гаусс әдістермен шеш:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

анықтауышты төртінші тік жолының элементтері бойынша жіктеп есепте.

2. Аналитикалық геометрия элементтері

Егер $\vec{a}$ векторы өзінің $A(x_1, y_1, z_1)$ бас нүктесі мен $B(x_2, y_2, z_2)$ соңғы нүктесі арқылы берілсе, онда x, y, z

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1, \qquad z = z_2 - z_1$$

формулалары бойынша есептеледі.

$\vec{a}$ векторының модулі өзінің x, y, z координаттары арқылы

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

формуласы бойынша анықталады. Әлбетте

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

Демек, $\vec{a}$ векторының **модулі** оның бас нүктесі A мен соңғы нүктесі B-ның **ара қашықтығына** тең.

$\vec{a}$ векторының Ox, Oy, Oz µстеріне көлбеулік бұрыштары α, β, γ болсын. (1) формуласы бойынша,

$$x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha, \quad y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta, \quad z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$$

болады. Бұл формулалардағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының **бағыттауышы косинустары** деп аталады. Бағыттауышы косинустар $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

тепе-теңдегін қанағаттандырады. **Векторлардың скалярлық көбейтіндісі:**

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі деп

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi \qquad (3)$$

санын айтамыз. Мұндағы φ- $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындығы бұрыш.

Анықтама бойынша,

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right| \cdot \cos 0^{\circ} = \left|\vec{a}\right|^2 .$$

Бұл сан $\vec{a}$ вектордың **скалярлық квадраты** деп аталады.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Бірлік базистік векторлар үшін

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

теңдіктері орындалады.

Координаттары арқылы берілген $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ және $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \qquad (4)$$

формуласы арқылы анықталады.

$$\left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi = пр_{\vec{b}}\vec{a} \qquad немесе \qquad \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = пр_{\vec{a}}\vec{b}$$

болғандықтан, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot пр_{\vec{b}}\vec{a} \qquad немесе \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|a\right| \cdot пр_{\vec{a}}\vec{b}$$

түрінде жазуға болады.

(3) және (4) формулаларынан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

немесе, координаттары арқылы

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}$$

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторлары арасындағы бұрыш** анықталады.

u кез келген µс, $\vec{e}$ осы µс бойымен бағытталған бірлік вектор болсын. Егер u µсі координат µстерімен α, β, γ бұрыштарын құрса, онда

$$\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

және

$$пр_u\vec{a} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma$$

болады.

Векторлардың векторлық көбейтіндісі:

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{a} \times \vec{b}$ түрінде белгіленіп, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын векторды айтады:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, мұндағы j - берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш;

2) $\vec{a} \times \vec{b}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына перпендикуляр;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ векторлары осы ретпен оң үштік құрай

Анықтама $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының $\vec{c}$ векторына скалярлық көбейтіндісі айтылады да $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ деп белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Тік бұрышты декарт жүйесі анықталған жазықтықты **декарт жазықтығы** деп атаймыз.

M - декарт жазықтығының кез келген нүктесі, M_x және M_y осы нүктеден **Ox** және **Oy** өстеріне түсірілген перпендикулярдың табандары болсын. $x=OM_x, y=OM_y$ сандары M нүктесінің координаттары деп аталады да $M(x,y)$ деп белгіленеді. Мұндағы x - нүктенің абсциссасы, y – ординатасы.

Сонымен, декарт жазықтығындағы кез келген нүкте реттелген (x,y) қос санын, ал реттелген (x,y) қос саны осы жазықтықтағы M нүктесін анықтайды.

Полярлық координатттар жүйесі: Жазықтықтың белгіленіп алынған O нүктесін полюс деп, осы нүктеден шыққан OA сәулесін полярлық өс деп атайды. Сызықты бірлігі берілген полярлық өсті **полярлық координаталар жүйесі** деп атайды

$M(\rho,\theta)$ нүктесінің полярлық координаттары белгілі болса, онда осы нүктенің декарт жүйесіндегі x және y координаттары

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

формулалары арқылы анықталады (3-сурет). Және керісінше, нүктенің декарттық жүйедегі координаттары белгілі болса, оның полярлық координаттары

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\theta=\frac{y}{x}$$

формулалары арқылы табылады.

Декарт жазықтығындағы $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері арасындағы қашықтық

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

формуласы арқылы есептеледі.

Декарт жазықтығының $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері берілсін. Осы нүктелер арқылы өтетін түзудің бойында жатқан $M(x, y)$ нүктесі үшін $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ болса, онда **М** нүктесі $\overline{M_1M_2}$ кесіндісін λ **қатынаста бөледі** деп айтады.

$\overline{M_1M_2}$ кесіндісін *l* қатынаста бөлетін $M(x, y)$ нүктесінің координаттары

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

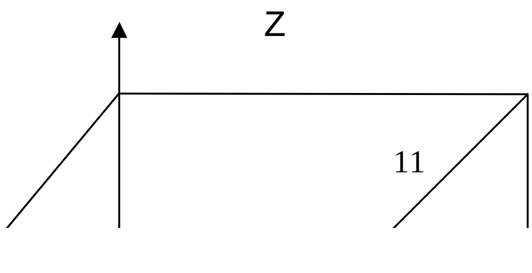
формулалары арқылы анықталады.

Егер **Oz** µсінің оң бағытындағы нүктеден қарағанда **Ox** – тен **Oy** –ке дейінгі ең кіші айналу бұрышы сағат тілінің қозғалу бағытына қарсы болса, онда бұл жүйе **оң** деп, ал керісінше жағдайда **сол** деп аталады (7 суретте оң жүйе көрсетілген).

M_x, M_y, M_z деп М нүктесінің Ox, Oy, Oz µстеріндегі проекцияларын белгілейік.

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z$$

сандары **М** нүктесінің координаттары деп аталады да $M(x, y, z)$ деп белгіленеді және координаттардың орналасу реті сақталады. (xOy), (yOz), (xOz) координат жазықтықтары деп аталады. Суретте M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} деп - **М** нүктесінің өздеріне сәйкес координаттар жазықтығындағы проекциялары белгіленген. Бұл жүйе **кеңістіктегі тікбұрышты декарт жүйесі** деп аталады



M_z

M_{yz}

M_{xz} M

M_y У

O

M_x M_{xy}

X

7 - сурет

Кеңістіктегі $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_1(x_2, y_2, z_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

формуласы арқылы анықталады.

M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін түзудің бойында жатып $\overline{M_1M_2}$ кесіндісін λ қатынаста бөлетін $M(x, y, z)$ нүктесінің координаттары

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ x = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ x = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

формулалары арқылы анықталады. Мұндағы $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ және $M \neq M_2$.

Төбелері $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ нүктелерінде жататын ABC ұшбұрышының S ауданы

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

формуласы арқылы анықталады. Егер $\overline{AB}$ бағытталған кесіндісінен $\overline{AC}$ кесіндісіне дейінгі ең қысқа бұрылу б±рышы оң болса, онда *S* оң таңбамен, керісінше жағдайда теріс таңбамен алынады.

Жазықтықтағы түзулер

Тікбұрышты декарттық жүйеде екі айнымалыдан тәуелді кез келген **сызықты** теңдеу жазықтықта **түзуді** анықтайды.

$$Ax + By + C = 0$$

түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.

Жазықтықтағы түзулер

Тікбұрышты декарттық жүйеде екі айнымалыдан тәуелді кез келген **сызықты** теңдеу жазықтықта **түзуді** анықтайды.

$$Ax + By + C = 0$$

түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.

1)Бұрыштық коэффициенті **k** және түзудің ордината µсінен қиып өтетін **b** кесіндісі арқылы түзуді $y = kx + b$ теңдеуі арқылы анықталаы

2)Түзудің бойында жатқан $M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ **нүктелері арқылы өтетін түзу**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

теңдеуі арқылы анықталады және **бұрыштық коэффициенті**

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

формула арқылы есептеледі

3) Координат µстерінен қиып **өтетін a және b кесінділері арқылы өтетін** түзу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

теңдеуі арқылы анықталады.

Егер екі түзудің k_1 және k_2 бұрыштық коэффициенттері белгілі болса, онда осы **түзулердің арасындағы бұрыш**

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

формуласы арқылы анықталады.

Егер екі түзу $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ жалпы теңдеулері арқылы берілсе, онда бұл түзулердің бұрыштық коэффициенттері

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Жаттығу сабақ№3-№5 Векторларды қосу, алу, нақты санға көбейту. Екі вектордың скалярлық, векторлық, аралас көбейтінділері. Үшбұрыштың ауданын, параллелепипедтің көлемін, пирамиданың көлемін векторлық элементтер арқылы есептеу. Бір нүктеден өтетін кез келген векторға перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуі, үш нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуі. Жазықтықтың қалыпты, кесінді түріндегі теңдеуі. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық. Жазықтықтықтардың перпендикулярлық, параллелдік шарты, екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Жазықтықтағы, кеңістіктегі түзудің жалпы, канондық теңдеулерін жазу. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесін табу. Нүктеден түзуге дейінгі қашықты табу. Нүктенің жазықтыққа, түзуге проекциясын табу. Шеңбердің, эллипстің, гиперболаның, параболаның теңдеуін жазу. **ЖС 3** [8] № 167-193; **ЖС 4** [8] № 236-251; **ЖС 5** [8] № 236-251

Вектор және оның проекциясы:

1 $A(2;-3;4)$ және $B(3;-1;-2)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторларын анықта.

2 $A(2;1;-2)$ нүктесінен шығатын $\overrightarrow{AB} = \{-3;2;4\}$ векторының соңғы B нүктесінің координаттарын тап.

3 $\vec{a} = \{-6;2;-3\}$ векторының модулін тап.

4 $\vec{a} = \{12;-15;-16\}$ векторының бағыттауышы косинустарын тап.

5 $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ және $\vec{b}=\{-2;1;0\}$ векторлары берілген.

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$ векторларының координат үстеріндегі проекцияларын тап.

6 $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ деп алып: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;
5) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$ мәндерін есептеңіздер.

7 $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр, $\vec{c}$ векторы осы векторындың әрқайсысымен $\frac{\pi}{3}$-ке тең бұрыш жасайды. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$ деп алып :1) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$ мәндерін есептеңіздер.
8 $M_1(1;-2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(5;0)$, $M_4(-1;4)$ және $M_5(0;-3)$

нүктелері берілген. 1) $\overline{M_1M_2}$; 2) $\overline{M_3M_1}$; 3) $\overline{M_4M_5}$; 4) $\overline{M_5M_3}$ бағытталған кесінділерінің координат үстеріне проекцияларын
9 $A(2;2)$, $B(-1;6)$, $C(-5;3)$ және $D(-2;-1)$ нүктелері квадраттың төбелері болатынын дәлелде.

10 $N(-8;13)$ нүктесінен қашықтығы 17-ге тең ординат үсіндегі M нүктесін тап.
11 Үшбұрыштың төбелері $A(1;-3)$, $B(3,-5)$, $C(-5;7)$ нүктелері. Қабырғаларының орта нүктелерін тап.

12 Үшбұрыштың орта нүктелері $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ және $P(-2;2)$ нүктелері. Төбелерін тап.

13 Төбелері: 1) $A(2;-3)$, $B(3;2)$ және $C(-2;5)$; 2) $M_1(-3;2)$, $M_2(5;-2)$ және $M_3(1;3)$; 3) $M(3;4)$, $N(-2;3)$ және $P(4;5)$ нүктелерінде жатқан үшбұрыштардың аудандарын есепте.

14 Төбелері: $A(3;6)$, $B(-1;2)$ және $C(2;-1)$ нүктелерінде жатқан үшбұрыш берілген. C төбесінен AB қабырғасына түсірілген биіктікті тап.

3. Талдауға кіріспе

Анықтама Егер кез келген кішкене оң e саны үшін, осы саннан тәуелді натурал N санын, $|x_n - a| < \varepsilon$ теңсіздігі, $n > N$ шартын қанағаттандыратын барлық натурал n–дер үшін ,орындалатындай етіп табуға болса, онда a саны (1) **тізбегінің шегі** деп аталады да. $x_n \to a$ немесе $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ деп белгіленеді.

Шекке көшу ережелері. Егер $x_n \to a$ және $y_n \to b$, онда: ***1)*** $x_n \pm y_n \to a \pm b$***; 2)*** $x_n y_n \to ab$; **3) егер $b \neq 0$ болса, онда** $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$;

Теорема 3. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ және $\{z_n\}$ тізбектері берілсін. Егер белгілі бір n_0 нөмірінен бастап барлық n үшін $x_n \le y_n \le z_n$ теңсіздігі орындалса және $x_n \to a$, $z_n \to a$, онда $\{y_n\}$ тізбегінің шегі бар болады және $y_n \to a$.

Бұл теорема тізбек шегі бар болуының бір белгісі

.

Жиі қолданылатын шектер

$\lim\limits_{x_n\to 0} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ – бірінші тамаша шек. (3-теорема арқылы дәлелденеді).

$\lim\limits_{x_n\to 0} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$ – екінші тамаша шек. (2-теорема арқылы дәлелденеді).

$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1,2,...,$ тізбегі үшін $2 < \alpha_n < 3$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\{\alpha_n\}$ жоғарыдан шенелген µспелі тізбек.

Демек, екінші теорема бойынша.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

шегі бар болады. e санының жуық мәні $e \approx 2{,}72$ болатыны дєлелденген. Б±л сан Непер саны деп аталады.

Егер $x \in X$ айнымалысына белгілі бір ереже бойынша, бірмәнді анықталған $y \in Y$ сәйкестендірілсе, онда *y* айнымалысы x тен тәуелді функциясы деп аталады x тәуелсіз айнымалы немесе функцияның аргументі деп аталады. Ал X жиыны **функцияның анықталу облысы,** У жиынын функцияның өзгеру облысы деп аталады.

Мысал 1 $y = \sqrt{1-2x}$ функциясының анықталу обласы $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$, ал өзгеру обласы $[0;+\infty)$.

Мысал 2 $y = \log_a(x+1)$ $a > 0$, $a \neq 1$ функциясының анықталу обласы$(-1;+\infty)$, ал өзгеру обласы $(-\infty;+\infty)$

Функция үш түрлі тәсілмен беріледі: 1 Аналитикалық тәсіл; яғни x пен y арасындағы байланыс координаттар жүйесінде формула түрінде беріледі.

Мысалы, $\mathbf{l} = 2\pi r$ $y = \frac{x^2-5x}{x+5}$, $V = \frac{c}{p}$ **т.с.с, М±ндағы** $\mathbf{l}, r, V, p, x, y$ **айнымалы шамалар.**

Бұл тәсіл кез келген математикалық аппаратты қолданып, зерттеуге қолайлы деп есептеледі.

2. Графиктік тәсіл; яғни *x* пен *y* арасындағы байланыс координаттар жүйесінде функцияның графигі түрінде беріледі.

3. Кестелік тәсіл. Тәуелсіз айнымалының анықталу облысынан алынған кез келген мәндері мен оларға сәйкес функцияның мәндері кесте түрінде беріледі. Мысалы, тригонометриялық, логарифмдік тағы да басқа функциялар мәндерінің кестелері.

Функцияның жиі кездесетін т‰рлері:

1. Алгебралық және трансценденттік (алгебралық емес), функциялар.

Мысалы, $y=\dfrac{3ax^3-\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}+5}$ - алгебралық, ал $y=2^x$, $y=\log_5 x$, $y=\sin x$, $y=\arg tgx$ т.б, – трансценденттік функциялар.

2 Бір мәнді және көп мәнді функциялар. $y=1-3x$, $y=\sin x$, $y=5^x$,– бір мәнді, ал $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, $y=\arg\sin x$, $y=\arg tgx$ – көп мәнді функциялар.

3 Кері функция. Берілген функцияға кері функцияның болу шарты:

Егер $y=f(x)$ функциясы $\langle a;b\rangle$ аралығында бірсарынды және бір мәнді болып, осы аралықта $\langle c;d\rangle$ аралығында бейнелесе, онда кері функция $x=\varphi(y)$, бар болады және $(c;d)$ аралығында бір мәнді жєне бірсарынды функция болады.

Мысалы $y=2x+4$, сандар өсінде анықталған және осы аралықта өспелі функция. Сондықтан $(-\infty;+\infty)$ аралыѓында анықталған $x=\dfrac{y-4}{2}$ кері функция бір мєнді жєне бірсарынды. Осы функциядағы аргументі мен функциянын әдеттегідей x, y деп белгілесек, бұл функция, $y=\dfrac{x-4}{2}$ түрінде жазылады. Демек, $y=2x+4$ пен $y=\dfrac{x-4}{2}$ - функциялары өзара кері болады.

Дәл сол сияқты $y=a^x$ және $y=\log_a x$, функциялары өзара кері.

4 Күрделі функция.

$z=\varphi(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында анықталып өзгеру обласы $(c;d)$ болсын жєне $(c;d)$ аралығында $y=f(z)$ функциясы анықталсын. Соңғы теңдіктегі z - ті оның мәнімен ауыстырып, $y = f(\varphi(x))$ функциясына келеміз. Бұл жаңа функция $(a;b)$ аралығында анықталған. Осы функцияны функциядан функция алу әдісімен анықталған *күрделі функция* деп атайды. (Функциялар суперпозициясы).

Мысалы: $z = x^2 + 1$, $y = \sqrt{2z+3}$, деп алып, $y = \sqrt{2(x^2+1)+3}$ - күрделі функциясын құрамыз.

5. Айқындалған және айқындалмаған функциялар.

$y = f(x)$ түрінде берілген фуекция айқындалған деп аталады. Мысалы, $y = \sqrt[3]{x^2-1}$, $y = \ln\cos x$, $y = x$ – айқындалған функциялар. $F(x,y)$ түрінде берілген функция айқындылмаған деп аталады, мысалы, $x^2 + y^2 = 1$, $xy - y^2 - 15 = 0$ – айқындалмаған функциялар.

6. Элементар және элементар емес функциялар.

Негізгі элементар функцияларға:

- дәрежелік: $y = x^n$;
- көрсеткіштік: $y = a^x$;
- тригонометриялық: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$ т.б
- кері тригонометриялық $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$;
- логарифмдік $y = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ функциялар жєне осы функциялардан алгебралық операциялар мен және олардың суперпозициялары арқылы жасалѓан функциялар жатады.

Мысалы, $y = \sin\ln x$, $y = \sqrt{\cos x}$ т.с.с.- функциялар, элементар функциялар тобына енеді.

Функцияның шегі. Бір жақты шектер. Функцияның үзіліссіздігі:

$y = f(x)$ **функциясы** $x = x_0$ **нүктесінің манайында (мүмкін сол нүктенің өзінен басқа) анықталсын.**

Мысал 1 Шек астындағы бµлшекті (x-2)-ге қысқартып

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}$$

Мысал 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Мысал 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

М±ндағы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ (бірінші тамаша шек)

Мысал 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

Бесінші жєне алтыншы мысалдардағы шектер бізге белгілі $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$ немесе $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ теңсіздіктерін қолдану арқылы есептеледі.

Мысал 5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k=e^k$$

Мысал 6

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}(1+(1-x))^{\frac{1}{1-x}}=e$$

Ескерту: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ шегі $\frac{0}{0}$ анықталмағандығын, ал $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ жєне $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ шектері 1^∞ анықталмағандығын айқындайды.

Жаттығу сабақ№6-№7 : Функцияның анықталу облысын табу, периодты болуын анықтау, жұп, тақ болуын зерттеу
Анықталмағандықтар және оларды айқындау ережелері. Функцияның үздіксіз болуын зерттеу. 1-ші, 2-ші текті үзіліс нүктелер. Коши, Лагранж, Ролль, Ферма теоремаларын қолдану. Айқындалған, айқындалмаған, параметрлік түрде берілген функцияның
жоғарғы ретті туындыларын, дифференциалдарын есептеу.
ЖС 6 [5] №245-300 ;**ЖС 7** [5] №314-367;

Есептер

1

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(n+1)^2}{n^2+n+1}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$ 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n^2}{4+5n^2}$ 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2+(n-2)^2}{(n+3)^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n^2-3n+1}$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4}{n^3+1}$ 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^n$

2 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ екендігін дәлелде (шектің анықтамасы бойынша берілген кішкене ε -нен тәуелді N(ε) санын табу керек)

Үлгі: $a = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$, тізбегінің шегі $a = \frac{1}{2}$ болатынын дєлелде.

Шешуі *е* кез келген аз шама болсын $|a_n - a| = \left|\frac{(n+1)^2}{2n^2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

деп алайық. Бұл теңсіздектен, $\left|\frac{n^2+2n+1-n^2}{2n^2}\right| < \varepsilon$ немесе $\left|\frac{2n+1}{2n^2}\right| < \varepsilon$. Олай болса $\frac{2n+1}{2n^2+n} < \varepsilon$ болады, демек $\frac{1}{n} < \varepsilon;$ немесе $n > \frac{1}{\varepsilon}$, Енді $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ деп алсақ жеткілекті. $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ деп $\frac{1}{\varepsilon}$ санының бүтін бөлемі белгеленген. Мысалы, $\varepsilon = 0{,}03$ болса, $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{100}{3} = 33{,}33...$, ал $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = 33$ болады.

1. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}$, $a = 2$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-2n}{3+4n} = -\frac{1}{2}$

2. $a_n = \frac{-5n}{n+1}$, $a = -5$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3n}{6-n} = -3$

3 Шектерді есепте

1. $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$;

6. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x+2}{x^2-4}$;

2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$; 7. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{4x^2+3x-27}{x^2-6x-27}$;

3. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2}{x+5}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^x$;

4 Берілген функциялардың анықталу обласын тап

1. $y=\frac{x^2}{1+x}$; 6. $y=\frac{x^2}{1+x}$;

2. $y=\sqrt{3x-x^2}$; 7. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$;

3. $y=\log_3(x^2-4)$; 8. $y=\frac{1}{x-x^2}$;

4. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x}$; 9. $y=\frac{1}{x^2+1}$;

5. $y=\arccos\frac{x}{5}$; 10. $y=\sqrt{-ax}$;

4. Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері және олардың қолданулары

$y=f(x)$ функциясы белгілі бір аралықта анықталсын. x_0 - осы аралықтың белгіленіп алынған нүктесі болсын. x_0 ге Δx өсімшесін беріп, оған сәйкес функция өсімшесін табайық: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Функция өсімшесі Δy - тің аргумент өсімшесі Δx- ке қатнасы $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ осы функцияның $[x_0, x_0+\Delta x]$ кесіндісіндегі орташа өзгеру жылдамдығын анықтайды.

Функцияның x_0 нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын анықтау үшін $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатнасының $\Delta x \to 0$ дағы шегін табуымыз керек. Егер $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ бар болса, онда бұл шек функцияның x_0 нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын анықтайды. Көрсетілген тәсілмен табылған шекті берілген $y=f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы деп атайды да, y' немесе $\frac{dy}{dx}$ белгілейді. Туындыны есептеу амалы дифференциалдау деп аталады, ал x_0 нүктесінде туындысы бар функцияны осы нүктеде дифференциалданады деп атайды.

Мысал, осы алгоритм бойынша $y=x^3$ функциясының туындысын табайық. Осы мақсатпен x-ке Δx өсемшесін беріп, функцияның өсімшесін табамыз,

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3=$$
$$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Осы өсімшені Δx- ке бөліп, $\frac{dy}{dx}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2$ теңдігіне келеміз. Енді Δx-ті нөлге ұмтылдырып, берілген функцияның туындысын табамыз: $y'=3x^2$.

Туындылар кестесі

1. $(C)'=0$
2. $(x)'=1$
3. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
4. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(\sin x)'=\cos x$
6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

11. $(a^x)' = \alpha^x \ln a$

12. $(e^x)' = e^x$

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

16. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Дифференциалдау ережелері:

1. $(u+v)' = u' + v'$. Қосындынынъ (айырманынъ) туындысы туындылардынъ қосындысына (айырмасына) тенъ.

2. $(uv)' = u'v + v'u$. Ережені айтып шық, жадынъда сақта.

3. $(Cu)' = Cu'$. Т±рақты шаманы туындынынъ сыртына шығаруға болады.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Ережені айтып шық, жадынъда сақта.

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі:

$y = f[\varphi(x)]$ күрделі функциясы берілсін. Енді $z = \varphi(x)$ деп алсақ, берілген функция $y = f(z)$ түрінде жазылады. Бұл функциялар өз анықталу облыстарында дифференциалданаса, онда туындысы,

$y'_x = y'_z \cdot z'_x$ немесе $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$; формаласы боцынша есептеледі.

Мысалы, күрделі $y = \ln \arccos 2x$ функцияның туындысын табу үшін берілген функцияны үш функцияның суперпозициясы деп қарастырамыз. $y = \ln z$, $z = \arccos t$, ал $t = 2x$. Сондықтан ереже бойынша

$$y'_x = (\ln z)'_z \cdot (\arccos t)'_t \cdot (2x)'_x = \frac{1}{z} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{\arccos t} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{-2}{\arccos 2x \cdot \sqrt{1-4x^2}}.$$

$y = u^v$ к‰рделі кµрсеткіштік функция деп аталады, мұндағы

Күрделі көрсеткіштік функцияның туындысы:

$u = u(x), v = v(x)$ Белгілі ереже бойынша

$y'_x = u^v \ln u \cdot v'_x + vu^{v-1} \cdot u'_x$

Мысалы, $y = x^{\sin x}$ функцияның туындысы

$$y' = x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \cdot (x) =$$

$$= x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot \cos x + \sin x \cdot x^{\sin x - 1} \cdot 1 = x^{\mathrm{Sin}x}\left(\mathbf{l}\mathrm{nxCosx} + \frac{\mathrm{Sinx}}{x}\right).$$

Параметірлік түрде берілген функцияны дифференциалдау:

$y = y(x)$ функциясы $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ түрінде берілсін.

Мұндай функцияның туындысы .

$y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, яғни $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ формаласы боцынша есептеледі.

Мысалы, $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, болсын y'_x табайық.

$$y'_x = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\mathrm{ctgt};$$

Жаттығу сабақ№8-№11 Дербес туындыларды есептеу. Екі айнымалы функцияның дербес дифференциалдарын, толық дифференциалын есептеу. Екі айнымалы функцияның экстремум нүктелерін табу, тұйық облысында ең үлкен және ең кіші мәндерін табу. **ЖС 8** [5] №517-633; **ЖС 9** [5] №650-665; **ЖС 10** [5] №792-811; **ЖС 11** [5] №1107-1300.

1 Мына функциялардың туындысын тап

1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$

2. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

3. $y = x^4 - 3x^2 + 17$

4. $y = x^3(x^2 - 1)^2$

5. $y = \frac{x}{1 + x^2}$

2

1. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

2. $y = \arccos\frac{2 - x}{x\sqrt{2}}$

3. $y = \arcsin\sin x$

4. $y = \frac{\cos x}{2\sin^{2x}} + \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

3 Функциялардың y_x' туындысын тап.

1. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

4 Айқындалмаған функциялардың y'_x туындысын тап.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}; \quad (a > 0)$ 4. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

5. $2y \cdot \ln y = x$

5. Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеулері және олардың қолданулары

Алғашқы функция, анықталмаған интеграл ұғымы: Егер бір X аралығының әрбір нүктесінде $F(x)$ функциясы үшін $F'(x) = f(x)$ немесе $dF(x) = f(x)dx$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы осы аралықта $f(x)$ үшін *алғашқы функция* болады.

Мысалы $F(x) = \sin x$ функциясы $f(x) = \cos x$ функциясының алғашқы функциясы болады.

Анықтама Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің алғашқы функциясы болса, онда оның барлық алғашқы функцияларының жиынын, яғни $F(x) + C$ өрнегін $f(x)$-тің *анықталмаған интегралы* деп атайды және былай белгілейді:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Бұл өрнектегі $f(x)dx$-интеграл астындағы өрнек, ал x-*интегралдау айнымалысы* деп аталады. $\int$ -интеграл белгісі.

Интегралдаудың негізгі ережелері:

1 Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $\int f(x)dx = F(x) + C$, мұндағы $C = Const$

2 $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, демек тұрақты шаманы интеграл сыртына шығаруға болады.

3 $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

4 Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ және $u = \varphi(x)$ болса, онда $\int f(u)du = F(u) + C$ болады. Демек анықталмаған интеграл пішіні интегралдау айнымалысынан тәуелсіз.

Мысалы, $u = ax + b$ деп алсақ

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad , \quad a \neq 0$$

Жиі қолданылатын интегралдар кестесі:

1 $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2 $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

4 $\int \cos x dx = \sin x + C$

5 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

8 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{a} + C, \qquad (a \neq 0)$

9 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \qquad (a > 0)$

10 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad (a \neq 0)$

11 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \qquad (a \neq 0)$

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, \qquad (a \neq 0)$

13 $\int \mathrm{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

14 $\int \mathrm{ctg}x\,dx = \ln|\sin x| + C$

15 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

16 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

17 $\int \mathrm{sh}\,dx = \mathrm{ch}x + C$

18 $\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}x + C$

19 $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$

20 $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C$

Мысал 1 $J = \int \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x\sqrt[4]{x} + 4}{x}dx$

Шешуі Қажетті элементар түрлендірулерді жүргізгеннен кейін, мүшелеп интегралдасақ интеграл кестедегі 1 және 2 формулаларына келтіріледі.

$$J = 3\int x^3dx + 5\int x^2dx - 6\int x^{1/4}dx + 4\int \frac{dx}{x} = 3\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{24}{5}x^{5/4} + 4\mathbf{l}n|x| + C$$

Мысал 2 $J = \int \frac{2^x + 5^x}{10^x}dx$

Шешуі Элементар түрлендірулері және (3) формуланы қолданып мына теңдікке келеміз.

$$J = \int \frac{2^x + 5^x}{2^x \cdot 5^x}dx = \int \frac{dx}{5^x} + \int \frac{dx}{2^x} = \int 5^{-x}dx + \int 2^{-x}dx = -\int 5^{-x}d(-x) - \int 2^{-x}d(-x) =$$

$$= -\frac{5^{-x}}{\mathbf{l}n5} - \frac{2^{-x}}{\mathbf{l}n2} = -\frac{1}{5^x\mathbf{l}n5} - \frac{1}{2^x\mathbf{l}n2} + C.$$

Мысал 3 $J = \int tg^2dx$

Шешуі $tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow J = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C$

Мысал 4 $J = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34}.$

Бөліміндегі көпмүшеліктен толық квадрат бөліп аламыз. $x^2 + 6x + 34 = (x+3)^2 + 5^2$. Енді $dx = d(x+3)$ екенін ескеріп, кестедегі 8 формуланы пайдаланамыз.

$$J = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 5^2} = \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2 + 5^2} = \frac{1}{10}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{5} + C$$

Дифференциал белгісінің астына кіргізу арқылы интегралдау:

4 ереже бойынша

$$\int f(\varphi(x)\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)\int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \quad F'(u) = f(u)$$

және мұндағы $u = \varphi(x)$. Бұл түрлендіру $\varphi(x)$ функциясын дифференциал белгісінің астына кіргізу деп аталады.

Мысал 5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2} d(5x-2) = \begin{vmatrix} u = 5x-2 \\ du = 5dx = d(5x-2) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{5}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

Бөліктеп интегралдау әдіс: Бөліктеп интегралдау формуласы деп келесі теңдікті айтамыз.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Мысал 1 $\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx$ **интегралын есептеу керек.**

Шешуі $u = x^2 - 2x + 7, \ dv = e^{2x}dx$ **деп аламыз. Сонда** $du = (2x-2)dx, \ v = \frac{1}{2}e^{2x}$ **.(1)-формуласы бойынша,**

$$\int (x^2 - 2x + 7)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x^2 - 2x + 7, \ dv = e^{2x}dx \\ du = (2x-2)dx, \ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} -$$

$$-\int \frac{1}{2}e^{2x}(2x-2)dx = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \int (x-1)e^{2x}dx. \qquad (2$$

Соңғы интегралға да бөліктеу интегарлдау әдісін пайдаланып

$$\int (x-1)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x-1, \ dv = e^{2x}dx \\ du = dx, \ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

теңдігіне келеміз. Интегралдың осы мәнін (2) теңдігіне қойып, берілген интегалды табамыз:
Соңында,

$$\int (x^2-2x+7)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(x^2-2x+7)e^{2x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C =$$
$$= \frac{1}{4}(2x^2-6x+17)e^{2x} + C$$

Гиперболалық функцияларды интегралдау:

Негізгі формулалар:

$$1\ ch^2x - sh^2x = 1$$

$$2\ sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1)$$

$$3\ ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x+1)$$

$$4\ shx \cdot chx = \frac{1}{2}sh2x$$

Мысал 1

$$\int ch^2xdx = \int ch^2xd(shx) = \int (1+sh^2x)d(shx) = shx + \frac{sh^3x}{3} + C$$

Анықталған интегралды құру алгоритмі: Бізге $[a,b]$ сегментінде анықталған $y = f(x)$ функциясы берілсін.

1 $[a,b]$ сегментін $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ нүктелері арқылы кез келген n- бөлікке бөлшектеп $\lambda = \max\limits_{1\le t\le n} \max(x_i - x_{i-1})$ деп алынады.

2 Әрбір $[x_i, x_{i+1}]$ аралығынан ξ_i нүктесі таңдап алынады, $i = 1,2,3,\ldots,n$; $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, да $f(x_i)\Delta x_i$ дифференциалды өрнегі құрылады.

3 Осы өрнектерден жасалған қосынды

$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ интегралдық қосынды деп аталады.

4 Егер интегралдық қосындының l нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса және б±л шек $[a,b]$ сегментін бөлшектеу тәсілі мен ξ_i нүктелерін таңдап алу әдісінен тәуелсіз болса, онда осы шек $f(x)$ функциясынан $[a,b]$ аралығында алынған интеграл деп аталады да, $\int\limits_a^b f(x)dx$ деп белгіленеді. Демек,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ньютон-Лейбниц формуласы:

1 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ -деп анықталған функция үшін айнымалы жоғарғы шегінен тәуелді интеграл деп аталады. Бұл функция $[a,b]$ сегментінің барлық нүктелерінде $F'(x)=f(x)$ теңдігін қанағаттандырады. Демек, $F(x)$ $f(x)$-тің алғашқы функция-сы. Егер $\Phi(x)$ $f(x)$-тің кез келген басқа алғашқы функциясы болса, онда $F(x)=\Phi(x)+C$ болады. Олай болса, $\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)+C$. Енді $x=a$ деп алсақ, $\int_a^a f(t)dt=\Phi(a)+C$ болады. Бұл теңдіктен $C=-\Phi(a)$. C-ның осы мәнін ескеріп $\int_a^x f(t)dt=\Phi(x)-\Phi(a)$ теңдеуіне келеміз. Енді $x=b$ деп алсақ,

$$\int_a^b f(t)dt=\Phi(b)-\Phi(a)$$ **болады.**

Бұл формула Ньютон-Лейбниц формуласы деп аталады

Мысал 1 $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x}$

Шешуі $f(x)=\frac{dx}{\sin^2 x}$ **функциясының алғашқы функциясы** $F(x)=-ctgx$ **екені белгілі, сондықтан**

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-(0-1)=1$$

Жаттығу сабақ№12-№15 Анықталмаған интегралды есептеу. Тікелей интегралдау әдісі, бөліктеп, айнымалыны алмастру әдістерін қолданып есептеу. Анықталған интегралды Ньютон-Лейбниц формуласын қолданып есептеу. Анықталған интегралды айнымалыны ауыстыру, бөліктеп интегралдау әдістерін қолданып есептеу. Екі еселі интегралда ретін өзгерту. Екі еселі интегралды декарттық координаттық жүйесінде есептеу. Екі еселі интегралда айнымалыны ауыстыру. Екі еселі интегралды геометрияда, механикада, энергетикада қолдану. Үш еселі интегралды есептеу. Үш еселі интегралда айнымалыны ауыстыру. Үш еселі интегралды қолдану. **ЖС 12** [5] №451-478; **ЖС 13** [5] №495-498; **ЖС 14** [5] №524-534; **ЖС 15** [5] №536-545.

1 Интегралдарды есептеңдер

1 $\int \sqrt{x}\,dx$ 2 $\int \frac{dx}{x^2}$

3 $\int 10^x dx$ 4 $\int \left(x^3 - 3x^2 + 5\right)dx$

5 $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)}dx$ 6 $\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}dx$

2 Интегралдарды есептеңдер

1 $\int x\sin 2x dx$; 2 $\int xe^{-x}dx$; 3 $\int x3^x dx$;

3 Интегралдарды есептеңдер.

1 $\int \frac{dx}{ch^2x}$ 2 $\int \left(ch^2ax + sh^2ax\right)dx$

3 $\int th^2x dx$ 4 $\int sh^3x dx$

5 $\int th^4x dx$

4 Интегралды Ньютон-Лейбниц формуласын пайдаланып есептеңдер.

1 $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ **2** $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^4}}$

3 $\int_0^1 (e^x - 1)e^x dx$

4 $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

5 $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1} dz$

6 $\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$