Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Кафедра алгебры и математического анализа

Методические указания
по изучению дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

для студентов
специальности 050601- «Математика»

Павлодар

УТВЕРЖДАЮ
Декан ФФМиИТ
_______Тлеукенов С.К.
«___»__________20__г.

Составитель: старший преподаватель___________М.К. Кудайберген

Кафедра алгебры и математического анализа

Методические указания по изучению дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

для студентов специальности 050601- «Математика»

Рекомендовано на заседании кафедры
«____»_____________20__г., протокол №__

Заведующий кафедрой _____________И.И.Павлюк

Одобрено МС факультета физики, математики и информационных технологий
«____»_____________200_г., протокол №__

Председатель МС ______________ А.Т. Кишубаева

Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1Цель дисциплины - опираясь на методы и наглядные образы классической дифференциальной геометрии, ввести студентов в область основных понятий и идей современной дифференциальной геометрии. Программа включает в себя как теорию кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, так и основные понятия топологии, тензорный анализ на многообразиях, элементы римановой геометрии, начала теории внешних дифференциальных форм.

2Задачи дисциплины

- полное раскрытие основных понятий дисциплины и осмысленное усвоение их студентами;

-развитие у студентов образного мышления и геометрической интуиции.

3В результате изучения данной дисциплины студенты должны:

иметь представление:

– о аффинной связности на многообразии и римановом пространстве.

знать:

– современный подход к определению основных понятий теории кривых и поверхностей;

– основные теоремы и формулы дифференциальной геометрии;

– определения основных понятий и теоремы начальных разделов топологии и теории многообразий.

уметь:

– применять основные теоремы и формулы классической дифференциальной геометрии в решении задач;

– овладеть методами дифференциальной геометрии;

– пользоваться тензорным аппаратом при решении задач.

приобрести практические навыки:

с дифференциально-геометрическими объектами и иметь представление о их применении в геометрии и теории интегрирования.

4. Пререквизиты

Для освоения данной дисциплины необходимы знания, умения и навыки приобретенные при изучении следующих дисциплин:

– Математический анализ;

– Аналитическая геометрия;

– Некоторые разделы линейной алгебры (в частности, полилинейные функции и тензоры).

Методические указания к лекционным занятиям

Тема 1. Теория кривых

Векторные функции. Определение кривой в дифференциальной геометрии. Способы задания. Особые точки кривой. Длина дуги и натуральная параметризация. Касательная прямая, соприкасающаяся плоскость и нормали кривой. Сопровождающий трехгранник кривой, кривизна и кручение, формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. Кривые с общими натуральными уравнениями. Основная теорема теории кривых.

Литература: [3], 8-54стр., [1], 27-52стр.

Тема 2. Теория поверхностей

Определение поверхности в дифференциальной геометрии. Способы задания. Кривые на поверхности. Касательная плоскость и нормаль.

Первая квадратичная форма и длина кривой, угол между кривыми, площадь области на поверхности. Понятие о внутренней геометрии и изгибании поверхности.

Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна в заданном на поверхности направлении. Теорема Мёнье. Индикатриса Дюпена. Формула Родрига. Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизна. Соприкасающийся параболоид и типы точек регулярной поверхности. Сферическое отображение поверхности и гауссова кривизна.

Линии кривизны. Асимптотические линии. Элементы теории сетей на поверхностях. Чебышевские сети.

Деривационные формулы поверхности. Формула Гаусса и теорема о принадлежности полной кривизны внутренней геометрии поверхности. Уравнения Петерсона-Кодации. Теорема о существовании поверхности с заданными квадратичными формами (теорема Бонне).

Геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии, их экстремальное свойство и механическая интерпретация.

Ковариантный дифференциал и параллельный перенос вектора вдоль кривой на поверхности.

Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

Метрика евклидова пространства в криволинейных координатах. Метрика псевдоевклидова пространства (пространства Минковского). Движения в пространстве Минковского. Риманова метрика на поверхности. Метрика плоскости Лобачевского. Модель Клейна плоскости Лобачевского.

Литература: [1], 59-146стр., [3], 59-135стр.

Тема 3. Элементы топологии

Топологическое пространство. Топология метрического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм. Замкнутые множества. База топологии. Связность и линейная связность. Хаусдорфовы топологические пространства.

Компактные топологические пространства.

Литература: [1], 10стр., [3], 250стр.

Тема 4. Основные понятия теории многообразий

Дифференцируемые многообразия. Многообразия с краем. Ориентируемые многообразия. Функции на многообразиях. Отображение многообразий. Погружение, вложение, диффеоморфизм.

Кривые на многообразии. Касательные векторы и касательные векторные пространства. Векторные поля на многообразии.

Понятие о проблеме погружения и вложения многообразия в R^n. Поверхности и проективная плоскость как многообразия.

Литература: [1], 154-187стр., [3], 265-311стр.

Тема 5. Тензорный анализ на многообразии

Тензорные поля на многообразии. Примеры тензорных полей в математике и физике (вектор, полилинейная функция, квадратичные формы, тензоры напряжения и деформации и др.). Алгебраические операции над тензорными полями.

Аффинная связность на многообразии. Параллельный перенос вектора вдоль кривой и ковариантная производная векторного поля. Геодезические линии. Ковариантное дифференцирование произвольных тензорных полей. Свойства ковариантного дифференциала и ковариантных производных.

Литература: [1], 205-234стр., [3], 138-205стр.

Тема 6. Риманова метрика на многообразии

Определение римановой метрики. Метрический тензор, его свойства. Поднятие и опускание индексов. Риманова связность. Символы Кристоффеля. Лемма Риччи о ковариантной производной метрического тензора. Тензор кривизны (Римана), его геометрический смысл и свойства. Специальные системы координат в римановом пространстве. Двумерные римановы пространства. Поверхности в евклидовом пространстве как двумерные римановы многообразия. Полная кривизна поверхности и тензор Римана.

Литература: [1], 218стр., [3], 207-247стр.

Тема 7. Внешние формы

Кососимметрические тензорные поля и внешние формы, алгебраические операции над ними. Внешние дифференциальные формы. Внешнее дифференцирование. Интегрирование дифференциальной формы по гладкому многообразию. Общая теорема Стокса. Частные случаи общей формулы Стокса.

Литература: [1], 154-252стр., [3], 294-308стр.

Методические указания к практическим занятиям

Тема 1. Теория кривых

Различные способы задания кривых. Касательные, нормальные и соприкасающиеся плоскости. Длина дуги. Формулы Френе. Кривизна и кручение. Натуральные уравнения кривой.

Литература: [7], 27-51стр., 54-61стр.

Тема 2. Теория поверхностей

Различные способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма, длина кривой, угол между кривыми и площадь области на поверхности. Вторая квадратичная форма. Главные кривизны и главные направления. Полная и средняя кривизна. Геодезические линии.

Литература: [7], 68-114стр.

Тема 3. Элементы топологии

Топологическая структура на множестве. Индуцированная топология. Непрерывные и гомеоморфные отображения. Компактность.

Литература: [3], 311стр.

Тема 4. Основные понятия теории многообразий

Дифференцируемые многообразия. Отображение многообразий. Векторные поля.

Литература: [3], 311стр.

Тема 5. Тензорный анализ на многообразии

Тензорные поля и операции над ними. Аффинная связность. Ковариантное дифференцирование.

Литература: [3], 205стр.

Тема 6. Риманова метрика на многообразии

Риманова метрика. Символы Кристоффеля. Тензор кривизны.

Литература: [3], 247стр.

Тема 7. Внешние формы

Кососимметрические тензоры. Внешнее произведение. Внешние дифференциальные формы. Внешний дифференциал. Формула Стокса и ее частные случаи.

Литература: [3], 311стр.

Список литературы

Основная:

1. Феденко А.С. Дифференциальная геометрия. Мн: Изд-во БГУ,1982.
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1980.
3. Позняк Э.Г., Шикин У.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М.: МГУ, 1990.
4. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
5. Базылев В.Т. Геометрия дифференцируемых многообразий. М.: Высшая школа, 1989.
6. Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977.
7. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. А.С. Феденко. М.: Наука, 1979.
8. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1981.

Дополнительная:

9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1985.
10. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.
11. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
12. Постников М.М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
13. Норден А.П. Теория поверхностей. М., 1956.
14. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987.
15. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. М.: МФТИ, 1996.