Пән бойынша оқыту бағдарламасы (SYLLABUS)

Нысан ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

С.Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

5В060100 «Математика» мамандығынының студенттеріне арналған

ОА 1206 Алгебра негіздері

ПӘНІ БОЙЫНША ОҚЫТУ БАҒДАРЛАМАСЫ (SYLLABUS)

Павлодар, 2013 ж.

Пән бойынша оқыту бағдарламасын (Syllabus) бекіту парағы

Нысан ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

БЕКІТЕМІН
ФМжАТФ-нің деканы
__________ Испулов Н.А.
20__ж. «___»__________

Құрастырушы: __________ аға оқытушы Құдайберген М.Қ.

5В060100 «Математика» мамандығының ЖОБ негізіндегі күндізгі оқу нысанының студенттеріне арналған

ОА 1206 Алгебра негіздері

пәні бойынша оқыту бағдарламасы (Syllabus)

Бағдарлама 2013ж. «___» _________бекітілген жұмыс оқу бағдарламасының негізінде әзірленді.

2013ж. «___»__________ кафедра отырысында ұсынылған №__ Хаттама
Кафедра меңгерушісі ________ Джарасова Г.С. 20__ж. «____» _______

Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданған 20__ж. «__»__________ №____ Хаттама

ОӘК төрағасы ____________ Искакова А.Б.20__ж. «_____»___________

1. Оқу пәнінің паспорты

Пәннің атауы Алгебра негіздері

Міндетті компонент пәні

Кредит саны және меңгеру мерзімі

Барлығы – 3 кредит

Курс: 1

Семестр: 2

Барлығы аудиториялық сабақтар – 45 сағат

Дәрістер – 15 сағат

Тәжірибелік сабақтар – 30 сағат

СӨЖ – 90 сағат

соның ішінде СОӨЖ – 22,5 сағат

Жалпы еңбек сыйымдылығы – 135 сағат

Бақылау формасы

Емтихан – 1 семестр

Пререквизиттер

Осы пәнді меңгеру үшін төмендегі пәндерді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және дағды-машықтар қажет: мектеп курсының алгебра және математикалық анализдің негіздері.

Постреквизиттер

Пәнді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және дағды-машықтар келесі пәндерді меңгеруі үшін қажет: алгебра, кешен айнымалылар функцияларының теориясы, дифференциалдық теңдеулер, функционалдық талдау, нақты анализ.

2. Оқытушы туралы мәліметтер және байланысу ақпараттары

Құдайберген Маржан Құдайбергенқызы
Математика кафедрасының аға оқытушысы
«Математика» кафедрасы, А - 410 аудитория
Байланыс телефоны: 67-36-46, ішкі тел. 11-20
E-mail: k.marzhan_k@mail.ru

3. Пәннің мақсаты және міндеттері

Пәннің мақсаты:

«Алгебра негіздері» курсы математикалық білім саласының негізгі пәндерінің бірі, сондықтан осы курста алынатын нәтижелердің көпшілігі барлық математикалық пәндерде қолданысын табады.Осы курс бағдарлама бойынша жиындар теориясы, матрицалар және анықтауыштар теориясы, сызықты түрлендірулер және т.с.с. тақырыптарды оқып үйренуді мақсат етеді.

Пәннің міндеті:

- алгебралық ұғымдар мен әдістер мысалында студенттерге ғылыми көзқарастың мәнін түсіндіру;
- алгебраның мәнін және оның қолданбалы – кәсіптік есептерді шешудегі ролін түсіндіру;
- студенттерді алгебрлық әдістерді кәсіптік әрекеттерінде қолдануға бағыттау.

3. Білім, икем, дағдылар және құзырларға қойылатын талаптар

Осы пәнді меңгеру нәтижесінде:

студенттердің түсінігі болуы тиіс:

- фундаменталды ұғымдар, заңдар туралы;
- абстракты ұғымдарды нақты тәжірибелік есептер үшін қолданылуы туралы;

студенттер білуі тиіс:

- негізгі ұғымдарды, формулаларды, анықтамаларды, теоремаларды;
- есептерді шешудің тәсілдері мен әдістерін;

студенттің икемді болуы тиіс:

- бағдарлама бойынша қарастырылатын формулаларда дәлелдеу және қорытып шығару;

- математикалық модельдерді құрастыру;
- математикалық зерттеулерді жүргіздіру;

студент тәжірибелік дағдыларды иемденуі тиіс:
- ұсынылатын әдебиетпен өздігінен жұмыс жасау;
- алдына қойылған мәселе есептерді шешу;
- теоремаларды құрастыру және дәлелдеу;

студент құзырлы болуы тиіс:
- алгебра сұрақтарында;
- математикалық анализ сұрақтарында.

5 Пәннің тақырыптық жоспары

Сабақ түрлері бойынша академиялық сағаттардың бөлінуі

№	Тақырыптардың атауы	Сабақ түрлері бойынша аудиториялық сағаттардың саны		СОӨЖ	
		Дәріс тер	Тәжірибелік	Барлығы	Соның ішінде СОӨЖ
1	Бүтін сандар	1	2	10	2
2	Комплекс сандар	2	4	10	2,5
3	Полиномдар алгебрасы	2	3	12	3
4	Матрицалар және анықтауыштар	2	5	10	3
5	Сызықты теңдеулер жүйелері	2	5	12	3
6	Сызықты кеңістіктер	2	3	12	3
7	Сызықты түрлендірулер	2	3	12	3
8	Квадраттық формалар	2	5	12	3
	Барлығы: 135 (3 кредит)	15	30	90	22,5

6. Дәріс сабақтарының мазмұны

Тақырып 1. Бүтін сандар

Жоспар:

1. Жиын ұғымы
2. Сақина мен өріс ұғымы
3. Бүтін сандардың бөлінгіштік теориясы

Г.Кантор (1845-1918жж) – неміс математик, жиындар теориясының жасаушы: «Жиын ретінде біз жалпы объектерді бірігіп қарастырамыз, олар тек біздің интуиция және ой мен айырылады».

Жиын дегеніміз ол кейбір белгімен біріктірілген кез келген бар болған немесе саналы объектерінің қосындысы (жиналысы, үйілі).

X пен кейбір бос емес жиынды белгілесек, сонда осы жазулардың мәнін осылай түсінуге болады:

a элемент X жиынға жатады
$a \in X$ a элемент X жиынға кіреді
a элемент X жиынның шарттарына (қасиеттеріне) бағынады (қанағаттанады)

$a \notin X$ a элемент X жиынға жатпайды

a элемент X жиынға кірмейді

a элемент X жиынның шарттарына (қасиеттеріне) бағынбайды (қанағаттанбайды)

Мысалдар:

N	- натурал сандарының жиыны:	$\mathrm{N}=\{1,2,3,\mathbf{K},n,\mathbf{K}\}$
Z	- бүтін сандарының жиыны:	$\mathrm{Z}=\{\mathbf{K},-3,-2,-1,0,1,2,3,\mathbf{K}\}$
Q	- рационал сандарының жиыны:	$Q=\left\{\frac{p}{q}:\ p\in \mathrm{Z},\ q\in N\right\}$
R	- нақты сандарының жиыны:	$R=\{x:\ \ x\in(-\infty,+\infty)\}$
C	- комплекс сандарының жиыны:	$C=\{a+bi:\ a,b\in R,\ i^2=-1\}$
Ø	- бос жиын:	элементсіз жиын.

$X:=[5,7]$ белгілейік, онда $6\in X$, $3\notin X$. $Y:=(5,7)$ жиынға, элемент $5\notin Y$.

Математикада сөз құрамдарын ерекше символдармен ауыстырады:

1. *Кванторлар*: $\forall$, $\exists$.

$\forall$ – кез келген, барлық (*All*); – қандай болмаса да;

$\exists$ – табылады, бар болады (*Exist*).

2. *Импликация*: $\Rightarrow$.

Егер A,B – екі тұжырым болса, онда

$A\Rightarrow B$
– егер A дұрыс болса, онда B дұрыс
– A дан B иеді
– A B-ге жеткілікті
– B A-ға қажетті

A – шарт (посылка)
B – шешімі (нәтижесі)

3. *Теңбе теңдік* $\Leftrightarrow$.

Егер A,B – екі тұжырым болса, онда

$A\Leftrightarrow B$
– $A\Rightarrow B$ және $B\Rightarrow A$ бір сәтте орындалады;
– A равносильно B;
– A дұрыс сонда тек қана сонда егер B орындалса (дұрыс);
– A B-ге қажетті және жеткілікті;
– A B-ге критерий боп келеді;
– B A-ға критерий боп келеді.

4. *Дизъюнкция*: $\vee$ – «немесе».

A,B,C - үш тұжырым берілсін:

$A:=(x^2=1)$, $B:=(x=-1)$, $C:=(x=1)$. Онда математикалық символдарды қолдансақ, осылай жазуға болады:

$$A\Rightarrow B\vee C \text{ және } B\vee C\Rightarrow A\text{, сондықтан}$$
$$A\Leftrightarrow B\vee C.$$

басқаша

$$(x^2=1)\Leftrightarrow(x=-1)\vee(x=1).$$

5. *Конъюнкция*: $\wedge$ – «және».

A,B,C - үш тұжырым берілсін:

$A:=(x>2)$, $B:=(x\neq 2)$, $C:=(x\in R_+)$. Математикалық символдар бойынша:

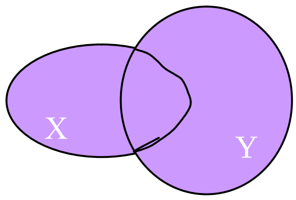
$$A\Rightarrow B\wedge C\text{, немесе } (x>2)\Rightarrow(x\neq 2)\wedge(x\in R_+),$$

бірақ осы шарттарға $(x\neq 2)\wedge(x\in R_+)$ қарағанда A шарты орындалмайды (өйткені $x=1$ болса, ол B және C шарттарға қанағат, бірақ A шартқа бағынбайды).

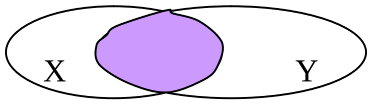
6. *жалғыздық* – ! , *болсын делік* – (Let)

ЖИЫНДАР АРАСЫНДАҒЫ АМАЛДАР

Анықтама 1. Бірігу $X \cup Y := \{a:\ a \in X \vee a \in Y\}$



Анықтама 2. Қиылысу $X \cap Y := \{a:\ a \in X \wedge a \in Y\}$



Анықтама 3. Декарттық көбейтіндісі $X \times Y = \{(a,b):\ a \in X, b \in Y\}$

Анықтама 4. Айыру $X \setminus Y = \{a:\ a \in X \wedge a \notin Y\}$.

A - жиын, $a \in \mathrm{A}$. A_1 - жиынының $\forall$ элементі A жиынының да элементі болса, онда A_1 - A жиынының ішкі жиыны болады. Белгілеуі: $\mathrm{A}_1 \subseteq \mathrm{A}$. Бірде-бір элементі жоқ жиынды бос жиын деп атайды. $\varnothing$ арқылы белгілейміз.

Анықтама1. $\mathrm{A} \neq \varnothing$ жиынында бинарлы амал берілген деп айтамыз, егер осы жиынның $\forall$ реттелген екі элементіне сәйкес келетін үшінші элементті анықтайтын ереже берілген болса.

$\oint$ амалы; $\begin{array}{l} a, b \in \mathrm{A} \to c = a \oint b \\ b, a \in \mathrm{A} \to d = b \oint a \end{array}$

c элементі a, b элементтеріне $\oint$ амалын қолданғанда шыққан элемент.

IR- нақты сандар жиыны; 1) $\langle \mathrm{IR}, + \rangle + a, b \to a + b = c$,

2) $\langle \mathrm{IR}, \cdot \rangle \cdot a, b \to a * b = c$;

3) $\langle \mathrm{R}, : \rangle\ a, b \to: a, b \to a : b = c$, ал егер b=0 болса, онда a:b анықталмайды, сол себепті : бинарлы амал емес.

Анықтама 2. Бір элементке сәйкес бір элемент қоятын амал унарлы деп аталады.

1) $\langle \mathrm{IR}, f \rangle\ f$ -унарлы амал болады;

2) $\langle \mathrm{IR}, g \rangle\ g;\ a \to \dfrac{1}{a}$ - унарлы емес.

Анықтама1. Егер $\mathrm{A} \neq \varnothing$ жиынында бинарлы қосу және көбейту амалдары беріліп, ол амалдарға байланысты келесі аксиомалары қанағаттандыратын болса, $\langle \mathrm{A}, +, \bullet \rangle$ жиыны **сақина** құрайды деп аталады ($\forall$ -кез келген; $\exists$ - табылады).

1) $\forall a, b, c \in \mathrm{A};\ (a + b) + c = a + (b + c)$ - ассоциативтік аксиома.

2) $\forall a, b \in \mathrm{A};\ a + b = b + a$ - коммутативтік аксиома.

3) $\forall a \in \mathrm{A}\ \exists \varnothing \in \mathrm{A};\ a + \varnothing = \varnothing + a = a$ -нөлдік элементті табу аксиомасы.

4) $\forall a \in \mathrm{A}\ \exists b \in \mathrm{A}; a + b = b + a = \varnothing$ - қарама-қарсы элементтің табылу аксиомасы.

5) $\forall a, b, c \in \mathrm{A}\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

6) $\exists e \in \mathrm{A}\ \forall a \in \mathrm{A};\ a \cdot e = e \cdot a = a$ -бірлік элементін табу аксиомасы.

7) $\forall a, b, c \in A;$ $\begin{array}{l}(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\\ a\cdot(d+c) = a\cdot b + a\cdot c\end{array}$ - дистрибутивтік аксиомалар.

Анықтама 2. Егер А сақинасы

8) $\forall a, d \in A; a\cdot b = b\cdot a$ аксиомасын қанағаттандырса, онда А коммутативтік сақина деп аталады.

Анықтама 3. Егер А сақинасы

9) $\forall a \neq \varnothing \ \exists b \ a\cdot b = b\cdot a = e; b = a^{-1}$ - кері элементтің табылу аксиомасын қанағаттандырса, онда А дене деп аталады.

Анықтама 10. Коммутативтік дене **өріс** деп аталады.

Мысал: N-натурал сандар жиыны, Z - бүтін сандар, Q- рационал сандар, IR - нақты сандары үшін

1) $\langle N, +, \cdot\rangle$ -сақина емес, себебі нөлдік элемент пен қарама-қарсы элемент анықталмаған;

2) $\langle Z, +, \cdot\rangle$ -коммутативтік сақина құрайды, бірақ дене де, өріс те болмайды, себебі кері элемент анықталмаған;

3) $\langle Q, +, \cdot\rangle$ -рационал сандар өрісі;

4) $\langle IR, +, \cdot\rangle$ - нақты сандар өрісі.

Бүтін сандар жиынын қарастырайық. Ол жиын қосу және көбейту амалына қатысты **Z** сақинасын құрады.

a саны $b \neq 0$ санына *бөлінеді,* егер де $a = bq$ орындалатындай q саны табылса. Бұл жағдайда b саны a санын *бөледі* деп айтады.

Бүтін сандар бөлінгіштігінің қасиеттерін қарастырайық.

Л е м м а 1. *Егер* $c \mid b$ *және* $b \mid a$, *онда* $c \mid a$.

Л е м м а 2. Егер $m = a + b$, ал $d \mid m$ және $d \mid a$, онда $d \mid b$.

Л е м м а 3. Егер $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $(a, b) = 1$ және де $b \mid ac$, онда $b \mid c$.

Л е м м а 4. *Егер* b *бүтін саны* $a_1, ..., a_n$ *бүтін сандардың әр қайсысымен өзара жай болса, онда* b *саны* $a_1 \cdot ... \cdot a_n$ *көбейтіндісімен өзара жай болады.*

Қ а л д ы қ п е н б ө л у т у р а л ы т е о р е м а. *Егер* a *және* b *- бүтін сандар болса және де* $b > 0$, *онда*

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b$$

орындалатындай жалғыз q *және* r *бүтін сандары бар болады.*

А р и ф м е т и к а н ы ң н е г і з г і т е о р е м а с ы. *Кез келген* $n > 1$ *натурал санды жай сандардың көбейтіндісі ретінде жазып көрсетуге болады және де көбейткіштердің орналасу ретін ескермей алсақ бір ғана жалғыз түрі болады.*

Е в к л и д т е о р е м а с ы. *Жай сандар жиыны шексіз.*

Тақырып 2. Комплекс сандар

Жоспар:

1. Комплекс санның анықтамасы
2. Комплекс санның алгебралық, тригонометриялық, көрсеткіштік формалары
3. Комплекс сандарға қолданылатын амалдар

Комплекс сандардың математикада атқаратын ролі орасан зор. Комплекс сандар ұғымы квадрат теңдеулердің дискриминанты нольден кіші болған жағдайда оның нақты сандар R жиынында түбірі болиайтынына байланысты шыққан. Комплекс сандардың негізін құрайтын қазіргі математикада і деп белгіленетін сан $x^2+1=0$ теңдеуін қанағаттандырады. Сонымен і деп белгілегеніміз, $i^2=-1$ болатын, бұрын кездеспеген жаңа сан.

Комплекс сан деп x+iy түріндегі сан аталады. Оның құрамындағы x, y екеуі де нақты сандар болады, x-оның нақты бөлігі, ал y жорамал бөлігі деп аталады. Егер x+iy санын z әрпімен белгілесек (z=x+iy), онда Re(z) және Im(z) осы z–тің нақты және жорамал бөліктерінің белгілеулері болып табылады, яғни x=Re(z), y=Im(z). Бұл жерде Re және Im латынша Realis (нақты) және: maginarius (жорамал) сөздерінің бастапқы буындары;

z=(x, y)=x+iy=Re z+Im z.

Комплекс сандар жиыны C символымен белгіленеді.

Комплекс сандарға амалдар қолдану.

Комплекс сандарды қосу және азайту.

Екі комплекс санды z_1 және z_0 қосу не азайту үшін олардың нақты бөліктерін өзара, сондай-ақ жорамал бөліктерін өзара қосу не азайту керек.

Егер $z_1 + z_2 = z_3$ десек, мұндағы $z_3 = x_3 + iy_3$, онда $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$.

Қосу амалының қасиеттері:

Қасиет 1. Кез келген $z_1, z_2 \in C$ үшін $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Қасиет 2. Кез келген $z_1, z_2, z_3 \in C$ үшін $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1(z_2 + z_3)$

Қасиет 3. Кез келген $z \in C$ үшін $z + 0 = 0 + z = z$

Қасиет 4. Кез келген $z_1 \in C$ үшін $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0$

теңдіктері орындалатындай $z_2 \in C$ табуға болады. z_2 комплекс саны z_1–ге қарама-қарсы деп аталады.

Комплекс сандарды көбейту не дәрежелеу.

Алгебралық формада берілген екі комплекс санның көбейтіндісін табу үшін әдеттегі екі мүшелі көбейткіштердің көбейтіндісін табу ережелерін қолданады; сонда $i^2 = -1$ екенің еске алып, нақты және жорамал бөліктерін айырып жазып қояды:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Кейде комплекс сандардың көбейтіндісін табу үшін оларды тригонометриялық формада жазып алған ыңғайлы.

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Тригонометриялық түрдегі комплекс сандарды көбейткенде, олардың модульдері көбейтіліп, аргументтері қосылады.

Тақырып 3. Полиномдар алгебрасы

Жоспар:

1. Полином ұғымы
2. Қалдықпен бөлу. Безу теоремасы
3. n −ші дәрежелі теңдеулер
4. Гаусс теоремасы

z айнымалыдан полином (көпмүше) деп келесі түрдегі өрнекті айтады:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0\,,\ n \in N,\ a_i \in C\ .$$

a_i - полиномның коэффициенттері, $a_n \neq 0$ - үлкен коэффициент, a_0 – бос мүше, n - полиномның дәрежесі.

Егер $a_n = 1$ болса, онда полином келтірілген деп аталады. Көпмүшелер үшін қосу, азайту, көбейту амалдары анықталған. Бөлу амалы кез келген көпмүшелер паралары үшін анықталмаған, бірақ бүтін сандар үшін сияқты қалдықпен бөлуге мүмкіндік бар.

Теорема. Кез келген $P_n(z)$ және $Q_m(z)$ екі көпмүше үшін

$$P_n(z) = Q_m(z) \cdot T(z) + R(z)$$

теңдігі орындалатындай бір мәнді анықталатын $T(z)$ және $R(z)$ көпмүшелері бар болады, және $R(z)$ дәрежесі m дәрежеден кіші.

$T(z)$ көпмүше – бөлінді, $R(z)$ - қалдық. Бөлінді мен қалдықты табу үшін көбінесе «бұыштап бөлуді» қолданады.

Тақырып 4. Матрицалар және анықтауыштар

Жоспар:

1. Анықтауыштар, олардың қасиеттері
2. Матрицалар, оларға қолданылатын амалдар
3. Кері матрица
4. Матрица рангі

Аныктама 1 Екінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

санын айтамыз. Бұл сан екі тік

және екі жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

кестесі түрінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады.

Мұндағы $a_{ij} (i = 1,2; j = 1,2)$ - анықтауыштың элементтері. a_{ij} элементінің бірінші **i** индексі анықтауыштың жатық жолының, ал екінші **j** индексі тік жолының нөмері. Мысалы a_{12} - 1-жатық 2 – тік жолының қиылысуындағы элемент. Кестенің a_{11} және a_{22} элементтері арқылы өтетін «түзу» анықтауыштың **негізгі диагоналы**, ал a_{12} және a_{21} элементтері арқылы өтетін «түзу» **қосалқы диагоналы** деп аталады.

Анықтама бойынша, екінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кестенің негізгі диагоналындағы элементтерінің көбейтіндісі мен қосалқы диагоналындағы элементтері көбейтіндісінің айырымына тең. Демек,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Анықтама 2 Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{21} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

санын айтамыз. Бұл сан үш тік және үш жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

кестесі ретінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады. Мұндағы $a_{ij} (i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ - анықтауыштың элементтері, i – жатық, ал j – тік жолдарының нөмірі.

Үшінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кесте элементтерінен үшбұрыш немесе **Саррюс ережесі** бойынша есептеледі. Бұл ереже бойынша плюс таңбасымен алынған үш қосылғыш төменде келтірілген «+» **сұлба**, ал минус таңбасымен алынған үш қосылғыш **«-» сұлба** бойынша есептеледі:

«+» сұлба «-» сұлба

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. **n-ретті анықтауыштар және оның қасиеттері**

1-ден n-ге дейінгі натурал сандардың кез келген орналасуы **алмастыру** деп аталады. n натурал саннан $n!$ алмастыру құруға болады. Егер алмастыруда үлкен сан кіші санның алдында тұрса, онда бұл сандар инверсия (ретсіздік) құрайды.

Егер $\left[j_1, j_2, ..., j_n\right]$ алмастыру болса, онда осы алмастырудағы инверсия саны $\left[j_1, j_2, ..., j_n\right]$ деп белгіленеді. Егер инверсия саны жұп болса алмастыру жұп, ал тақ болса тақ деп аталады.

Анықтама 3. n - ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \sum (-1)^{[j_1, j_2, ..., j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$$

қосындыны айтамыз және оны былай белгілейміз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1, j_2, ..., j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} \qquad (1)$$

Мұндағы қосу белгісі 1,2,3,..., n сандарынан құралған барлық $j_1, j_2, ..., j_n$ алмастырулары бойынша алынады, демек анықтауышта $n!$ қосылғыш бар, олардың жартысы «+», жартысы «-» таңбасымен алынады.

Анықтауышты белгілейтін кесте де **анықтауыш** деп аталады. Бұл кесте n тік және n жатық жолдардан тұрады. Кестенің a_{ij} элементінің бірінші i индексі -жатық, ал екінші j индексі тік жолының номері, a_{ij} - осы жолдардың қиылысуындағы элемент.

Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолының сәйкес элементтері өзара тең болса бұл жолдар тең деп аталады.

Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолдары өзара пропорционал элементтерден тұрса, демек

$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}} = \frac{a_{i2}}{a_{k2}} = ... = \frac{a_{in}}{a_{kn}}, i \neq k, \left(\frac{a_{1j}}{a_{1l}} = \frac{a_{2j}}{a_{2l}} = ... = \frac{a_{nj}}{a_{nl}}, j \neq l\right)$$

теңдігі орындалса, бұл жолдар **пропорционал** деп аталады.

Жатық (тік) жолдың α санына көбейтіндісі деп барлық элементтері α санына көбейтілген осы жолды айтамыз.

Анықтауыштың жатық жолдарын, орналасу ретін сақтап, тік жолдарымен алмастыру анықтауышты транспонирлеу деп аталады. Транспонирленген анықтауыш элементінің бірінші индексі тік, екіншінің индексі жатық жолының нөмерін көрсетеді.

3. **Анықтауыштың қасиеттері:**

1) Анықтауышты транспонирлеу оның мәнін өзгертпейді;

2) Өзара тең екі жатық (тік) жолы бар анықтауыш нөлге тең болады;

3) Егер анықтауыштың қандай да болмасын бір жатық (тік) жолын бір α санына көбейтсе, онда осы санға анықтауышта көбейтіледі;

4) Егер анықтауыштың жатық (тік) жолындағы барлық элементтердің ортақ көбейткіші болса, онда бұл көбейткішті анықтауыштың сыртына шығаруға болады;

5) Егер анықтауыштың екі жатық(тік) жолы пропорционал болса, онда бұл анықтауыш нөлге тең болады;

6) Егер анықтауыштың k нөмірлі жатық (тік) жолының әрбір элементі екі санның қосындысынан тұрса, онда бұл анықтауыш, басқа элементтері өзгерусіз сақталған, k нөмерлі жатық (тік) жолы бірінші анықтауышта қосылғышының бірінші, екінші анықтауышта екінші қосылғышымен алмастырылған, екі анықтауыштың қосындысына тең;

7) Егер анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолын бір санға көбейтіп басқа бір жатық (тік) жолына қоссақ, онда бұл түрлендіру анықтауыштың мәнін өзгертпейді;

8) Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолдары орындарын алмастырса, онда анықтауыш абсолют шамасын сақтап, таңбасын қарама-қарсы өзгертеді.

4. Минорлар мен алгебралық толықтауыштар

Анықтама 4. Берілген n-ретті

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының a_{ij} **элементінің** M_{ij} **миноры** деп осы анықтауыштың i нөмерлі жатық жолы мен j нөмерлі тік жолын сызып тастағаннан кейінгі қалған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтады.

Анықтама 5 Δ анықтауышының a_{ij} элементінің **алгебралық толықтауышы** деп $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынғын M_{ij} миноры айтылады да, A_{ij} деп белгіленеді:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Егер Δ анықтауышының i нөмерлі жатық (j нөмерлі тік) жолының a_{ij}-ден басқа элементтері нөлге тең болса, онда бұл анықтауыш $a_{ij}A_{ij}$-ге тең:

$$\Delta = a_{ij}A_{ij} \qquad (2)$$

Анықтауыш i нөмерлі жатық жолының элементтері бойынша

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (3)$$

қосындысы ретінде өрнектеледі.

Анықтауыштың кез келген k нөмерлі жатық (l нөмерлі тік) жолының элементтері мен осы элементтерге сәйкес басқа i нөмерлі жатық (j нөмерлі тік) жолының алгебралық толықтауыштары көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \dots + a_{kn}A_{in} = 0, \; k \neq i.$$

Матрицаларға қолданылатын амалдар

1) Матрицаларды қосу*:* Тең ретті

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ және } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицалары берілген. Қысқаша, бұл матрицаларды $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$ деп белгілейміз. Мұндағы m-матрицаның жатық, n-тік жолдарының саны.

A және B матрицаларының **қосындысы** деп, элементтері $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$ формулалары бойынша есептелетін $C = (c_{ij})_{mn}$ матрицаны айтамыз. Сонымен, $C = A + B = (a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mn} = (c_{ij})_{mn}$

2) Матрицаларды санға көбейту*:* $A = (a_{ij})_{mn}$ матрицасының α санына көбейтіндісі деп, элементтері

$$d_{ij} = \alpha a_{ij}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$$

формулалары арқылы анықталатын $D = (d_{ij})_{mn}$ матрицасын айтамыз. Сонымен, $D = \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{mn} = (d_{ij})_{mn}$.

3) Матрицаны матрицаға көбейту:

$m \times n$ *ретті* $A = (a_{ij})_{mn}$ және $n \times l$ *ретті* $B = (b_{jk})_{nl}$ матрицалары берілсін. A матрицасының B матрицасына **көбейтіндісі** деп элементтері

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \ i = \overline{1, m}, \ k = \overline{1, l}$$

формулалары бойынша анықталатын, $m \times l$ ретті $C = (c_{ik})_{ml}$ матрицасын айтамыз. Сонымен,

$$C = AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{ml} = (a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk})_{ml} = (c_{ik})_{ml}.$$

4) Матрицаны **транспонирлеу**: Матрицаның жатық жолдарын, орналасу ретін сақтап, тік жолдарымен алмастыру матрицаны транспонирлеу деп аталады. Егер

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}$$

болса, онда

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}$$

транспонирленген матрица болады.

Кері матрица

Квадратты матрица. Жатық жолдар саны тік жолдар санына тең $(m = n)$ матрица квадратты деп аталады. $A = (a_{ij})_{nn}$ квадратты матрицасы берілген.

Егер $A = A'$, демек $a_{ij} = a_{ji}$ болса, онда A симметриялы матрица деп аталады.

Квадратты A матрицаның анықтауышын $|A|$ деп белгілейміз. Әлбетте, $|A| = |A'|$. Анықтауышы нөлге тең матрица **өзгеше** деп аталады.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

бірлік матрица деп аталады.

$n \times n$ ретті *A* және *B* матрицалары берілсін. Егер В матрицасы үшін

$$A \cdot B = B \cdot A = E \qquad (4)$$

теңдігі орындалса, онда В матрицасы А-ға кері матрица деп аталады да $B = A^{-1}$ деп белгіленеді. Осы белгі арқылы (4) теңдігі $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ түрінде жазылады.

Егер А өзгеше матрица болмаса, демек $|A| \neq 0$ болса, онда А-ға кері бірден-бір матрица бар болады және кері матрица

$$A = \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

формуласы бойынша анықталады.

Матрицаның рангісі:

Анықтама 6. m жатық және n тік жолдардан тұратын

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кестесі $m \times n$ **ретті матрица** деп аталады. Әдетте, матрица бір бас әріппен белгіленеді, мысалы **M** деп.

Осы матрицаның кез келген k жатық және k тік жолдарын белгілеп алып, осы жолдардың қиылысуындағы элементтерден, олардың берілген матрицадағы орналасу ретін сақтап құрылған k- ретті анықтауыш k- **ретті минор деп аталады** ($(k \leq \min\{n, m\})$.

Егер M матрицасында нөлге тең емес r ретті минор бар болса, ал реттері r -ден жоғары барлық минорлар нөлге тең болса, онда r саны осы матрицаның рангі деп аталады және $rang\, M$ деп белгіленеді: $r = \operatorname{rang} M$.

Барлық элементтері нөлге тең матрица *нөлдік матрица* деп аталады. Келісім бойынша, нөлдік матрицаның рангі нөлге тең.

$m \times n$ ретті, сәйкес элементтері өзара тең екі матрица **тең матрицалар** деп аталады.

Рангті есептеу әдістері: 1) Көмкерген минорлар әдісі. Берілген матрицаның r - ретті минорының көмкеруі деп осы минор енетін кез келген $(r+1)$ ретті минорын айтады.

Теорема 1 Егер берілген M матрицасының нөлге тең емес r -ретті миноры бар болса және осы минорды көмкеретін барлық $(r+1)$ ретті минорлар нөлге тең болса, онда бұл матрицаның рангі r -ге тең: $\operatorname{rang} M = r$.

2) Рангті берілген матрицаның элементтерін **түрлендіру** арқылы есептеу. Бұл әдіс төмендегі теоремаларға негізделген.

1) Жатық жолдардың орнын алмастыру;

2) Кез келген жатық жолын нөлге тең емес санға көбейту;

3) Кез келген жатық жолына осы матрицаның басқа жатық жолын бір санға көбейтіп қосу;

4) Бірыңғай нөлден тұратын жолын алып тастау, матрицаның рангін өзгертпейді.

Бас диагоналы астындағы элементтері нөлге тең матрица **сатылы** деп аталады. Квадратты матрицаның сатылы түрі **үшбұрышты** деп аталады.

Теорема 3 Сатылы түрге келтірілген матрицаның рангі оның бас диагонолындағы нөлге тең емес элементтерінің санына тең.

Тақырып 5. Сызықты теңдеулер жүйелері

Жоспар:

1. Сызықты теңдеулер жүйелері
2. Кронеккер-Капелли теоремасы
3. Крамер формулалары
4. Кері матрица әдісі
5. Гаусс әдісі

n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі мына түрде беріледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (6)$$

Мұндағы x_j - белгісіз шамалар, a_{ij} - i нөмерлі теңдеудегі j нөмерлі белгісіздің коэффициенті, b_i - i нөмерлі теңдеудің бос мүшесі, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

(6) теңдеулер жүйесінің коэффициентерінен құрылған мына матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mn} \qquad (7)$$

негізгі матрица деп аталады, ал мына матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (8)$$

осы жүйенің **кеңейтілген** матрицасы делінеді.

Егер (6) теңдеулер жүйесінің барлық бос мүшелері нөлге тең болса, онда бұл жүйе **біртекті** деп аталады.

1.2 пунктінің 2-ші және 3-ші анықтамаларда аталған теңдеулер жүйесінің шешімі үйлесімді, үйлесімсіз, анықталған және анықталмаған теңдеулер жүйесі туралы ұғымдар өздерінің мағыналарын толық сақтайды.

(6) теңдеулер жүйесінің белгісіздері мен бос мүшелерінен

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix} \text{ және } \quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{pmatrix}$$

матрицаларын құрып осы жүйені мына матрицалық теңдеу түрінде жазамыз:

$$A\cdot X=B. \qquad (9)$$

n белгісізі бар n теңдеулер жүйесін шешу әдістері

1) Крамер әдісі: Біртекті емес n белгісізді n теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases} \qquad (10)$$

Осы жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

нөлге тең болмасын.

Осы анықтауыштың k нөмерлі тік жолының элементтерін (10) жүйесінің сәйкес бос мүшелерімен алмастырғанда шыққан анықтауышты Δ_k деп белгілеік:

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{1k-1}&b_1&a_{1k+1}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{1k-1}&b_2&a_{2k+1}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nk-1}&b_n&a_{nk+1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix},\ k=\overline{1,n}$$

Осы анықтауыштар бойынша (10) теңдеулер жүйесінің шешімі Крамер формулалары арқылы анықталады:

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\ k=1,2,\dots,n.$$

2) Гаусс әдісі Гаусс әдісі матрицаның рангін өзгертпейтін элементар түрлендірулерге негізделген. Бұл түрлендірулер теңдеулер жүйелерінің эквиваленттігін сақтайды. Шешімдері бірдей немесе екеуі де үйлесімсіз болатын теңдеулер жүйелері эквивалентті деп аталады.

Гаусс әдісінің сұлбасы: Алдымен (10) теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасы құралады:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

Элементар түрлендірулер арқылы бұл матрица үшбұрышты түрге келтіріледі:

$$\begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \dots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_m \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Цлементар түрлендірулердің қасиеті бойынша, (11) теңдеулер жүйесі (10) жүйесіне эквивалентті. (11) жүйесінің ең соңғы теңдеуінен x_n-ді, бір қадам жоғары көтеріліп, келесі теңдеуден x_{n-1}-ді табамыз. Осылай табылған $x_1, x_2, \dots x_n$ белгісіздерінің мәндері (10) жүйесінің шешімі болады.

Ескерту: (10) теңдеулер жүйесіне қойылған негізгі шарт осы жүйенің анықталғандығы, демек жүйенің анықтауышы $D \neq 0$ болуы. Сондықтан, $a^*_{nn} \neq 0, \dots, a^*_{22} \neq 0, a^*_{11} \neq 0$. Бұл шарт матрицалар әдісінде де сақталады.

3) Матрица әдісі. (10) теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазамыз $A \cdot X = B$. (9 теңдеуі)

(5) формуласы бойынша А матрицасына кері A^{-1} матрицасын табамыз. Енді (9) теңдеуін сол жағынан A^{-1}-ге көбейтіп және $A^{-1}A = E$ екенін ескеріп,

$X = A^{-1}B$

түрінде (9) теңдеуінің шешімін табамыз.

n белгісізі бар m теңдеулер жүйесін зерттеу және үйлесімді болған жағдайда шешімін табу әдісі

Кронекер-Капелли теоремасы. Біртекті емес (6) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін осы жүйенің негізгі матрицасының рангі оның кеңейтілген матрицасының рангіне тең болуы:

$$\text{rang}A = \text{rang}A^*$$

қажетті және жеткілікті.

Бұл теорема арқылы жүйенің үйлесімді немесе үйлесімсіз болатыны шешіледі.

Жүйе үйлесімді болған жағдайда төмендегі екі жағдай қарастырылады:

1) $\text{rang}A = \text{rang}A^* = r = n$, n - белгісіздер саны, $n \leq m$. Бұл жағдайда теңдеулер жүйесі үйлесімді және анықталған. Сондықтан жүйенің шешімі жоғарыда аталған үш әдістің біреуі арқылы анықталады.

2) $\text{rang}A = \text{rang}A^* = r < n$, n - белгісіздер саны, $n \leq m$. Бұл жағдайда теңдеулер жүйесі үйлесімді және анықталмаған. А матрицасының кез келген r-ретті нөлге тең емес минорын негізгі деп жариялап, осы минордың элементтері коэффициенттері болатын r белгісізді негізгі белгісіздер деп аламыз. Мысалы, негізгі минор:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$$

болса, негізгі белгісіздер $x_1, x_2, \dots x_r$ болады. Қалған $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ белгісіздер еркін параметрлер рөлін атқарып, теңдеулер жүйесі мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r} = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1-} \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Бұл жүйеден Крамер, Гаусс, матрица әдістерінің біреуін қолданып $x_1, x_2, ... x_r$ белгісіздерін табамыз. Белгісіздердің мәні $n-r$ еркін параметрлерден тәуелді болады. Біртекті теңдеулер жүйесі осыған ұқсас шешіледі. Бұл жүйе әрқашан үйлесімді. Себебі, негізгі матрицаға біріңғай нөлден тұратын тік жолды қосу оның рангін өзгертпейді. Демек,

$$\text{rang}A = \text{rang}A^* = r$$

Бұл жүйе үшін де төмендегі екі жағдай қарастырылады: 1) $r = n$. Бұл жағдайда біртекті теңдеулер жүйесінің бірден-бір нөлдік (0,0,...,0) шешімі болады. Бұл шешім **айқын** деп аталады. 2) $r < n$. Бұл жағдайда біртекті теңдеулер жүйесінің $n-r$ параметрден тәуелді шексіз көп шешімі болады. Бұл шешімдер жоғарыда келтірілген сұлба бойынша анықталады.

Тақырып 6. Сызықты кеңістіктер

1. Сызықты (векторлық) кеңістік
2. Сызықты кеңістіктің қасиеттері

Айталық бізге қосу және санға көбейту операциялары орындалатын L нақты элементтер жиыны берілсін. Осы операциялардың келесі қасиеттері бар:

1) Коммутативтік $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$
2) Ассоциативтік $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$
3) $\overline{O} + \bar{x} = \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in L$ теңдігі орындалатындай $\overline{O}$ нөлдік вектор болса
4) $\forall \bar{x} \in L$ үшін $\bar{x} + \bar{y} = \overline{O}$ орындалатындай $\bar{y} = -\bar{x}$ векторы бар
5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
6) $\alpha(\beta \bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$
7) Үлестірімділік заңы $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$
8) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$

Цлементтері жоғарыда айтылған қаиеттерге ие болатын L жиыны сызықты (векторлық) кеңістік деп аталады, ал оның элементтері векторлар деп аталады.

Сызықты кеңістіктің қасиеттері.

1) Әр сызықты кеңістікте тек бір ғана нөлдік элемент болады.
2) Әр элементі үшін тек жалғыз ғана қарама-қарсы элемент болады.
3) Әр $\bar{x} \in L$ үшін $0 \cdot \bar{x} = 0$
4) Әр $\alpha \in R$ және $\overline{O} \in L$ үшін $\alpha \cdot \overline{O} = \overline{O}$
5) Егер $\alpha \cdot \bar{x} = \overline{O}$, онда $\alpha = 0$ немесе $\bar{x} = \overline{O}$
6) $(-1)\ \bar{x} = -\bar{x}$

Тақырып 7. Сызықты түрлендірулер

Жоспар:

1. Сызықты түрлендірулер
2. Сызықты түрлендірулер матрицалары
3. Сызықты түрлендірулердің меншікті мәндері мен меншікті векторлары.

Сызықты түрлендірулер.

Айталық L сызықты кеңістікте қандай да бір A сызықты түрлендіру берілсін дейміз, егер кез келген $\bar{x} \in L$ элементке қандай да бір ереже бойынша $A\bar{x} \in L$ элементі сәкестендірілсе.

A түрлендіруі сызықты деп аталады, егер кез келген $\bar{x} \in L$ және $\bar{y} \in L$ векторлары үшін және α үшін келесі теңдіктер орындалса:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}$$

$$A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}$$

Сызықты түрлендіру тепе-тең деп аталады, егер ол сызықты кеңістіктің элементін өз-өзіне түрлендірсе, яғни

$$E\bar{x} = \bar{x}$$

Сызықты түрлендірулер матрицалары.

Айталық n-өлшемді сызықты кеңістікте базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ болатын A сызықты түрлендіру берілсін. Онда $A\overline{e_1}, A\overline{e_2}, \ldots, A\overline{e_n}$ - векторлары – осы кеңістіктің векторлары және оларды берілген базистегі векторлардың сызықты комбинациясы түрінде көрсетуге болады:

$$A\overline{e_1} = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \ldots + a_{n1}\overline{e_n}$$
$$A\overline{e_2} = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \ldots + a_{n2}\overline{e_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\overline{e_n} = a_{n1}\overline{e_1} + a_{n2}\overline{e_2} + \ldots + a_{nn}\overline{e_n}$$

Онда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицасын A сызықты түрлендірудің матрицасы деп аталады.

Сызықты түрлендірулердің меншікті мәндері мен меншікті векторлары.

Айталық L –n-өлшемді сызықты кеңістік болсын. Ненулевой вектор $\bar{x} \in L$ нөлдік емес вектор A сызықты түрлендірудің меншікті вектор деп аталады, егер төмендегі теңдік орындалатындай λ саны бар болса:

$$A\bar{x} = l\bar{x}\,.$$

Және де λ саны A сызықты түрлендірудің $\bar{x}$ векторына сәйкес болатын меншікті мәні деп аталады.

Тақырып 8. Квадраттық формалар

Жоспар:

1. Квадраттық форманың анықтамасы
2. Квадраттық форманың матрицалық жазылуы
3. Квадраттық форманың канондық түрі

Квадраттық форманың анықтамасы

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалылардың квадраттық формасы – төмендегі функция:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots +$$
$$+ a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 +$$
$$+ a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

a_{ij} - квадраттық форманың коэффициенттері.

$X = SX'$ болса, онда

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{nn}x_n^2.$$

Егер $x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылары накты мәндерді қабылдаса және $a_{ij} \in R$, квадраттық форма накты болады.

Квадраттық форманың матрицалық жазылуы

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадраттық форманың матрицасы деп аталады, ал оның рангі – квадраттық форманың рангі.

Квадраттық форма ерекше емес деп аталады, егер $detA \neq 0$.

A матрицаның бас минорлары квадраттық форманың бас минорлары.

7. Тәжірибелік сабақтардың мазмұны, сағаттағы көлемі

Тақырып 1. Бүтін сандар

Жоспар:

1. Жиын ұғымы
2. Сақина мен өріс ұғымы
3. Бүтін сандардың бөлінгіштік теориясы

Мысал 1. n-ның қандай бүтін мәндерінде $3n^4$-$8n^2$-3 саны жай сан болады? Осы жай сан табу керек.

Шешуі. Берілген көпмүшені көбейткіштерге жіктейік:

$3n^4-8n^2-3=3n^4-9n^2+n^2-3=3n^2(n^2-3)+ n^2-3=(n^2-3)(3n^2+1)$.

Көбейтінді тек бүтін n болғанда ғана жай сан бола алады, бір жақшасы бірге тең, ал екінші жақша жай сан болса.

$n^2-3=1$ болғанда $n=\pm2$, онда $3n^2+1=13$.

Егер $3n^2+1=1$ болса, онда n=0. Бұл жағдайда шығатын -3 саны – жай сан болмайды.

Жауабы: $n=\pm2$ болғанда 13 жай сан шығады.

1. A={2, 3} , B={3,4,5} жиындары берілген. $A\cup B$, $A\cap B$, A\ B, B\A, $A\times B$, $B\times A$ табыңыз. Декарт көбейтіндісіне геометриялық интерпретация беріңіз.
2. $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\backslash C$ тепе-теңдігін дәлелдеңіз.
3. A={x|2≤x≤3}, B={y|3≤y≤5} жиындары берілген. $A\cup B$, $A\cap B$, A\B, B\A табыңыз. Декарт көбейтіндісіне геометриялық интерпретация беріңіз $A\times B$, $B\times A$.
4.Айталық, [0,1], [0,2] сандар осінен алынған кесінділер болсын. [0,1]x[0,2], [0,1]2, [0,2]2 жиындарына геометриялық интерпретация беріңіз.
5. $A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$ тепе-теңдігін дәлелдеңіз.
6. AxB ≠ BxA болатындай A және B жиындарын құрыңыз.
7. $(A\cup C)\cap(A \cup B)\cap(B \cup C)\cap(A \cup B)\cap(B\cup C)= 0$тепе-теңдігін дәлелдеңіз.
8. $(A\cup B\cup C)+ (A\cap B\cap C)= (A\cup B\cup C)- (A\cap B\cap C)$ тепе-теңдігін дәлелдеңіз
9. $(A\cap B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$ қатынасының дұрыстығын дәлелдеңіз.
10.A={a, b} және B={c, d} жиындары берілген. Бұл жиындардың арасында неше әртүрлі сәйкестік орнатуға болады. A-ны B-ға іштей бейнелеу, функционал бейнелеу, функцияларды сипаттаңыз.

Тақырып 2. Комплекс сандар

Жоспар:

1. Комплекс санның анықтамасы

2. Комплекс санның алгебралық, тригонометриялық, көрсеткіштік формалары

3. Комплекс сандарға қолданылатын амалдар

1. Есептеңіздер: $i^2, i^3, i^4, i^{231}, i^{318}, \frac{1}{i^3}, i^{-3}, i^{-231}, i^n$.

2. Берілген кешен сандардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісінің геометриялык бейнесін табыңыздар

$1)\ \alpha = 1; \beta = 1 + i;\ 2)\ \alpha = 3 - i; \beta = 1 + 2i;\ 3)\ \alpha = -2 + i; \beta = 2 + i;$

$4)\ \alpha = 1 + i; \beta = 1 - i; 5)\ \alpha = a + bi; \beta = c + di$

3. Амалдарды орындаңыздар

$1. \frac{1}{i};\quad 2. \frac{1-i}{1+i};\quad 3. \frac{2}{1-3i};\quad 4. \frac{a+bi}{c+di}.;$

4. Кешен сандардың нақты және жорамал бөлімдерін, модулі мен аргументтерін табыңыздар. Оларды тригонометриялық және көрсеткіштік түрінде жазыңыздар

1. $3i$; 2. -2; 3. $1+i$; 4. $-1-i$; 5. $2+5i$; 6. $2-5i$; 7. $2+5i$; 8. $-2-5i$; 9. $bi, (b \neq 0)$.

5. Кешен саннан алынған квадрат түбірді есептеңіздер

$1. \sqrt{1};\ 2. \sqrt{i};\ 3. \sqrt{1+i};\ 4. \sqrt{-1+i};\ 5. \sqrt{-1-i};\ 6. \sqrt{1-i};\ 7. \sqrt{-4+3i};$

$8. \sqrt{-4-3i1};\ 9. \sqrt{4-3i};\ 10. \sqrt{2+3i}.$

6. Кешен саннан алынған түбірдің барлық мәндерін табыңыздар және олардың комплекс жазықтығындағы бейнесін салыңыздар

$1. \sqrt[3]{1};\ 2. \sqrt[3]{i};\ 3. \sqrt[4]{-1};\ 4. \sqrt[6]{-8};\ 5. \sqrt[8]{1};\ 6. \sqrt[4]{1-i};\ 7. \sqrt[6]{3-4i};$

$8. \sqrt{2-2i}\quad 9. \sqrt[3]{-3+4i};\ 10. \sqrt[5]{-3-4i}.$

7. Есептеңіздер

$1. (1-i)^{20};\ 2. (1-i\sqrt{3})^{15};\ 3. \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3;\ 4. \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{20};\ 5. \frac{1}{(\sqrt{3}-i)^{17}};$

8. Берілген кешен сандар жиынының кешен жазықтығындағы бейнесін құрыңыздар.

$1. |z| = 1;\ 2. |z+2| = 2;\ 3. \operatorname{Re} z < 0;\ 4. \operatorname{Im} z > 2;\ 5. 3 \le |z+2i| < 4;$

$6. \frac{\pi}{4} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4};\ 7. |z+i| = |z-i|;\ 8. |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1;$

$9. |z - z_0| = R;\ 10. |z+1-2i| = 3.$

9. Берілген кешен сандар жиынының геометриялық мағынасын анықтаңыздар.

$1. |z-2| + |z+2| = 5;\quad 2. |z-2| - |z+2| > 3;\ 3. |z - z_1| = |z - z_2|.$

10. Берілген теңдеулер арқылы анықталған кешен жазықты-ғындағы сызықтар үйірлерін табыңыздар.

$1. \operatorname{Re}\frac{1}{z} = C;\ 2. \operatorname{Im}\frac{1}{z} = C\ (-\infty < C < +\infty).;\ 3. \operatorname{Re} z^2 = C;$

$4. \operatorname{Im} z^2 = C\ (-\infty < C < +\infty).$

11. Теңсіздіктердің геометриялық мағынасын ескеріп дәлелдеңіздер

$1. |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|;\quad 2. |z_1 - z_2| > \big||z_1| - |z_2|\big|.$

12. Теңдікті дәлелдеңіздер

$$1.\ \mathrm{Re}\,\alpha=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2},\ \mathrm{Im}\,\alpha=\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i};\ 2.\left(\overline{\overline{\alpha}}\right)=\alpha;\ 3.\overline{(\alpha\pm\beta)}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta};$$

$$4.\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}};\ 5.\left(\overline{\alpha\beta}\right)=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta};\qquad 6.\left(\overline{\alpha^n}\right)=\overline{\alpha}^n;\ 7.\left|\overline{\alpha}\right|=|\alpha|;\ 8.|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha};$$

13. Теңдікті дәлелдеңіздер

$$1.|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|;\qquad 2.\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|};\qquad 3.\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

14. Кешен жазықтығында берілген жиындарды теңсіздік арқылы жазыңыздар

1) Жорамал өске параллель түзумен шектелген жарты жазықтықтар;

2) Нақты өске параллель түзумен шектелген жарты жазықтықтар;

3) Ені $2h$, орта сызығы нақты өс болатын жолақ;

4) Центрі z_0 нүктесінде жатқан ,радиусы R болатын дөңгелектің ішкі жағы;

5) Жарты өстері a және b болатын, центрі координат басында жататын және үлкен өсі нақты өспен $\frac{\pi}{4}$ бұрышын жасайтын эллипстің ішкі жағы;

6) $y^2=2px$ параболасымен шектелген кешен жазықтығының бөліктері;

7) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболасының тармақтарымен шектелген кешен жазықтығының бөліктері.

15. Төмендегі шамалардың геометриялық мағынасын анықтаңыздар

$1.|z|;\qquad 2.|\mathrm{Re}\,z|;\qquad 3.|\mathrm{Im}\,z|.$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 25 $(2+3i)+(7+2i)=9+5i$.

Мысал 26 $(2+4i)-(5-i)=-3+5i$.

Мысал 27 $(2-3i)(4+5i)=8-12i+10i-15i^2=(8+15)-2i=23-2i$.

Мысал 28 $\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(2-3)+5i}{1+1}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$.

Тақырып 3. Полиномдар алгебрасы

Жоспар:

1. Полином ұғымы
2. Қалдықпен бөлу. Безу теоремасы
3. n −ші дәрежелі теңдеулер
4. Гаусс теоремасы

Мысал 1. z^4+z^3-1 көпмүшесін z^2+2 көпмүшесіне қалдықпен бөлу керек.

$$\begin{array}{l|l}
z^4+z^3-1 & z^2+2 \\ \cline{2-2}
\underline{z^4+2z^2} & z^2+z-2 \\
\quad z^3-2z^2 & \\
\quad \underline{z^3+2z} & \\
\qquad -2z^2-2z-1 & \\
\qquad \underline{-2z^2-4} &
\end{array}$$

$$-2z+3$$

Бөлінді $T(z) = z^2 + z - 2$, қалдық $R(z) = -2z + 3$.

$z^4 + z^3 - 1 = (z^2 + 2)(z^2 + z - 2) - 2z + 3$.

Мысал 2. $z^4 + 3z^3 - 4$ көпмүшенің түбірлерін табу керек.

Бос мүше (-4). Оның бөлгіштері ±1, ±2, ±4. $z = 1$ және $z = -1$ көпмүшенің түбірлері. Бөлуді орындаймыз: $z^4 + 3z^3 - 4 = (z-1)(z^3 + z^2 + 4z + 4) = (z-1)(z+1)(z^2 + 4)$.

$z^2 + 4 = 0$ теңдеуін шешкенде тағы екі түбір табамыз $z_{1,2} = \pm 2i$. Онда

$z^4 + 3z^3 - 4 = (z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i)$ – бұл сызықты көбейткіштерге жіктеу болады.

Тапсырмалар:

1. Қалдықпен бөлуді орындаңдар:

a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;
b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

2. Сызықты көбейткіштерге жіктеңдер:

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $x^4 + 4$; c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;
d) $x^4 - 10x^2 + 1$.

3. Теңдеулерді шешіңдер:

a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$;
c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$;
d) $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$,

Тақырып 4. Матрицалар және анықтауыштар

Жоспар:

1. Анықтауыштар, олардың қасиеттері
2. Матрицалар, оларға қолданылатын амалдар
3. Кері матрица
4. Матрица рангі

1. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin j & \cos j \\ \cos j & \sin j \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} tga & -1 \\ 1 & tga \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. a) $\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix}$, мұндағы $w = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}$; b) $\begin{vmatrix} e & 1 \\ -1 & e \end{vmatrix}$, мұндағы $e = \cos\frac{p}{3} + i\sin\frac{p}{3}$.

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

Мысал 1 Анықтауыштың мәнін есепте: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot 3 = 5$

Мысал 2 Анықтауыштың мәнін есепте

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 2 = -10$$

1. Амалдарды орында

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2. Берілген матрицаға кері матрицаны тап:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3. Матрицалық теңдеулерді шеш:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

Мысал 3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Мысал 4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Мысал 5 Кері матрицаны тап:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 + 0 + 2 - 3 - 0 = -6 .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Мысал 6 Матрицалық теңдеуді шеш: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\qquad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Тақырып 5. Сызықты теңдеулер жүйелері

Жоспар:

1. Сызықты теңдеулер жүйелері
2. Кронеккер-Капелли теоремасы
3. Крамер формулалары
4. Кері матрица әдісі
5. Гаусс әдісі

1. Теңдеулер жүйесін Крамер және Гаусс әдістермен шеш:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

2. Теңдеулер жүйесін үйлесімділікке зерттеп шешімін тап:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, ; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad 3x_3 = 14. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

Мысал 7 Кері матрица көмегімен $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесінің шешімін табу керек.

Шешуі Бұл жағдайда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

Жүйенің матрицасының анықтаушы нөлге тең емес, $|A| = 1$. Сондықтан А матрицасына кері матрицаны табуға болады. Кері A^{-1} матрицасын табу үшін А матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Енді кері матрицаны:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{10}$$

формуласы бойынша есептейміз:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Кері матрицаның дұрыс есептелгенін тексеруге болады:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Жүйенің шешуін (8) формула бойынша табамыз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -3 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Осыдан $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$ шешулерін аламыз.

Мысал 8 Берілген: $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ біртекті жүйенің шешімін табу керек.

Шешуі Егер жүйенің матрицасының $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ рангі белгісіздер санынан кіші болса, онда біртекті жүйенің нөлдік емес шешуі бар болады. Оны анықтау үшін A матрицасын элементар түрлендірейік: бірінші тік жолға үшіншісін қосып, ал үшінші тік жолдан екіншісін аламыз. Сонда $A \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Бірінші тік жолды $\frac{1}{2}$ - ге көбейтіп және үшінші жатық жолдан бірінші жатық жолды аламыз.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Үшінші жатық жолдан 4 – ке көбейтіп, екінші жатық жолды аламыз, содан кейін екінші және үшінші тік жолдарға тиісінше 2 және 1 – ге көбейтіп бірінші тік жолды қосамыз.

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сонымен, A матрицасының рангі 2 – ге тең және берілген жүйенің нөлдік емес шешуі бар. Шешуші айнымалылар үшін x_1 және x_2 - ні алайық. Сонда жүйені екі теңдеулер жүйесіне келтіруге болады:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -x_3 \\ x_1 + 2x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Бұл жүйенің шешуі: $x_1 = \frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3$. Мұндағы x_3 бос айнымалысына кез келген $x_3 = 3t$ мәндер беріп жүйенің шешуін $x_1 = t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = 3t$ түрінде аламыз.

Тақырып 6. Сызықты кеңістіктер

1. Сызықты (векторлық) кеңістік
2. Сызықты кеңістіктің қасиеттері

1. λ-ның қандай мәндерінде теңдеулер жүйесі үйлесімді болатынын анықта, шешімін тап.

1) $\begin{cases} 2x_1 \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \quad x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$

2. Сызықты формалар арасындағы сызықты тәуелдікті анықта:

1) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, \\ y_2 = 3x_1 \quad x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, \\ y_2 = 3x_1 \quad x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{cases}$

3. Векторлық кеңістікте берілген векторларға керілген ішкеңістіктің базисін және өлшемділігін тап:

1) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;1;3;1\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{1;2;0;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{-1;1;-3;0\} \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;0;1;3;-1\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{1;1;0;-1;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{0;-2;1;5;-3\} \\ \overrightarrow{a_4} = \{1;-3;2;9;-5\} \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;1;3;-1;\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{-1;1;-3;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{4;5;3;-1;\} \\ \overrightarrow{a_4} = \{1;5;-3;1;\} \end{matrix}$.

4. $\overrightarrow{e_1} = \{1;0;0;0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0;1;0;0\}, \overrightarrow{e_3} = \{0;0;1;0\}, \overrightarrow{e_4} = \{0;0;0;1\}$ базисін $\overrightarrow{e_1'} = \{1;1;0;0\}, \overrightarrow{e_2'} = \{0;1;0;0\}, \overrightarrow{e_3'} = \{1;0;0;1\}, \overrightarrow{e_4} = \{1;1;1;1\}$ базисіна түрлендіретін формуланы тап.

5. e_1, e_2, e_3, e_4 базисінде $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ теңдеуі арқылы «бет» берілген. Осы «беттің» теңдеуін $e_1' = \{1;1;1;1\}, e_2' = \{1;1;-1;-1\}, e_3' = \{1;-1;1;-1\}, e_4' = \{1;-1;-1;1\}$ базисінде жаз

6. $\cos x$ -тің дәрежелері бойынша құрылған n дәрежелі көпмүшеліктер кеңістігінің $1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos^n x$ базисінен $1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx$ базисіне көшу формуласын тап.

Тақырып 7. Сызықты түрлендірулер

Жоспар:

1. Сызықты түрлендірулер
2. Сызықты түрлендірулер матрицалары
3. Сызықты түрлендірулердің меншікті мәндері мен меншікті векторлары.

Тапсырмалар:

Мысал 1. M_1 кеңістігінде $\vec{x}$ векторына $f(\vec{x}) = |\vec{x}|\vec{x}$ векторы сәйкес келеді. Осындай түрде берілген түрлендіру сызықты болмайды. Шынында да,

$$f(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = |\vec{x}_1+\vec{x}_2|\,(\vec{x}_1+\vec{x}_2),$$

$$f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2) = |\vec{x}_1|x_1+|\vec{x}_2|\vec{x}_2.$$

Сонда

$$f(\vec{x}_1+\vec{x}_2) \neq f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2).$$

Мысал 2. Айталық, екіөлшемді кеңістікте f сызықты түрлендіру $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базисінде келесі матрицамен берілген:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$f(\vec{x})$ табу керек, мұнда $\vec{x} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2.$

Шешуі.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Сонда

$$f(\vec{x}) = 6\vec{e}_1 - 19\vec{e}_2.$$

1. Айталық f оператордың $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базистегі матрицасы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ болсын, ал g оператордың $\vec{e}\,'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3; \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}_3; \vec{e}\,'_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$ базистегі матрицасы $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ болсын. $g \circ f$ операторының $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисіндегі матрицасын табу керек.

2. Айталық f оператордың $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базистегі матрицасы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ болсын, g оператордың $\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2; \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ базистегі матрицасы $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ болсын. $g \circ f$ операторының $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2$ базисіндегі матрицасын табу керек.

3. Сызықтық түрлендірулердің өзіндік мәндері мен векторларын табыңдар.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Тақырып 8. Квадраттық формалар

Жоспар:

1. Квадраттық форманың анықтамасы
2. Квадраттық форманың матрицалық жазылуы
3. Квадраттық форманың канондық түрі

Мысал. $A(\bar{x},\bar{x}) = x_1^{\ 2} - x_1x_2 + 3x_2^{\ 2}$ — квадратичная форма в R^2 –дегі квадраттық форма. Келесі формуланы тексерейік: $A(\bar{x},\bar{x}) = \bar{x}^T A\bar{x}$:

Квадраттық форманың матрицасы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

тексеру:

$$\bar{x}^T A\bar{x} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = x_1\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right) + x_2\left(-\frac{1}{2}x_1 + 3x_2\right) =$$

$$= x_1^{\ 2} - \frac{1}{2}x_1x_2 - -\frac{1}{2}x_1x_2 + 3x_2^{\ 2} = A(\bar{x},\bar{x}).$$

Тапсырмалар:

1. Келесі квадраттық формалардың матрицасын жазу керек:

$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.

$2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy - 6xz + 10yz$.

$4x_1^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - x_1x_2 + 8x_1x_4 - 5x_2x_4$.

2. Келесі квадраттық формалардың рангін табу керек:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$.

$2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3$.

$2x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$.

3. Келесі квадраттық формаларды матрица түрінде жазу керек:

$3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$.

$x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 5x_1x_3$.

$2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$.

4. Берілген квадраттық формалардың матрицаларын жазу керек

$$[x_1x_2]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

8. Өздік жұмыс тапсырмалары

1 тақырып. Комплекс сандар

Ұсынылатын әдебиет: [7], 44-56 б.

2 тақырып. Анықтауыштар

Ұсынылатын әдебиет: [3], 4-38 б.

3 тақырып. Матрицалар теориясы

Ұсынылатын әдебиет: [3], 4-38 б.

4 тақырып. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі..

Ұсынылатын әдебиет: [3], 4-38 б.

5 тақырып. Сызықты түрлендірулер
Ұсынылатын әдебиет: [5], 257-289 б.

9. СОӨЖ кеңестер графигі (СОӨЖ СӨЖ-дің 25% құрайды)
Барлық сұрақтар бойынша кеңес осы семестрге сәйкес құрастырылған СОӨЖ кестесімен жүргізіледі.

10. Студенттердің білімін тексеру кестесі
Пән бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру графигі

№	Жұмыс түрлері	Тақырып	Әдебиет	Орындау уақыты	Бақылау түрі	Тапсыру мерзімі
1	2	3	4	5	6	7
1	Жазбаша жұмыс	Бүтін сандар			БЖ	2-ші апта
2	Жазбаша жұмыс	Комплекс сандар			БЖ	4-шы апта
3	Жазбаша жұмыс	Полиномдар алгебрасы			БЖ	6-ші апта
4	Жазбаша жұмыс	Матрицалар және анықтауыштар			БЖ	8-ші апта
5	Межелік бақылау				тест	8-ші апта
6	Жазбаша жұмыс	Сызықты теңдеулер жүйелері			БЖ	10-ші апта
7	Жазбаша жұмыс	Сызықты кеңістіктер			БЖ	12-ші апта
8	Жазбаша жұмыс	Сызықты түрлендірулер			БЖ	14-ші апта
9	Жазбаша жұмыс	Квадраттық формалар			БЖ	15-ші апта
	Межелік бақылау				тест	15-ші апта

11. Студенттердің білімін бағалау критерийлері
Пән бойынша емтихан тест түрінде өткізіледі. Емтиханға жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын орындаған студенттер жіберіледі.
Әр тапсырма 0-100 баллмен бағаланады.
Жіберу рейтингі ағымдағы сабақтардағы (дәрістерге қатысу, үй тапсырмалары, СӨЖ бойынша тапсырмалар, тәжірибе тапсырмалары, межелік бақылау) барлық орындалған тапсырмалардың арифметикалық орташасынан қорытылады.
Пән бойынша қорытынды бақылауға (ҚБ) жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын (жұмыстарды және СӨЖ бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру) орындаған және кіру рұқсатының рейтингі 50 баллдан кем емес студенттер жіберіледі.
Студенттің әр пән бойынша (пәннің қорытынды бақылау түрі мемлекеттік емтихан болса да) оқу жетістіктерінің деңгейі қорытынды бағамен (Қ) анықталады. Қорытынды баға ЖР және ҚБ (емтихан, дифференциалды сынақ немесе курстық жұмыс (жоба))салмақтық үлестер негізінде есептеледі (СҮжр және СҮқб).

Қ = ЖР*0,6 + ҚБ*0,4

Пән бойынша қорытынды баға жіберу рейтингі де, емтихан бағасы да оң бағаланған жағдайда ғана есептеледі. Дәлелсіз себеппен қорытынды бақылауға келмеген жағдайда «қанағаттаннарлықсыз» деген бағаға теңестіріледі.

Қорытынды бағаның есептелуі дұрыс болу үшін межелік бақылау (рейтинг) және қорытынды емтихан 0 ден 100%-ға дейін пайызбен бағаланады.

Межелік бақылау бағасы ағымдағы және межелік бақылаудың бағаларының қосындысы болады.

Бақылаудың барлық түрінде де оқудағы жетістіктер балды-рейтингті жүйесі бойынша бағаланады:

Әріп жүйесі бойынша баға	Балдың цифрлық баламасы	Пайыздық мазмұны	Дәстүрлі жүйедегі баға
A	4,0	95-100	Өте жақсы
A-	3,67	90-94	
B+	3,33	85-89	Жақсы
B	3,0	80-84	
B-	2,67	75-79	
C+	2,33	70-74	Қанағаттанарлық
C	2,0	65-69	
C-	1,67	60-64	
D+	1,33	55-59	
D	1,0	50-54	
F	0	0-49	Қанағаттанарлықсыз

12. Оқытушының талаптары, курс саясаты

Студенттер міндетті түрде сабақтарға қатысу керек. Сабақты босатқан жағдайда деканаттың орнатқан тәртібі бойынша босатқан сабағын тапсырады. Сабаққа екі рет кешігіп келу бір сабақты босатумен теңеледі. Екі сабақтан көп босатқан жағдайда оқытушы студентті сабаққа кіргізбеуге құқылы. Берілген курстың студенттерінің контингенті болмайтын бөгде адамдардың дәрісте отыруына тыйым салынады.

Тапсырмаларды көрсетілген мерзімде тапсыру қажет. Барлық тапсырмаларды тапсырудың соңғы мерзімі – емтихан сессиясының басталуына 3 күн қалғанға дейін.

Барлық тапсырмаларды тапсырмаған студенттер емтиханға жіберілмейді.

Студенттер әр оқу сабағы бойынша тақырыпты қайталауға және өткен тапсырмаларды орындап тапсыруға міндетті. Оқу материалдарын меңгеру деңгейі тест немесе жазбаша жұмыстар арқылы тексеріледі. Студенттерді тестілеу алдын ала ескертусіз өткізілуі мүмкін.

Студенттің оқытушымен өздік жұмысын (СОӨЖ) орындау барысында келесі төрт негізгі функцияларды ескеру керек:

Бірінші – оқу пәні бойынша сабақтар барысында оқытушы студентке берген ақпараттың белсенді қабылдануын болжамдайды.

Екінші – студенттер өздігінен оқытушының нұсқауларын негізге алып, оқу-әдістемелік құралдарды, әдебиеттерді меңгеруді, үй тапсырмаларын, бақылау және курстық жұмыстарды орындауды болжамдайды. Осы кезеңде студенттерден жұмыс әдістерін білуді, өздік ұйымдастырушылықты және тәртіпті талап етеді.

Үшінші – студенттің өзінің қиындық туғыздыратын жағдайларын талдау және жүйелеу, оқу материалын түсіну және меңгеру кезіндегі қиыншылықтардың себептерін анықтау, басқа оқу амалдарын орындау. Студенттер шешілмейтін қиындықтарын оқытушы үшін сұрақтар жүйесіне аударады (реттейді, құрастырады), сол сұрақтарға өз жауаптарын қосады.

Студенттердің төртінші функциясы оқытушыдан сәйкес түсініктеме, кеңес алудан тұрады.

13. Әдебиеттер тізімі

Негізгі:

1. Нұрбеков Б.Ж. Алгебра және геометрия: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2008. – 170б
2. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулық].-Өңделіп, толықтырылған 3-ші басылымы.-Алматы:Қазақ университеті.-2006.-561 б.
3. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика:оқу құралы.-Алматы.-2004.-439 б.
4. Өсенбаева Қ. Жоғары математика курсы:оқу құралы.-Алматы:Қарасай.-2007.-328 б.
5. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы:[жоғары оқу орындарының бейматематика манадықтарының студ. арналған оқу құралы].-Алматы:Дәуір.-2008.-389 б.
6. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулык]. .-Алматы.-2007.-408 б.

Қосымша

7. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-2:оқулық.-Алматы:Бастау.-2008.-466 б.
8. Мұхтаров М.М. Математика:тәжірибелік сабақтарды өткізуге арналған әдістемелік нұсқаулар.-Павлодар:С. Торайғыров атындағы ПМУ.-2007.-135 б.