Пән бойынша оқыту бағдарламасы (SYLLABUS)

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

С.Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

5В060100 «Математика» мамандығынының студенттеріне арналған

DGT 2203 Дифференциалдық геометрия және топология

# ПӘНІ БОЙЫНША ОҚЫТУ БАҒДАРЛАМАСЫ (SYLLABUS)

Павлодар, 2013 ж.

Пән бойынша оқыту
бағдарламасын (Syllabus)
бекіту парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

**БЕКІТЕМІН**
ФМжАТФ-нің деканы
__________ Испулов Н.А.
2013ж. «___»__________

Құрастырушы: __________ аға оқытушы Құдайберген М.Қ.

5В060100 «Математика» мамандығының ЖОБ негізіндегі күндізгі оқу нысанының студенттеріне арналған

DGT 2203 Дифференциалдық геометрия және топология

**пәні бойынша оқыту бағдарламасы (Syllabus)**

Бағдарлама 2013ж. «___» _________бекітілген жұмыс оқу бағдарламасының негізінде әзірленді.

2013ж. «___»__________ кафедра отырысында ұсынылған №__ Хаттама
Кафедра меңгерушісі ________ Джарасова Г.С. 2013ж. «____» ________

Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданған 2013ж. «__»__________ №____ Хаттама

ОӘК төрағасы ____________ Искакова А.Б.20__ж. «_____»___________

**1. Оқу пәнінің паспорты**

**Пәннің атауы** Дифференциалдық геометрия және топология

Таңдау компонент пәні

**Кредит саны және меңгеру мерзімі**

Барлығы – 4 кредит

Курс: 2

Семестр: 4

Барлығы аудиториялық сабақтар – 60 сағат

Дәрістер – 30 сағат

Тәжірибелік сабақтар – 30 сағат

СӨЖ – 120 сағат

соның ішінде СОӨЖ – 30 сағат

Жалпы еңбек сыйымдылығы – 180 сағат

**Бақылау формасы**

Емтихан – 4 семестр

**Пререквизиттер**

Осы пәнді меңгеру үшін төмендегі пәндерді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және машықтар қажет: математикалық талдау; аналитикалық геометрия; сызықтық алгебраның кейбір тараулары.

**Постреквизиттер**

Пәнді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және машықтар келесі пәндерді меңгеру үшін қажет: Риман геометриясы; салыстырымдылық теориясы

**2. Оқытушы туралы мәліметтер және байланысу ақпараттары**

Құдайберген Маржан Құдайбергенқызы

Математика кафедрасының аға оқытушысы

«Математика» кафедрасы, А - 410 аудитория

Байланыс телефоны: 67-36-46, ішкі тел. 11-20

E-mail: k.marzhan_k@mail.ru

**3. Пәннің мақсаты және міндеттері**

**Дифференциалдық геометрия және топология пәні** келесі тараударды қарастырады: қисықтар теориясы, беттер теориясы, топология элементтері.

**Пәннің мақсаты** – классикалық дифференциалдық геометрияның әдістерін және көрнекті бейнелерді қолданып, оқушыларды қазіргі дифференциалдық геометрияның негізгі түсініктемелерімен таныстыру болып табылады.

**Пәннің міндеті** - негізгі түсініктерді толық ашып және оларды студенттерге дұрыс түсіндіру қажет.

Бағдарламаның классикалық дифференциалдық геометрияға арналған тараулары әр бөлімі мен қолдануында оқушыларға қажет бейнелік ойлау қабілеті мен геометриялық интуицияны дамыту талабын қоюға мүмкіндік береді.

**3. Білім, икем, дағдылар және құзырларға қойылатын талаптар**

Осы пәнді меңгеру нәтижесінде студенттердің:

түсініктері болуы керек:

- фундаменталды ұғымдар, заңдар туралы;
- абстракті ұғымдарды нақты тәжірибелік мәселелер үшін қолдану туралы.

білуі керек:

- қисық және жазық беттер теориясының негізгі ұғымдарының анықтамасына жаңа көзқарасын;
- дифференциалдық геометрияның негізгі формулаларын және теоремаларын;
- топология мен көпбейнелік теорияларының бастапқы тарауларына тән ұғымдар мен анықтамаларды.

икемді болуы керек:

- классикалық дифференциалдық геометрияның негізгі формулаларын және теоремаларын есептерді шығаруда қолдануында;

- дифференциалдық геометрия әдістерін меңгеруінде.

тәжірибелік дағдыларды меңгеру:

- дифференциалдық геометриялық объектілерді меңгеру және оларды геометрияда және интегралдау теориясында қолдану.

құзырлы болу:

дифференциалдық геометрия саласында;

- топология саласында.

5 Пәннің тақырыптық жоспары

**Сабақ түрлері бойынша академиялық сағаттардың бөлінуі**

| № | Тақырыптардың атауы | Сабақ түрлері бойынша аудиториялық сағаттардың саны | | | СӨЖ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | дәрістер | Тәжірибелік | Зертханалық, студиялық, жеке | Барлығы | Соның ішінде СОӨЖ |
| 1 | Қисықтар теориясы | 12 | 12 | | 48 | 10 |
| 2 | Беттер теориясы | 12 | 12 | | 48 | 10 |
| 3 | Топология элементтері | 6 | 6 | | 24 | 10 |
| | Барлығы: 180 (4 кредит) | 30 | 30 | | 120 | 30 |

**6. Дәріс сабақтарының мазмұны**

**Тақырып 1.** Қисықтар теориясы

**Жоспар:**

1. Векторлық функциялар.
2. Дифференциалдық геометриядағы қисықтың анықтамасы. Қисықты берудің әртүрлі тәсілдері. Қисықтың ерекше нүктелері.
3. Доға ұзындығы және натурал параметризация.
4. Жанама түзу, жанасушы жазықтық және қисықтың нормалдары.
5. Қисыққа сәйкес үшжақ, қисықтың қисықтығы мен бұрылымы, Френе формулалары.
6. Қисықтың натурал теңдеулері. Ортақ натурал теңдеулі қисықтар. Қисықтар теориясының негізгі теоремасы.

**Дифференциалдық геометрия пәнінің объектісі**

Дифференциалдық геометрияда зертелетін геометриялық объектітілер және оларды зерттеу аймағының ауқымы элементар геомтерия мен аналитикалық геометрияға қарағанда кең, себебі дифферениалдық геометрияда – кез келген қисық сызықтар мен беттер қарастырылыды және барлық қисықтардың немесе барлық беттердің ортақ қасиеттері табылып зерттеледі. Аналитикалық геометрия мен элементар геометрия дифференциалдық геометрияның алғашқы негізі.

Дифференциалдық геометрия пәнінің әдісі. Дифференциалдық геометрияда қисықтар мен беттер теориясын зерттеп баяндауда векторлық есептеулер және дифференциалдаулар қолданылады және дифференциалдық геометрия қисықтар мен беттерді негізінен шағын, шексіз аз аймақтағы қасиеттерді зерттейді. Геометриялық объектілердің нүктелерінің локальды (шағын) аймақтар қарастырылғандықтан, дифференциалдық геометрия шексіз аз шамалармен, демек, дифференциалдық есептеумен тығыз байланыста.

Векторлық есептеу векторлық алгебрадан және векторлық анализден тұрады. Векторлық алгебрада еркін (бос) векторлар тұрақты, ал векторлық анализде векторлар айнымалы шама ретінде қарастырылады және векторлық есептеудің ерекшелігі – вектор ұғымы дифференциалдық есептеумен ұштастырылуында.

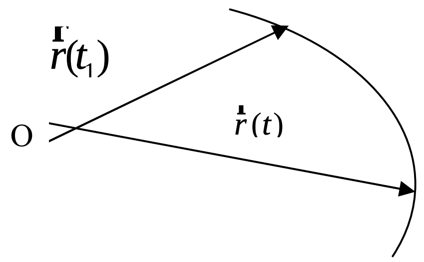
## 1.Скаляр аргументті вектор – функция

Скаляр аргументті вектор – функция ұғымын енгіземіз.

Векторлық $V_3$ кеңістігі евклидтік векторлық кеңістік, ал (a, b) қандай да бір интервал болсын. Егер (a, b) интервалының қандай да бір болмасын t санына векторлық $V_3$ кеңістігінің белгілі бір векторы сәйкес болса, онда бұл векторды $\vec{u}(t)$ арқылы белгілеп, (a, b) интервалындағы скаляр t аргументінің вектор-функциясы деп атаймыз.

Скаляр айнымалыға тәуелді вектор-функцияны физикадан, механикадан көптеп кездестіруге болады. Мәселен, егер $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ векторы қозғалыстағы M нүктесінің радиус-векторы болса, онда бұл $\vec{r}$ векторы уақытқа яғни скаляр шамаға байланысты өзгеріп отырады. Скаляр аргументі t-ға тәуелді вектор-функцияны былайша жазып көрсетеміз:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$




**1-сызба**

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ векторлық $V_3$ кеңістігінің базисі болсын, сонда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ векторын анықтау үшін, бұл вектордың координаталарын осы t аргументінің фукнциясы ретінде анықтауымыз керек, олай болса, $\vec{r}(t)$ векторы B базисі бойынша былай жіктеледі:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (2)$$

Бұл (2) теңдікпен берілген $\vec{r}(t)$ вектор-функциясы скаляр t аргументіне тәуелді келес үш теңдеудің берілуімен пара-пар:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (3)$$

## 2. Айнымалы вектордың шегі

Шексіз аз векторлар ұғымын енгіземіз.

Егер вектордың ұзындығы немесе вектор-функциясының абсолют шамасы нөлге ұмтылса, онда мұндай векторды шексіз аз вектор деп атаймыз да, мынадай белгілеуді пайдаланамыз: $\vec{a} = \vec{0}$ $(|\vec{a}| \to 0)$.

Векторлық функцияның шегі ұғымы математикалық анализ курсындағы шектің анықтамасы тәрізді енгізіледі.

Егер t аргументі $t_0$ аргументіне ұмтылғанда, $\vec{u}(t) - u_0$ векторы шексіз аз векор болса, демек,

$$|\vec{u}(t) - u_0| = 0, \qquad t \to t_0$$

орындалса, онда скаляр t аргументі $t_0$ аргументіне ұмтылғанда тұрақты $\vec{u}_0$ векторы $\vec{u}(t)$ вектор-функциясының шегі деп атап, былайша жазамыз:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{u}(t) = \vec{u}_0,$$

немесе

$$\vec{u}(t) \to \vec{u}_0, \quad t \to t_0$$

немесе

$$\vec{u}(t) - \vec{u}_0 = \vec{a}, \quad \vec{a} \to \vec{0}$$

Вектор-функциясының үздіксіздігі де скаляр анализдегідей анықталады.

Егер t аргументі $t_0$ аргументіне ұмтылғанда, $\vec{u}(t)$ векторы $\vec{u}(t_0)$ шегіне ұмтылса, онда $\vec{u}(t)$ вектор-функциясы аргументтің $t = t_0$ мәнінде үздіксіз деп аталады. Үздіксіздіктің бұл анықтамасын шектің анықтамасымен былай жазуға болады:

$$t \to t_0, \qquad \left|\vec{u}(t) - \vec{u}(t_0)\right| \to 0$$

Вектор (a, b) интервалының әрбір нүктесінде $\vec{u}(t)$ функциясы үздіксіз болса, онда $\vec{u}(t)$ вектор-функциясы (a, b) интервалында үздіксіз деп аталады.

Вектор-функциясының қосындысы мен көбейтінділерінің шегінің келесі қасиеттерін атап көрсетейік:

1. $\lim(\vec{u}(t) \pm \vec{u}(t)) = \lim \vec{u}(t) \pm \lim \vec{u}(t)$
2. $\lim(\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)) = \lim \vec{u}(t) \cdot \lim \vec{u}(t)$

Ескерту.

Вектор-функцияның туындысын не Лейбництің белгілеуі бойынша (штрих), не Ньютонның белгілеуі бойынша (функцияның үстінен нүкте қойылады) белгілейміз:

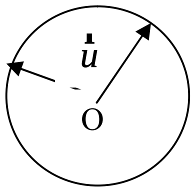
$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad \dot{\vec{u}} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

**3. Ұзындығы және бағыты тұрақты векторлардың туындысы**

1 лемма. Ұзындығы тұрақты берілген вектордан алынған туынды вектор берілген векторға ортогональ.

Дәлелдеу. Ұзындығы тұрақты $\vec{u} = \vec{u}(t)$ берілсін, сонда $\vec{u}(t)$ векторының бағыты өзгергенде $\vec{u}(t) = const,$ бұдан $\vec{u}^{\,2}(t) = const$. Сол және оң жақтарын t аргументі бойынша дифференциалдаймыз:

$$2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$




**2-сызба**

Екі вектордың скаляр көбейтіндісінің қасиеті бойынша және векторы нөлдік вектордан өзгеше болғандықтан:

$$\vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Демек, $\vec{u}(t)$ векторы $\vec{u}'(t)$ векторына ортогональ.

Лемма дәлелденді.

Лемма. Вектор-функцияның бағыты тұрақты болуы үшін берілген вектор мен оның туынды векторы коллинеар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Қажеттілігі. Егер $\vec{u}(t)$ векторының ұзындығы өзгергенде, оның бағыты тұрақты болса, онда мұндай векторды былайша жазуға болады:

$$\vec{u} = u \cdot \vec{t} \tag{1}$$

мұнда $\left|\vec{u}(t)\right| = u(t)$, ал $\vec{u}(t)$ векторы $\vec{t}$ вектор-функциясының бірлік векторы: $\left|\vec{t}\right| = 1$. (1) теңдікті диффренциалдаймыз, сонда

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{t} = u' \cdot \vec{t} \tag{2}$$

(1) теңдіктен

$$\vec{t} = \frac{\vec{u}}{u} \qquad (3)$$

(2), (3) теңдеулерден алатынымыз:

$$\vec{u} = \frac{u'}{u}\vec{u}$$

Егер $\frac{u'}{u} \overset{def}{=\!=} l$ деп белгілесек, онда соңғы теңдеуден:

$$\vec{u}' = l\vec{u} \qquad (4)$$

Бұл теңдік $\vec{u}$, $\vec{u}'$ векторлары коллинеар болатындығын көрсетеді.

Жеткіліктілігі. $\vec{u}$, $\vec{u}'$ векторлары коллинеар болсын, онда (4) формула орындалады. (1) теңдеуді $\vec{t}$ векторының бағыты тұрақты емес деп ұйғарып дифференциалдаймыз:

$$\vec{u}' = u'\vec{t} + u\vec{t}'$$

$\vec{u}'$ векторының мәнін (4) формула бойынша қойсақ:

$$l\vec{u} = u'\vec{t} + u\vec{t}'$$

бұдан $\vec{u}$ векторының мәнін (1) формула бойынша қойып, алатынымыз:

$$lu\vec{t} = u'\vec{t} + u\vec{t}'$$

бұл теңдеудің оң және сол жақтарын $\vec{t}'$ векторына скаляр көбейтеміз:

$$lu\vec{t}\vec{t}' = u'\vec{t}\vec{t}' + u\vec{t}'\vec{t}'$$

Алдыңғы лемма бойынша $\vec{t}$ және $\vec{t}'$ векторлары ортогональ, олай болса, $\vec{t}\vec{t}' = 0$, сондықтан, соңғы теңдіктен табатынымыз:

$$u\left(\frac{d\vec{t}}{dt}\right)^2 = 0, \text{ немесе } \frac{d\vec{t}}{dt} = 0$$

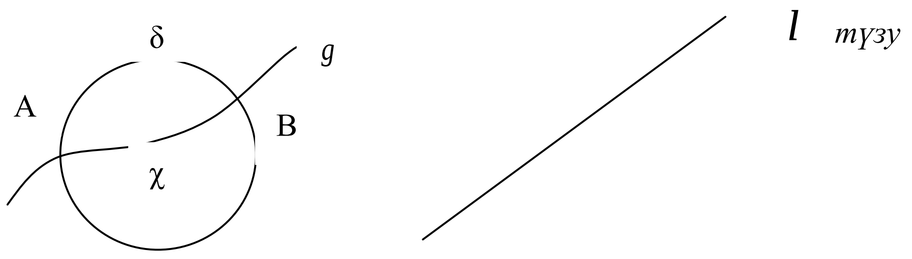
Олай болса, $\vec{t} = const$, демек, $\vec{u}$ вектор-функциясының бағыты тұрақты.

Лемма дәлелденді.

## 4. Жазық қисық туралы ұғым

Қисық ұғымы – дифференциалдық геометрияда бір мәнді анықтала бермейтін күрделі ұғымдардың бірі. Қисықты біз интуитивті түрде шексіз аз аймақта түзуге ұқсас деп түсінеміз.

Мәселен, $g$ қисығының шексіз өзара жақын А және В нүктелерінің аралығындағы нүктелер жиыны түзудің бөлігіне ұқсас (3сызба).



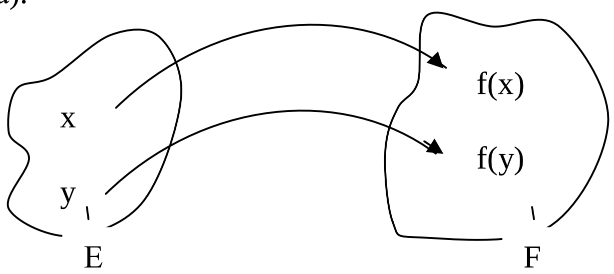

**3-сызба**

Жазықтықта тік бұрышты 0xy координаталар жүйесі берілсін. Аналитикалық геометрия және математикалық анализ курсынан:

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

теңдеуін қанағаттандыратын жазықтықтың M(x,y) нүктелеренің жиыны белгілі бір фигураны – жазықтықта қандай да бір болмасын қисықты анықтайтыны белгілі. Дифференциалдық геометрияның әдісі дифференциалдауға тәуелді болғандықтан, қарастырылатын функциялар бір мәнді және қанша рет қажет болса, сонша рет дифференциалданады (туынды табылады) деп ұйғарамыз.

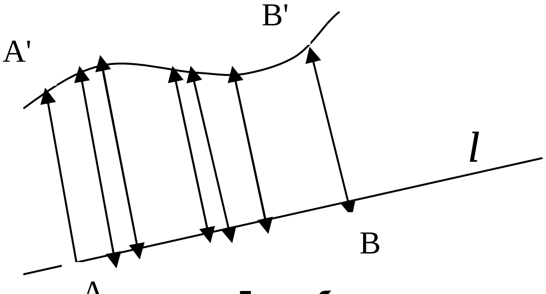
Элементтері нүктелер болатын E және F жиындарын қарастырамыз. Егер E жиынының шексіз жақындайтын нүктелеріне F жиынның шексіз жақындайтын нүктелері сәйкес келетіндей биекция (өзара бірмәнді сәйкестік) берілсе, онда мұндай сәйкестік топологиялық не үздіксіз сәйкестік деп, ал екі жиынды топологиялы эквивалентті деп атаймыз (4 сызба).




**4-сызба**

Анықтама бойынша, егер $r(x,y) < e_1$ болса, онда $r(\mathrm{f(x)},\mathrm{f(y)}) < e_2$, мұнда $e_1, e_2$ шексіз аз шамалар. Бұл анықтаманы қисыққа байланысты айталық.

Егер түзудің бөлігіне (кесіндісіне) қандай да бір жиын топологиялы эквивалентті болса, онда ол қарапайым доға деп аталады. Мәселен, 5 сызбада $A'B'$ жиыны қарапайым доға.

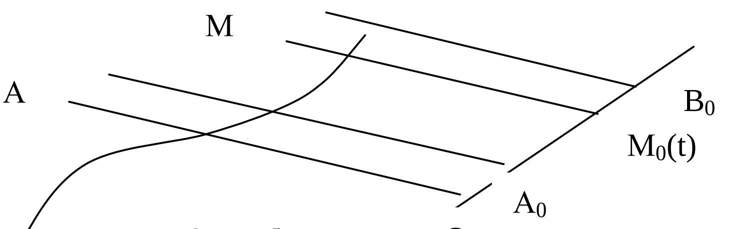



**5-сызба**

Өзара бірімен бірі жалғасатын шектеулі және санаулы қарапайым доғалардан тұратын жиынды қисық деп атаймыз. Біз әдетте, геометриялық объектілерді – қисықтар мен беттерді шексіз аз аймақта қарастырамыз, бұл дифференциалдық геометрияның әдісі және мұндай микроскопиялық зерттеу қисық пен беттің кейбір ортақ заңдылықтарын байқауға мүмкіндік береді.

AB доғасы түзудің $A_0B_0$ кесіндісіне топологиялы бейнеленді және доғаның бір M нүктесіне кесіндінің бір $M_0$ нүктесі сәйкестендіріледі деп ұйғарайық. Түзудегі $M_0$ нүктесі тек абсциссамен анықталады.

Егер доғаның нүктелерін кесіндінің нүктелеріне бейнелейтін заңдылық белгілі болса, онда кесіндідегі $M_0$ нүктесінің абсциссасы $M_0$ нүктесінің орнын анықтап қана қоймай, қисықтағы M нүктесінің де орналасуын анықтайды (6 сызба).




**6-сызба**

Доғаның нүктелері мен сан өсіндегі $A_0B_0$ кесіндісінің сандарының арасындағы сәйкестік бір мәнді және үздіксіз. Егер осындай, доғаның нүктелері мен түзудегі (кесіндідегі) сандардың арасында сәйкестік жүзеге асырылса, онда доға параметрленеді деп, ал t параметрі өзіне сәйкес M нүктесінің параметрі деп аталады. Кез келген доғаны берілген кесіндіге шексіз көп әдістермен топологиялы бейнелеуге болады, сонда әрбір әдіске доғаның осы әдіске сай белгілі бір параметрленуі сәйкес болады.

## 5. Қисыққа жанама түзу

$g$ қандай да бір қисық болып, ал А нүктесі $g$ қисығына тиісті нүкте болсын. $g$ қисығынан А нүктесінен басқа В нүктесін алып АВ қиюшы түзуін жүргіземіз.

В нүктесі қисықтың бойымен жылжып, А нүктесіне ұмтылғанда АВ қиюшы түзуінің шектік $l_{AB}$ жағдайы $g$ қисығына А нүктесінде жүргізілген жанама деп аталады.

Егер $l_{AB}$ түзуі А нүктесінде жүргізілген жанама болса, онда В нүктесі А нүктесіне ұмтылғанда АВ түзуі мен жанама $l_{AB}$ түзуінің арасындағы бұрыштың шамасы нөлге ұмтылады. Осы айтылғандарды математикалық белгілеулермен былайша жазамыз:

$$(AB) \xrightarrow{B \to A} l_{AB},$$

немесе

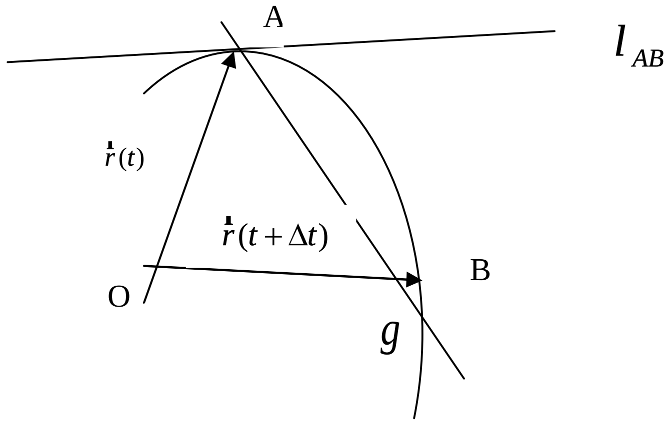
$$\lim_{B \to A} (AB) = l_{AB}$$

Бұл анықтамадан жанама түзу бар болса, оның тек жалғыз болатынын көреміз.

Қисық $\vec{r} = \vec{r}(t)$ парамтерлік теңдеуімен берілсін:

$$g : \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

$g$ қисығының А және В нүктелеріне аргументтің t және $t + \Delta t$ мәндері сәйкес келіп, бұл нүктелердің радиус-векторлары $\vec{r}(t)$ және $\vec{r}(t + \Delta t)$ болсын, сонда $\overrightarrow{AB} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.




**7-сызба**

$\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ векторы қиюшы АВ түзуінің бағыттаушы векторы. Егер $\Delta t > 0$ болса, онда $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ және $\overrightarrow{AB}$ векторлары бағыттас, ал $\Delta t < 0$ болса, онда бұл векторлар қарама-қарсы бағыттас болады. Егер В нүктесі қисық бойымен жылжып, А нүктесіне ұмтылса, онда $\Delta t$ өсімшесі нөлге ұмтылады және

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t) \qquad (2)$$

Соңғы (2) теңдік математикалық анализ курсынан белгілі. Олай болса, $\vec{r}\,'(t)$ векторы $l_{AB}$ жанама түзуінің бағыттаушы векторы.

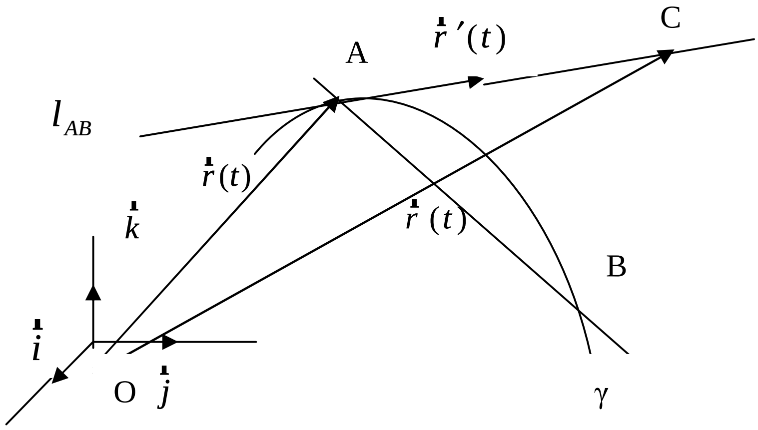
Біз бұдан мынадай қорытындыға келеміз: параметрлік теңдеумен берілген қисықтың нүктесінің радиус-векторынан t параметрі бойынша алынған туынды $\vec{r}\,'(t)$ векторы жанама $l_{AB}$ түзуінің бағыттаушы векторы болады. Жанама $l_{AB}$ түзуінің теңдеуін қорытып шығару үшін кеңістікті тік бұрышты $O_{xyz}$ декарт координаталар жүйесін енгіземіз.

$\vec{r}(t)$ векторын базистік векторлар бойынша жіктеп жазайық:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

сонда $l_{AB}$ жанама түзуінің бағыттаушы $\vec{r}'(t)$ векторы былайша жазылады:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$




**8-сызба**

$A(x(t), y(t), z(t))$ нүктесі арқылы өтетін, бағыттаушы векторы $\vec{r}'(t)\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ болатын жанама $l_A$ түзуінің канондық теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$l_A : \frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)} \quad (3)$$

C нүктесі жанама $l_A$ түзуінің ағымды нүктесі, ал бұл нүктенің радиус-векторы $\vec{r}$ болсын. $\overrightarrow{AC}$ және $\vec{r}'(t)$ коллинеар болғандықтан, R нақты сандар жиынында жататын $l$ саны табылып, мына теңдік орындалады (екі вектордың коллинеарлық шарты):

$$\overrightarrow{AC} = l\vec{r}$$

ал

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad (4)$$

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}(t)$, $\overrightarrow{OC} = \vec{r}(t)$ радиус-векторларын және (4) теңдікті ескеріп, алдыңғы теңдіктен алатынымыз:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t) + l\vec{r}'(t) \quad (5)$$

(5) теңдеу қисықтың жанама түзуінің векторлық (параметрлік) теңдеуі деп аталады.

Жазықтықтағы қисық үшін (3) теңдеуі былайша жазылады:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \quad (6)$$

Егер қисық айқын $y = y(x)$ теңдеуімен берілсе, онда t параметрі ретінде x-ті қабылдаймыз, сонда:

$$x' = 1,\ y' = y(t)$$

(6) теңдеу мына түрге келтіріледі:

$$Y - y(t) = y'(t)(X - x(t)) \quad (7)$$

Егер қисықтың $\mathrm{t} = \mathrm{t}_0$ параметріне сай $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ векторының туынды $\vec{r}'(t_0) = \vec{r}_0'$ векторы нөлдік вектор болса, онда жанаманың теңдеуін жоғарыда айтылған әдіспен анықтауға болмайды. Алдыңғы кезде қажет болатын бірнеше анықтамаларды берейік,

Радиус-вектордың туынды $\vec{r}'(t)$ векторы нөлдік вектор болатын нүктелер қисықтың ерекше нүктелері деп аталады.

Ерекше нүктенің радиус-векторы осы нүктенің маңайында Тейлор формуласына жіктелсе, онда жанаманың теңдеуін жоғарыда айтылған әдіспен анықтауға болмайды. Алдағы кезде қажет болатын бірнеше анықтамаларды берейік.

Радиус-вектордың туынды $\vec{r}'(t)$ векторы нөлдік вектор болатын нүктелер қисықтың ерекше нүктелері деп аталады.

Ерекше нүктенің радиус-векторы осы нүктенің маңайында Тейлор формуласына жіктелсе, онда мұндай нүкте елеусіз нүкте деп аталады.

Тейлор формуласы вектор-функция үшін былай жазылады:

$$\vec r(t+h)=\vec r(t_0)+\vec r'(t_0)h+\frac{h^2}{2!}\vec r''(t_0)+...+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\vec r^{(n-1)}(t_0)+R_n\,,$$

мұндағы $R_n$ қалдық мүше:

$$R_n=\frac{h^n}{n!}\vec r^{(n)}(t')\,,\ t'\in[t_0,t_0+h]$$

Егер $t=t_0$ нүктесінде вектордың бірінші туындыдан бастап, $(k-1)$-ші ретті туындына дейінгі туынды векторлар нөлдік векторлар деп ұйғарсақ, онда Тейлор формуласы былайша жазылады:

$$\vec r(t+h)=\vec r(t_0)+\frac{1}{k!}(\vec r^{(k)}(t_0)+a)\Delta t^k$$

$\vec r(t)$ және $\vec r(t_0)$ векторларына сәйкес нүктелерден өтетін қиюшы түзудің бағыттаушы векторын мына түрде табамыз:

$$\frac{\vec r(t)-r(t_0)}{(\Delta t)^k}=\frac{1}{k!}(\vec r^{(k)}(t_0)+a)\,,$$

соңғы теңдікте, егер $\Delta t\to 0$, онда $\vec a$ векторы шексіз аз векторға ұмтылатын вектор.

Нүктелер шексіз жақындағанда қиюшы вектордың шектік орналасуы жанама түзудің бағытын анықтайды, сонымен:

$$\vec T=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec r(t)-\vec r(t_0)}{(\Delta t)^k}=\frac{1}{k!}\vec r^{(k)}(t_0)$$

векторы елеусіз нүктедегі жанаманың бағыттаушы векторы, олай болса, жанаманың (3) канондық теңдеуі былай жазылады:

$$\frac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t_0)}$$

Жанаманың басқа теңдеулерін алу үшін векторларды координаталары арқылы базистік $\{\vec i,\vec j,\vec k\}$ векторлары бойынша жіктеп жазайық:

$$\vec r'(t)=x'(t)\vec i+y'(t)\vec j+\vec z'(t)\vec k \tag{9}$$

$$\vec r(t)=X\vec i+Y\vec j+Z\vec k \tag{10}$$

(1), (9), (10) теңдіктерден:

$$\begin{aligned}X&=x(t)+lx'(t),\\ Y&=y(t)+ly'(t),\\ Z&=z(t)+lz'(t)\end{aligned} \tag{11}$$

(11) теңдеулер қисықтың $A(x(t),y(t),z(t))$ нүктесіндегі жанаманың параметрлік теңдеулері деп аталады. (11) теңдеуден $l$ параметрін шығарып, жанаманың (3) түрдегі канондық формуласын аламыз.

Жазық қисық (жазықтықтағы қисық)

$$x=x(t),\ y=y(t) \tag{12}$$

парамтерлік теңдеуімен берілсін. (12) теңдеулерден t параметрін шығарып тастап, қисықтың

$$F(x,y)=0 \tag{13}$$

түріндегі айқындалмаған теңдеуін аламыз. ($z=0$) болғандықтан, қисық $Oxy$ жазықтығында жатыр. (12) теңдеудегі x пен y-тің мәнін (13) теңдеуге қойып, t параметрінің кез-келген мәнінде орындалатын

$$F(x(t), y(t)) \equiv 0$$

тепе-теңдігін аламыз.
Тәуелсіз t параметрі бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} \equiv 0 \qquad (14)$$

Соңғы теңудегі $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ дербес туындылардың ең болмағанда біреуі нөлге тең емес деп ұйғарып, жанаманың

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)}$$

теңдеуін былайша жазамыз:

$$(X - x(t))y'(t) = (Y - y(t))x'(t) \qquad (15)$$

(14) теңдеуден $y'(t) = -\frac{F_x}{F_y}$. Бұл мәнді соңғы теңдеуге қойып, қисық айқындалмаған теңдеумен берілгендегі $A(x(t), y(t))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін аламыз:

$$(X - x)F_x + (Y - y)F_y = 0 \qquad (16)$$

Қисықтың берліген $M_0$ нүктесіндегі нормалі деп осы нүктесі арқылы өтіп, осы нүктеде жанамаға жүргізілген перпендикуляр түзуді айтамыз.

Жазық қисықтың нормалі деп жазықтықта жататын және жанасу нүктесінде жанамаға пепендикуляр түзуді айтамыз.

Аналитикалық геометриядан нормаль түзудің бұрыштық коэффициенті шамасы бойынша жанаманың коэффициентіне кері, ал таңбасы бойынша қарама-қарсы екендігі белгілі. (15) және (16) теңдеулер мына түрлерге келтіріледі:

$$Y - y = \frac{y'(t)}{x'(t)}(X - x) \qquad (17)$$

$$Y - y = -\frac{F_x}{F_y}(X - x) \qquad (18)$$

Нормаль түзулердің теңдеулері төмендегідей болады:

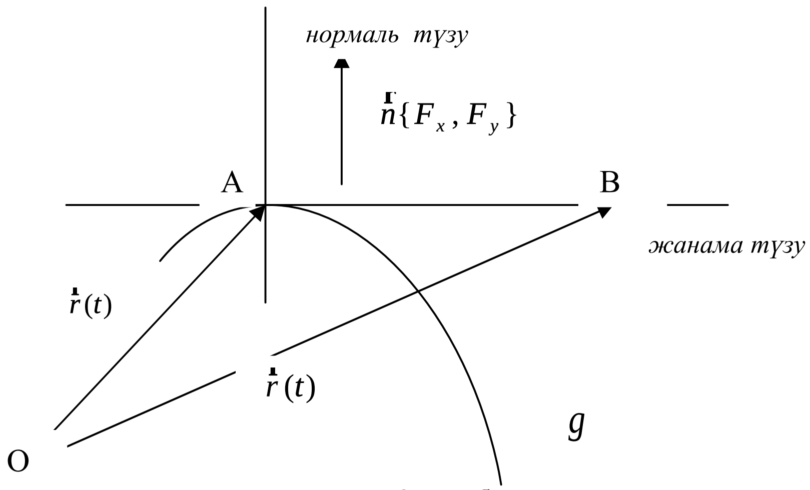
$$Y - y = \frac{x'(t)}{y'(t)}(X - x),$$

$$Y - y = -\frac{F_y}{F_x}(X - x)$$

немесе

$$(X - x(t))y'(t) + (Y - y(t))y'(t) = 0, \ \frac{X - x(t)}{F_x} = \frac{Y - y(t)}{F_y}$$

Соңғы теңдеуді азықтықтағы түзудің канондық теңдеумен салыстырып, $\vec{n}\{F_x, F_y\}$ векторы нормальдің яғни жазық қисықтың бағыттаушы векторы болатынын көреміз. (9 сызба)

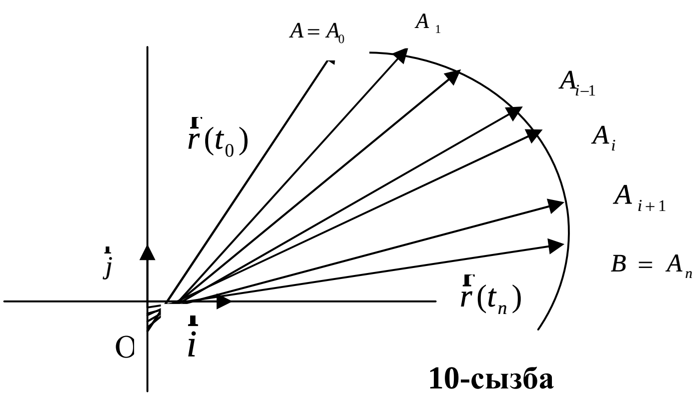



**9-сызба**

## 6. Қисықтың доғасының ұзындығы

Айталық, $g$ тұйық қисық болмасын, ал A және B нүктелері $g$ қисығының AB доғасының ұзындығы деп A мен B нүктелерінің арасындағы нүктелер жиыны мен A және B нүктелерінен тұратын жиынды айтамыз және оны $S_{[AB]}$ деп белгілейміз. Ал AB доғасының ұзындығы былайша анықталады: доғаның ұзындығын осы доғаға іштей сызылған сынық сызықтардың қосындысының шегі ретінде анықтаймыз және бұл шекті анықтауда келесі екі шарттың орындалуы тиіс (орындалуын кадағалаймыз):

1) сынық сызықтардың саны шексіз өседі;
2) әрбір сынық сызықтың ұзындығы нөлге ұмтылады.




**10-сызба**

Қисық

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0), \quad t \in [t_0, t_n] \tag{1}$$

теңдеуімен берілсін.

AB доғасын n бөлікке бөліп, $A = A_0, A_1, ..., A_i, ..., B = A_n$ деп белгілейміз. Бұл нүктелерді қосып (10 сызба) $A_0A_1, ..., A_{n-1}A_n$ кесінділерін жүргізіп, іштей сызылған сынық сызық аламыз. Бұл сынық сызықтың әрбір бөлігі кішкентай доғалардың хордасы болады.

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_{i-1}} = \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})$$

Егер $\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = \Delta r_i$ деп белгілесек, онда

$$\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right| = \left|\Delta\vec{r}_i\right|$$

Іштей сызылған сызылған $A_0A_n$ сынық сызығының ұзындығы $A_0A_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$ хордаларының қосындысына тең:

$$S_{[A_0A_n]} = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta \mathbf{r}_i\right| \tag{2}$$

$\Delta \mathbf{r}_i$ функция өсімшесі $\Delta(t_i)$ өсімшесіне сәйкес келсе, онда (2) формуламен өрнектелетін қосынды былай жазылады:

$$S_{[A_0A_n]} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| \Delta t_i \tag{3}$$

t параметрінің мәні қандай да бір болмасын $\Delta t_i$ аралығына тиісті болса және $\Delta t_i$ нольге ұмтылса, онда өсімшелердің қатынасы мен туындының айырымы нольге ұмтылады; келесі айырымды қарастырайық;

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i}\right| - \left|\overrightarrow{r'(t')}\right| = a_i$$

Бұд абсолют шамалардың айырымы шексіз аз болғандығы ақиқат, бұл теңдеуден

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t_i}\right| = \left|\mathbf{r}'(t')\right| + a_i$$

$S_{[A_0A_n]}$ қосындысын былайша жазамыз:

$$S_{[A_0A_n]} = \sum_{i=1}^{n} \left|\mathbf{r}'(t')\right| \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta t_i$$

$\Delta t_i$ өсімшесі нольге ұмтылғанда екінші қосылғыштың нольге ұмтылатыны анық. Сонымен:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \left|\mathbf{r}'(t')\right| \Delta t_i$$

Ал теңдіктің оң жағындағы қосынды $\left|\bar{r}'(t)\right|$ функциясының интегралдық қосындысы, демек,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_{t_0}^{t} \left|\bar{r}'(t)\right| dt \qquad /4/$$

Сонымен доғаның ұзындығы /4/ формула бойынша есептеледі.
Кеңістікте қисық

$$x=x(t),\ y=y(x),\ z=z(t) \qquad /5/$$

параметрлік теңдеуімен берілсін, сонда

$$\left|\bar{r}'(t)\right| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,,$$

Олай болса, /4/ формула былай жазылады:

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \qquad /6/$$

Ал жазықтағы қисық үшін z=0, демек /6/ формуладан:

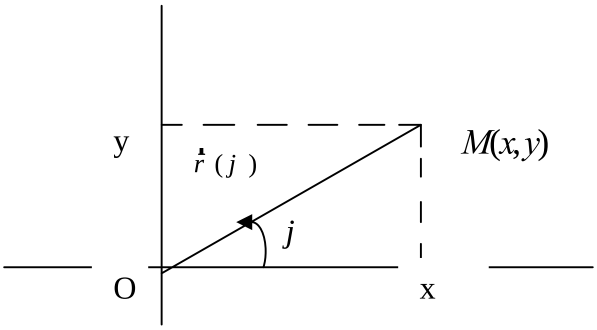
$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt \qquad /7/$$

Егер қисық Оху жазықтығында поляр координаталар системасында

$$r = r(j)$$

Полярлық теңдеуімен берілсе, онда $j$ бұрышын параметр ретінде қабылдап, қисықтың параметрлік теңдеуіне көшуге болады:

$$x = r(j)\cos j,$$
$$y = r(j)\sin j,$$
$$z = 0$$




**11-сызба**

$j$ параметрі бойынша туынды табамыз:

$$x' = r'\cos j - r\sin j,$$
$$y' = r'\sin j + r\cos j.$$

Бұл мәндерді /6/ формулаға қойып есептейік, сонда:

$$S = \int_{j_0}^{j} \sqrt{r^2(j) + r'^2(j)}\,dt$$

Егер қисық

$$Y=y(x) \qquad /8/$$

Айқын теңдеуімен берілсе, онда x=t параметрін енгізіп, қисықтың /8/ теңдеуін былайша жазамыз:

$$X=t,\ y=y(t).$$

Бұдан $x'=1$, $y'=y'(t)$. /7/ формулаға қойып, доғаның ұзындығын есептейтін формуланы аламыз:

$$S = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$$

I Мысал. *x=acosu, y=asinu, z=bu* винттік сызығының О (u=o) нүктесінен бастап доғасының ұзындығын табайық.

$$\left|\bar{r}'(t)\right| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

X,y, z айнымалыларынан t параметрі бойынша туынды табамыз:

$$x' = -a\sin u,\ y' = a\cos u,\ z' = b$$

сонда

$$ds = \sqrt{d\bar{z}^2} = \sqrt{a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u + b^2 du} = \sqrt{a^2 + b^2}\,du$$

Демек,

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\,du$$

$$S = \int_0^u \sqrt{a^2 + b^2}\,du = \sqrt{a^2 + b^2}\,u$$

## 7. Параметр ретінде доғаның ұзындығын қабылдау

Қисықтың қасиеттерін зерттеу үшін біз қисықтың қандай да бір болмасын теңдеуін қарастырамыз, ал қисықтың теңдеуін зерттегенде бұл теңдеу қайсыбір /аффиндік, тік бұрышты немесе поляр координаталар және т.б системаға/ координаталар системасына тәуелді екенін байқаймыз, сонымен қатар қисықтың теңдеуі бойынша қисықтың қасиеттерін атап, қайсыбір пайымдауларға нәтижеге келеміз.

Енді қисықты координаталар системасынан тәуелсіз теңдеу арқылы анықтап зерттеуге бола ма, демек, қисықтың теңдеуі қисықтың тек қана геометриялық формасына тәуелді яғни қисықтың геометриялық формасымен анықтауға бола ма деген сұрақтың тууы орынды.

Біз бұл тармақта қисықтың мұндай теңдеуін құруға болатынын көрсетеміз. Қисық $\bar{r} = \bar{r}(t)$ параметрлік теңдеуімен берілсін. Қисықтан $t=t_0$ параметріне сай $A_0$ нүктесін таңдап алып, оны қисықтың бастапқы нүктесі деп шартты атайық.

Басы $A_0$ ұшы кез келгенА нүктесінде болатын $A_0$ А доғасының ұзындығы мына формула бойынша есептеледі:

$$S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_{t_0}^{t} \left|\bar{r}'(t)\right| dt \qquad /1/$$

Бұдан:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\vec{r}'(t)\right| \qquad /2/$$

Демек, доғаның ұзындығы t параметріне тәуелді, t өссе, доғаның ұзындығы өсіп, t кемісе, доғаның ұзындығы кемиді және t параметрінің белгілі бір мәніне s доғасының бір ғана мәні сәйкес келеді, басқаша айтқанда /1/ формула қисықтын s доғасының ұзындығы t параметрі бойынша дифференциалданатын бір мәнді функция ретінде анықтайды.

/2/ формуладан ds/dt шамасы әр уақытта оң және параметрдің мәні өскенде бұл функция монотонды өспелі екендігін байқаймыз, демек, қисықтың нүктесі мен доғаның ұзындығының арасында бір мәнді үздіксіз сәйкестік бар. Қисықтың бастапқы нүктесінің әр түрлі жақтарында жатқан нүктелер үшін параметрдің әр түрлі мәндері сәйкес. Осы себепті s шамасын доғаның параметрі ретінде қабылдау,һға болады және бұл қисықтың табиғи /натурал/ параметрі деп аталады. Кез келген параметр бойынша алынған туындыдан айырмашылық болу үшін, табиғи параметр бойынша алынған туындыны нүктемен белгілейміз, сонымен:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}, \qquad \frac{d^2 r}{ds^2} = \ddot{\vec{r}},$$

/2/ формуладан:

$ds = \left|\vec{r}'(t)dt\right|,$

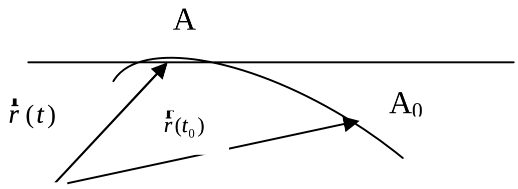
Бұдан

$$ds = \left|\vec{r}'(t)dt\right| = \left|d\vec{r}\right|, \qquad /3/$$

Немесе

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1, \quad \left|\dot{\vec{r}}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1 \qquad /4/$$

Тұжырым: қисықтың нүктесінің радиус-векторынан натурал параметрі бойынша алынған $\dot{\vec{r}}$ бірінші туынды вектор жанама түзуі бойынша бағытталған бірлік вектор болады. /12 сызба.




**12-сызба**

S параметрі бойынша ші туындыны табамыз.

$$\ddot{\vec r} = \frac{d\dot{\vec r}}{ds^2} = \frac{d^2\vec r}{ds^2}.$$

Кеңістіктегі қисықтың жанамасына жанасу нүктесіндегі кез келген перпендикуляр түзу қисықтың нормаль түзуі, қысқаша нормалі деп аталады.

Вектор $\dot{\vec r}$ бірлік-вектор /4/ формуласына қараңыз, демек, бірлік векторының ұзындығы тұрақты, олай болса, бірінші лемма бойынша $\ddot{\vec r}$ векторы $\dot{\vec r}$ вектрына ортогональ:

$$\ddot{\vec r} \perp \dot{\vec r}$$

Яғни $\ddot{\vec r}$ векторы қисықтың қайсыбір нормаль түзуінің бойымен бағытталған, бұл түзу қисықтың бас нормалі деп аталады.

## 8. Жанасушы жазықтық

Кеңістікте қисықтың жанама түзуі арқылы өтетін кез келген жазықтық оның жанама жазықтығы деп аталады.

Бас нормаль арқылы өтетін жанама жазықтық жанасушы жазықтық деп аталады.

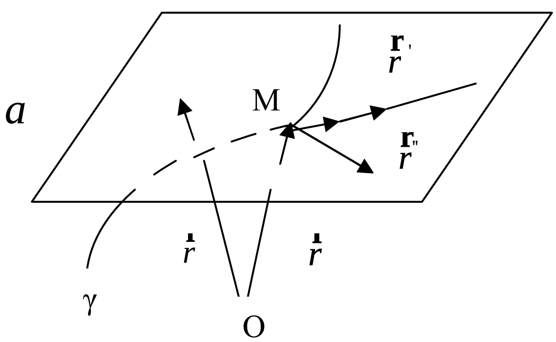
Параметрлік теңдеуімен берілген қисықтың жанасушы жазықтығын табу үшін, радиус-векторының t параметрінен sпараметріне көшу/түрлендіру/
формуласын қарастырамыз:

$$\vec r = \vec r(s(t)), \qquad /1/$$

$$\vec r\,' = \dot{\vec r} s' \qquad /2/$$

$$\vec r\,'' = \ddot{\vec r} s'^2 + \dot{\vec r} s'' \qquad /3/$$

Біз /3/ формуладан $\vec r\,''$ векторы $\dot{\vec r}$ және $\ddot{\vec r}$ векторлары анықтайтын жазықтыққа тиісті екендігін байқаймыз,олай болса, $\vec r\,'$ және $\vec r\,''$ векторлары жанасушы жазықтыққа тиісті. $B = [\vec r\,', \vec r\,'']$ векторы жанасушы жазықтыққа перпендикуляр екендігі анық, себебі векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша:
$\vec B \perp \vec r\,'$, $\vec B \perp \vec r\,''$




**13-сызба**

Жанасушы жазықтықтың теңдеуін табамыз. Егер $\vec{r}$ векторы жанасушы жазықтықтың ағымды нүктесінің радиус-векторы болса, онда $\vec{r}-\vec{r}$ векторы жанасушы жазықтыққа тиісті екендігі түсінікті, олай болса, $\vec{r}-\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ векторлары компланар, демек, бұл векторлардың аралас көбейтіндісі нольге тең:

$$(\vec{r}\,,\ \vec{r}\,',\ \vec{r}\,'')=0 \qquad /4/$$

/4/ формула жанасушы жазықтықтың теңдеуі. Егер $\vec{r}$ векторының координаталары (ε,η,ζ) болса, онда үш вектордың компланарлық шартын, демек, /4/ формуланы координаталар арқылы былайша жазамыз:

$$\begin{vmatrix} e-x & h-y & z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \qquad /5/$$

/5/ не болмаса /4/ формула $B=\left[\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right]=0$ болатын қисықтың нүктелері үшін мәнін жояды. Қисықтың мұндай нүктелері түзелуші нүктелер деп аталады. Түзелуші нүктелерде жанасушы жазықтық анықталмайды.

Мысал. винттік *x=acosu, y=asinu, z=bu* сызығының жанасушы жазықтығының теңдеуін жазайық.

Винттік сызықтық теңдеуінен:

$$x'=-a\sin u,\ y'=a\cos u,\ z'=b$$
$$x''=-a\cos u,\ y''=-a\sin u,\ z''=0$$

/2/ формулада ε,η,ζ айнымалыларының орнына x,y,z айнымалыларын енгізсек, /2/ формула былай жазылады:

$$\begin{vmatrix} x-a\cos u & y-a\sin u & z-bu \\ -a\sin u & +a\cos u & b \\ -a\cos u & -a\sin u & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Бұдан

$$xb\sin u - yb\cos u + az - abu = 0\,.$$

## 9. Қисықтың үш жақты серігі
## /негізгі үлеспелі үш жағы/

Жанасушы жазықтыққа перпендикуляр түзу қисықтың бинормалі деп аталады.

Жанама, бас нормаль, бинормаль қисықтың кез келген нүктесінде өзара перпендикуляр болатын үш жақты анықтайды, осы жазықтықтарды жеке-жеке сипаттайық:

Жанасушы, нормаль және түзелуші жазықтықтарынан тұратын үш жақ негізгі үш жағы немесе ілеспелі /іліктес/ үш жағы, немесе серіктес үш жағы деп, ал берілген нүктеде осы үш жақ арқылы пайда болған үш жақты бұрыш үшедр деп аталады.

Қазіргі геометрияда іліспелі үш жақ қозғалмалы үшжақ деп те аталады.

Айталық, қисық

$\vec{r}=\vec{r}(s)$

Натурал теңдеуімен берілсін.

1. $\dot{\vec{r}}$ вектор ыжанаманың бойымен бағытталған, әрі бірлік вектор. Осы себепті жанаманың /абциссасы осінің/ бірлік векторын $\vec{t}$ арқылы белгілейміз, демек:

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}}$$

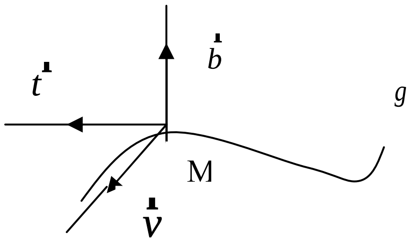
2. бас нормаль бойынша $\ddot{\vec{r}}$ векторы анықталған, бұл $\ddot{\vec{r}}$ векторының бірлік векторын $\vec{n}$ арқылы белгілейміз, сонда

$$\vec{n}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$$

Олай болса, $\vec{n}$ бірлік векторы бас нормаль түзуінің бойымен бағытталған.

3. енді $\vec{b}$ бірлік векторын былай анықтаймыз:ол үшін $\vec{b}$ векторын $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ үштігі оң бағдарланған болатындай етіп таңдап аламыз.

Сонымен, бізге мынау белгілі: $\begin{matrix} \vec{t}^2 = \vec{n}^2 = \vec{b}^2 = 1, \\ \vec{t}\vec{n} = \vec{n}\vec{b} = \vec{b}\vec{t} = 0. \end{matrix}$




**14-сызба**

Векторлық теңдеу үшін мынау орындалады: $[\vec{t}\vec{n}] = \vec{b}, [\vec{n}\vec{b}] = \vec{t}$, енді доғаның керіге өзгерсін, демек, $s_1=-s$ болсын, сонда $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ векторларының өзгеруін анықтаймыз /14 сызба/:

$\vec{t}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds_1} = -\frac{d\vec{r}}{ds} = -\vec{t}$, бұдан $\vec{t}_1 = -\vec{t}$ ;

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\vec{r}}{ds_1}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$ демек, $\vec{n}_1 = \vec{n}$ ;

$\vec{b}_1 = [\vec{t}_1\vec{n}_1] = -[\vec{t}\vec{n}] = -\vec{b}$, демек $\vec{b}_1 = -\vec{b}$

Ұйғарым: доғаның өсу бағыты өзгергенде жанама мен бинормалдың векторларының бағыты өзгеріп, ал бас нормалдың векторы бағытын сақтайды.

## 10. Серре-френе формулалары

Нүкте қисық бойымен жылжығанда, оның ілеспелі үшжағы өзгеріп отырады. Осы өзгерісті сипаттау үшін бұл векторлардың натурал параметр бойынша алынған туындысын есептей білуіміз керек.

Мәселен,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Ал $\ddot{\vec{r}}$ векторымен $\vec{n}$ векторы бағытталған, олай болса, $\frac{d\vec{t}}{ds}$ векторы $\vec{n}$ векторына коллинеар, демек, R нақты сандар жиынында жататын k саны болып табылып

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n} \qquad /1/$$

Теңдігі орындалады, мұндағы k коэффициенті s параметріне тәуелді оң сан. Енді бинормальдың s параметрі бойынша алынған туындысын табамыз:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds}|\vec{r}\vec{n}| = \left[\frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{n}\right] + \left[\vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds}\right] = k[\vec{n}, \vec{n}] + \left[t, \frac{d\vec{n}}{ds}\right],$$

Демек,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \left[t, \frac{d\vec{n}}{ds}\right]$$

Векторлардың векторлық көбейтіндісінің қасиеті бойынша $\frac{d\vec{b}}{ds}$ векторы әрбір көбейткіш векторларға перпендикуляр, демек, $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t}$, $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \frac{d\vec{n}}{ds}$. Сонымен қатар $\vec{b}$ векторы бірлік вектор болғандықтан, $\vec{b}$ векторы $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектрорына да перпендикуляр. Осы айтылғандардан $\frac{d\vec{b}}{ds}$ вектор бас нормальдың бірлік $\vec{n}$ векторымен коллинеар болатыны шығады, пропорционалдық коэффициенті «$-c$» /каппа/ арқылы белгілеп, келесі теңдікті аламыз:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = c\vec{n} \qquad /2/$$

/2/ формула Серре-френенің үшінші формуласы.

Серре-Френенің екінші формуласы $\vec{n} = [\vec{b}\vec{t}]$ теңдігін s параметрі бойынша дифференциалданғаннан оңай алынады:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \left[\frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{t}\right] + \left[\vec{b}, \frac{d\vec{t}}{ds}\right] = c[\vec{n}, \vec{t}] + [\vec{b}, k\vec{n}],$$

Алдыңғы тармақтағы /*/ формуланы ескерсек:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + c\vec{b} \qquad /3/$$

Бұл Серре-Френенің екінші формуласы. /1/,/2/,/3/ формулаларды жинақтап, дифференциалдық геометрияның ең маңызды бір формуласын, Серре-Френе формуласын аламыз:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n},$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{t} + c\vec{b} \qquad /4/$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = c\vec{n}$$

Серре-Френе формулалары $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ векторларынан s параметрі бойынша алынған туынды-векторларды өрнектейді.

<u>Тарихи мағлұмат:</u> жоғарыда аталған Тулуза қаласында Френенің еңбегі басылып шыққанымен бұл формулалар көпшілікке белгісіз болып қалды. 1851 жылы француз математигі Серре осы формулаларды Париждің математикалық журналында жарыққа шығарды. Френенің мақаласы осы журналда 1964 жылы қайтадан жарыққа шықты. Осы себепті /4 формула кейде Серренің формулалары, кейде Френенің формулалары, кейде, Серре-Френенің формулалары деп аталады.

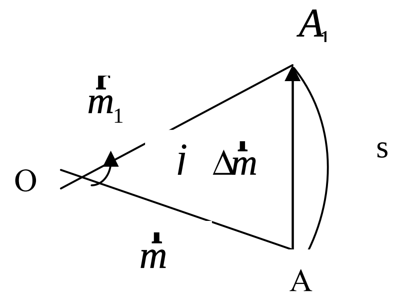
## 11. Иілім және бұралым

Лемма /бірлік вектор туралы лемма/.

Бірлік $\vec{m}$ векторы өзгере отырып, $\Delta\vec{m}$ өсімшесін қабылдасын:

$\vec{m}_1 = \vec{m} + \Delta\vec{m}$

Бірлік $\vec{m}, \vec{m}_1$ векторларын О нүктесінде орналастырып, олардың ұштарын қосатындай доға жүргіземіз. Сонда $\breve{AA_1} = j$ бұрышы $\vec{m}$ векторының айналу бұрышына тең. Ал хорданың ұзындығы мынаған тең: $\left|AA_1\right| = \left|\Delta\vec{m}\right|$. Ал $\overset{\frown}{AA_1}$ доғасының ұзындығы нольге ұмтылғанда $(j \to 0)\dfrac{\left|AA_1\right|}{\overset{\frown}{AA_1}}$ қатынасының шегі бірге ұмтылады. Демек, /15 сызба/




**15-сызба**

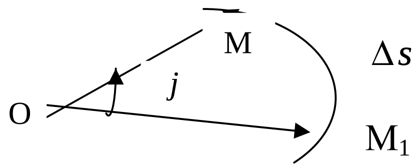
$$\lim_{j \to 0}\frac{\left|AA_1\right|}{\overset{\frown}{AA_1}} = 1$$

Олай болса,

$$\lim_{j \to 0}\frac{\left|\Delta\vec{m}\right|}{j} = 1$$

Демек, $\Delta\vec{m}$ өсімшесін бұрылу $j$ бұрышпен алмастыруға болады.

<u>Иілім.</u> Нүкте қисықтың бойымен жылжығанда жанаманың бағыты өзгереді. Осы өзгерістің жылдамдығын анықтау үшін доғаның екі нүктесіндегі жанамаларды алып, бұл жанамалардығ арасындағы $j$ бұрышын $MM_1$ доғасының ұзындығына бөлеміз. $MM_1$ доғасын $\Delta s$ арқылы белгілейік: айталық, M нүктесіндегі жанама түзудің бағытының өзгеру жылдамдығын табу үшін, $M_1$ нүктесі M нүктесіне ұмтылғандағы $\dfrac{j}{\Delta s}$ қатынасының шегін табамыз.




**16-сызба**

Иілім деп қисықтың түзуден ауытқуын айтамыз.

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{j}{\Delta s} = k \qquad /1/$$

Осы k шамасын берілген нүктедегі қисықтың иілімі деп атаймыз.

Қисықтың иілімі Серре-Френе формуласындағы k коэффициентімен беттеседі. Шындығында, Серре-Френе формуласынан:

$$k = \frac{d\vec{t}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\left|\Delta\vec{t}\right|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{j}{\Delta s} \qquad (\text{себебі } \left|\Delta\vec{t}\right| = j\ )$$

Ал жанама түзудің бірлік векторының өсімшесінің абсолют шамасының оның айналу бұрышына қатынасының шегі бірге тең. Анықтама бойынша

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{j}{\Delta s}$$

Жанаманың бағытынң өзгеру тездігін өлшеп, біз қисықтың пішіні /формасы/ түзу сызықтан қаншаға ауытқағандығын байқаймыз. Иілім неғұрлым үлкен болған сайын бұл ауытқу соғұрлым үлкен. Түзу сызықтың иілімі нольге тең болатыны анық.

<u>Бұралым.</u> Серре-Френе формулаларындағы æ коэффициентін бұралым деп атадық. Енді қисықтың берілген нүктесіндегі бұралымның абсолют шамасы берілген нүктені

керетін доғадағы бинормальдың бұрылу бұрышының шегі ретінде анықталатынын көрсетелік.

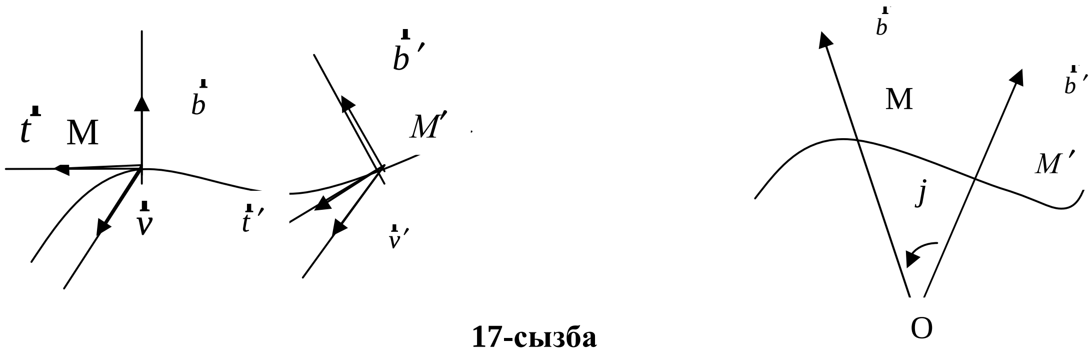
Серре-Френе формулаларының үшіншісінен:

$$|c| = \frac{d\vec{b}}{ds},$$

$$\text{Бірақ } \left|\frac{d\vec{b}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{b}|}{\Delta s},$$

Себебі $\vec{b}$ бірлік векторының $\Delta\vec{b}$ өсімшесін $\Delta\vec{b}$ векторының $\Delta s$ доғасындағы бұрылу ψ бұрышымен алмастыруға болады, олай болса,

$$|c| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{b}|}{\Delta s} == \lim_{\Delta s \to 0} \frac{y}{\Delta s} \qquad /2/$$




**17-сызба**

Жазық қисықтың бұралымы нольге тең екендігі ақиқат, себебі бинормаль вектор жазықтықтың нормаль векторымен беттеседі де, қисықтың өн бойында өзгеріссіз қалады.

Керісінше де дұры: егер қисықтың барлық нүктелерінде оның бұралымы нольге тең болса, онда мұндай қисық жазық қисық болады.

## 12. Иілім мен бұралымның есептеу формулалары

Бізге келесі формулалар белгілі:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{t},\ \ \ddot{\vec{r}} = k\vec{n} \qquad /1/$$

Соңғы теңдікті s параметрі бойынша дифференциалдаймыз:

$$\dddot{\vec{r}} = k'(s)\vec{n} + k\frac{d\vec{n}}{ds} = k'(s)\vec{n} + k(s)\,[-k\vec{t} + c\vec{b}\,] = -k^2\vec{t} + ck\vec{b} + k'\vec{n} \qquad /2/$$

/1/, л /2/ теңдіктердіктерді пайдаланып, табатынымыз:

$$[\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,] = k\,[\vec{t}\,\vec{n}\,] = k\,\vec{b}$$

Және

$$(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}}) = [\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}]\dddot{\vec{r}},$$

$$k\vec{b}(-k^2\vec{t} + kc\vec{b} + k'\vec{n} = k^2 c,$$

$$[\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}] = k\vec{b};\ \dot{\vec{r}} = \vec{t}$$

Осы формулаларды біріктіреміз:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{t},\ \ddot{\vec{r}} = k\vec{n},\ [\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}] = k\vec{b};\ (\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}}) = k^2 c \qquad /3/$$

Бұл қатынастар арқылы бізге қисықтың иілімі мен бұралымын радиус-вектордың табиғи параметрі бойынша алынған туындылар арқылы өрнектеуге болатынын көреміз. әдетте, көп жағдайда қисық параметрлік x=x(t), y=y(t), z=z(t) параметрлік теңдеуімен беріледі де, иілім мен бұралымды кез келген t параметрі бойынша алынған туындылар арқылы өрнектеуге тура келеді. Осы жағдайда келесі түрлендіру формулаларын білген жөн.

$$\dot{\vec r} = \vec r'\dot t$$
$$\ddot{\vec r} = \vec r''\dot t^2 + \vec r'\ddot t$$
$$\dddot{\vec r} = \vec r'''\dot t^3 + 2\vec r''\dot t\ddot t + \vec r\,\dot t\ddot t + \vec r'\dddot t$$

Сонымен,
$$\dddot{\vec r} = \vec r'''\dot t^3 + 3\vec r''\dot t\ddot t + \vec r\,\dot t\ddot t + \vec r'\dddot t$$
Бұдан
$$\vec t = \vec r'\dot t \qquad /4/$$
$\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}$ векторларының векторлық көбейтіндісін есептейміз:
$$[\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}] = [\vec r'\dot t, \vec r''\dot t^2 + \vec r'\ddot t],$$
Бұдан /3/ теңдеуді және векторлық көбейтіндісінің қасиетін ескеріп алатынымыз:
$$k\vec b = [\vec r', \vec r''](t')^3 \qquad /5/$$
Енді $\dot{\vec r}, \ddot{\vec r}, \dddot{\vec r}$ векторларының аралас көбейтіндісін есептейміз:
$$k^2 c = [\vec r'\dot t, \vec r''\dot t^2 + \vec r'\ddot t](\vec r'''\dot t^3 + 3\vec r''\dot t\ddot t + \vec r'\dddot t)$$
$$k^2 c = (\vec r'\vec r''\vec r''')(\dot t)^6 \qquad /6/$$
/4/ формуладан: $\dot t = \dfrac{\vec t}{\vec r'}$; сонда /5/ формула былай жазылады:
$$k\vec b = [\vec r', \vec r'']\left(\frac{\vec t}{t'}\right)^3$$
Екі жағынан да абсолют шама алсақ,
$$k = \frac{|[\vec r'\vec r'']|}{|\vec r|^3} \qquad /7/$$

Осы сияқты
$$x = \frac{\left(\vec r\,'\vec r\,''\vec r\,'''\right)(t)^6}{k^2} = \frac{\left(\vec r\,'\vec r\,''\vec r\,'''\right)}{\left|\left[\vec r\,'\vec r\,''\right]\right|^2} \qquad (8)$$

Бұл (7) және (8) формулаларын есептелетін нүктенің координаталары арқылы былайша жазуға болады:
$$k = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ \vec i & \vec j & \vec k \end{pmatrix}\right|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3},$$
$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & z'' \end{vmatrix}^2}.$$
Жазықтықтағы қисықтар үшін иілім мен бұралым келесі түрде жазылады:

$$k = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(x'^2 + y'^2\right)^3}}, \qquad x = 0.$$

Егер қисық айқын теңдеу арқылы берілсе, онда иілім төмендегі формула бойынша есептеледі:

$$k = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

**13. Қисықтың натурал теңдеулері**

Біз бұған дейін қандай да бір болмасын қисықтың теңдеуін қорытып шығару үшін белгілі бір координаталар системасын, мәселен, аффиндік, не тік бұрышты, не поляр, не болмаса тағы басқа бір координаталар системасын қарастырдық. Өзіміз таңдаған системада қисықтың теңдеуін алып, осы теңдеу бойынша қисықтың қасиеттерін көрсетіп, пайымдаулар мен тұжырымдарға келдік. Бұдан шығатын қорытынды: қисықтың теңдеуі координаталар системасына тәуелді.

Енді мынадай заңды сұрақ туады: қисықты координаталар системасына тәуілсіз яғни координаталар системасына байланыссыз теңдеу арқылы анықтап, осы теңдеу арқылы қисықты сипаттауға бола ма? Бұл сұрақты басқаша мағынада былай тұжырымдауға болады: қисықтың теңдеуін оның геометриялық түрімен (пішінімен), демек, формасымен ғана анықтауға бола ма? Жалпы жағдайда, алдағы уақытта қисықтың геометриялық түріне ғана тәуелді теңдеу арқылы анықтап, сипаттауға болатынын көрсетеміз. Қисықтың координаталар системасына тәуелсіз, тек геометриялық формасымен сипатталатын теңдеулері қисықтың натурал (табиғи) теңдеулері деп аталады.

Қисықтың табиғи теңдеулерін қорытпастан бұрын белгілі түсініктерді еске түсіре кетелік. Координаталар системасын түрлендіргенде фигураның өзгеріссіз қалатын қасиеттері инвариант деп аталады. Мәселен, кез келген қисықтың доғасының ұзындығы, иілімі және бұралымы қисықтың инварианты болып табылады.

Үзіліссіз $g$ қисығының ілеспелі $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ үш серігі (іліктес үш серігі) осы қисықтың доғасының $s$-ұзындығының вектор-функциясы болады, себебі:

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|, \qquad x = -\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds}.$$

Олай болса, $g$ қисығы бойынша:

$$k = k(s), \qquad x = x(s).$$

функцияларын аламыз. Бұл теңдеулер қисықтың натурал немесе табиғи теңдеулері деп аталады.

Қисықтың табиғи теңдеулерін табуға мысал келтірелік:

1 Мысал. Гиперболалық винттік сызық келесі теңдеулер бойынша анықталады:

$$x = acht, \qquad y = asht, \qquad z = at.$$

Гиперболалық винттік сызықтың натурал теңдеулерін жазу керек.

Шешуі. Бұл қисықтың доғасының $s$ ұзындығы

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{a^2\left(ch^2t + sh^2t + 1\right)}dt = a\int_0^t \sqrt{2ch^2t}dt = a\sqrt{2}\int_0^t chtdt = a\sqrt{2}sht.$$

Енді $k$ - иілімді есептейміз; ол үшін әуелі $x, y, z$ айнымалыларынан $t$ параметрі бойынша бірінші, екінші ретті туындыларды табамыз:

$$x' = asht, \qquad y' = acht, \qquad z' = a;$$

$$x'' = acht, \qquad x'' = asht, \qquad z'' = 0,$$

сонда

$$k=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} asht & acht & a \\ acht & asht & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{pmatrix}\right|}{\left(a^2sh^2t+a^2ch^2t+a^2\right)^{3/2}}=\frac{\left|-a^2sht\vec{i}+a^2cht\vec{j}+a^2\vec{k}\right|}{a(sh^2t+ch^2t+1)^{3/2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4sh^2t+a^4ch^2t+a^4}}{a\left(ch^2t+ch^2t\right)^{3/2}}=\frac{a^2\sqrt{ch^2t+ch^2t}}{a^3(2ch^2t)^{3/2}}=\frac{1}{2ach^2t}.$$

Сонымен, гиперболалық винттік сызықтың иілімі $k$ :

$$k=\frac{1}{2ach^2t},\qquad \text{ал}\qquad s=a\sqrt{2}sht.$$

Соңғы екі теңдеуден $t$ параметрін шығарамыз: $sht=\frac{s}{a\sqrt{2}}$ болғандықтан,

$$ch^2t=1+sh^2t=1+\frac{s^2}{2a^2}=\frac{2a^2+s^2}{2a^2}$$

Бірінші теңдеуге қойсақ:

$$k=\frac{a}{s^2+2a^2}$$

Осы табылған теңдеу гиперболалық винттік сызықтың табиғи теңдеуі.
2 Мысал. Циклоида

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

параметрлік теңдеулерімен берілген. Циклоиданың табиғи теңдеуін жазу керек.

Шешуі. $t$ параметрі бойынша алынғанг бірінші және екінші ретті туындыларды табамыз:

$$x^{'}=a(a-\cos t),\qquad y^{'}=a\sin t;$$
$$x^{''}=\sin t\cdot a;\qquad y^{''}=a\cos t.$$

және

$$s=4a\cos\frac{t}{2}.$$

Доғаның $s$ ұзындығынан:

$$\cos\frac{t}{2}=\frac{s}{4a}.$$

Иілім $k$ -ға қойып, түрлендіреміз:

$$k=\frac{1}{\left|4a\sin\frac{t}{2}\right|},\qquad k=\frac{1}{\sqrt{s}a(1-\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2})^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)}}=\frac{4a}{4a\sqrt{16a^2-s^2}}=\frac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}.$$

Циклоиданың табиғи теңдеуі:

$$k^2(s)=\frac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}.$$

**2 тақырып. Беттер теориясы**

1. Дифференциалдық геометриядағы бет ұғымы. Бетті берудің әртүрлі тәсілдері. Беттегі қисықтар. Беттің жанама жазықтығы мен нормалы.

2. Бірінші квадраттық форма мен қисықтың ұзындығы, қисықтар арасындағы бұрыш, беттегі облыс ауданы. Беттегі ішкі геометрия ұғымы және оның иілулері

3. Беттің екінші квадраттық формасы. Беттің берілген бағыттағы нормал қисықтығы. Менье теоремасы. Бас қисықтар мен бас бағыттар. Эйлер формуласы. Гаусс және орташа қисықтар. Жанасатын параболоид және регулярлық беттегі нүктелер типтері. Беттің сфералық бейнелеулері және Гаусс қисықтықтары.

4. Қисықтық сызықтары. Асимптоталық сызықтар. Беттегі торлар теориясының негіздері. Чебышев торлары.

5. Беттің деривациялық формулалары. Гаусс формуласы және толық қисықтықтардың беттің ішкі геометриясына тиістілігі туралы теорема. Петерсон–Кодаций теңдеуі. Берілген квадраттық формадағы беттің табылатындығы туралы теорема (Бонне теоремасы).

6. Беттегі қисықтың геодезиялық қисықтығы, геодезиялық сызықтар және олардың экстремалды қасиеттері мен механикалық кескіні.

7. Коварианттық дифференциал және векторды беттегі қисық бойымен параллель көшіру.

8. Тұрақты Гаусс қисықты беттер.

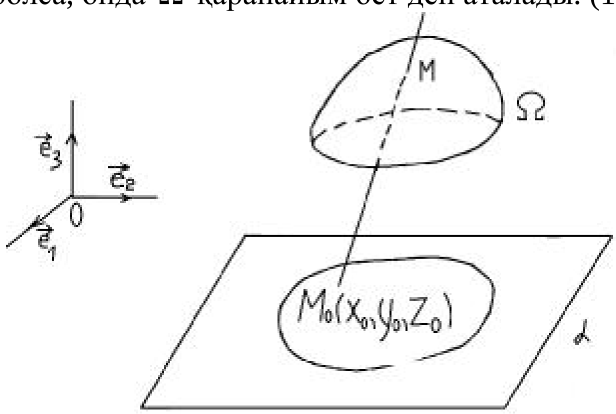
9. Евклид кеңістігінің метрикасы қисық сызықты координаталары. Псевдоевклидтік кеңістіктің метрикасы (Минковский кеңістігі). Беттегі Риман метрикасы. Лобачевский жазықтығының метрикасы. Лобачевский жазықтығының Клейн ұсынған моделі.

## 14. Беттер теориясының алғашқы мәліметтері

### Бет және оны параметрлеу

Беттер теориясын зерттеу үшін, қисықтар теориясын зерттегеніміздей беттің қарапайым бөлігі түсінігін анықтап, беттің типологиялық анықтамасын береміз.

Егер евклидтік $E_3$ кеңістігінің $\Omega_3$ жиыны топологиялық бейнелеуде қарапайым $w$ облысының бейнесі болса, онда $\Omega$ қарапайым бет деп аталады. (18 сызба)




**18-сызба**

Аналитикалық геометрия және математикалық анализ курсынан бет

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

айқындалмаған теңдеуімен берілетіндігі белгілі. Егер (1) теңдеу $z$ (не $x$, не $y$) бойынша шешілсе, демек,

$$z = f(x, y) \qquad (2)$$

болса, онда (2) теңдеу беттің айқын теңдеуі деп аталады.

$y = f(x)$ функциясының графигін құрғандай $z = f(x, y)$ теңдеуін де геометриялық тұрғыдан түсіндіруге болады. Кеңістікте тік бұрышты координаталар системасын алайық. $O_{xy}$ жазықтығында $x$ пен $y$-тің өзгеру облысын $G$ деп белгілеп, сосын $M^{'}(x, y)$ нүктесінде тұрғызылған перпендикуляр түзудің бойына $z = f(x, y)$ мәнін өлшеп салсақ, сонда пайда болған нүктелердің геометриялық орны $z = f(x, y)$ функциясының кеңістіктегі графигі болады. $w$ облысындағы ($a$ жазықтығында) $M_0$ нүктесінің декарттық координаталары $(u, v)$ нүктесіне сай $M$ нүктесінің координаталары $(x, y, z)$ болсын, сонда

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) \qquad (3)$$

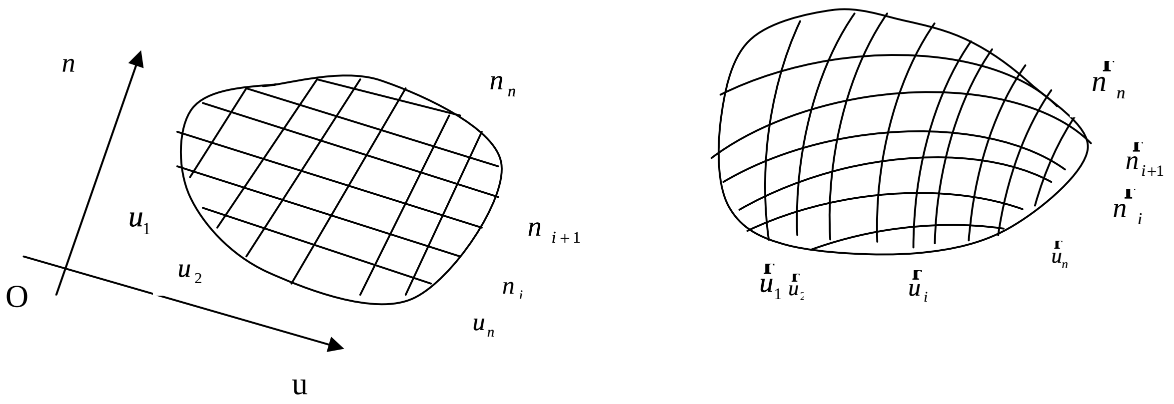
тәуелділігінің орындалатыны анық. (3) теңдеу $\Omega$ бетінің параметрлік теңдеуі деп аталады.

Беттің жазық облысқа бейнеленетін бөлігін қарастырайық, сонда жазықтықтың $M_0$ нүктесіне беттің $M$ нүктесі сәйкес болып, $M_0$ нүктесінің тік бұрышты координаталар системасындағы координаталары $(u, v)$ болсын. Егер осындай бейнелеу (сәйкестік) берілсе, онда бет параметрленеді деп, ал $(u, v)$ шамалары беттегі $M$ нүктесінің қисық сызықты немесе гаусстық координаталары деп аталады, сонымен, $(u, v)$ сандары кеңістіктегі $(x, y, z)$ нүктесін анықтайды.

Топологиялық бейнелеудің үзіліссіздігі мен бір мәнділігінен жазықтықтағы кез келген сызыққа беттен белгілі бір сызықтың сәйкес келетіндігі шығады, дербес жағдайда жазықтықтағы

$$\mathrm{u} = \mathrm{const}, \qquad \mathrm{v} = \mathrm{const}$$

Түзулеріне беттен координаталық сызықтар деп аталатын қисықтар сәйкес келеді, бұл координаталық қисықтарды $\begin{matrix} \vec{\mathrm{v}} = const \\ \vec{u} = const \end{matrix}$ деп белгілейміз. Бейнелеу бір мәнді болғандықтан, беттің әрбір нүктесінен $\vec{u} = const$, $\vec{\mathrm{v}} = const$ координаталық сызықтар үйірінің әрқайсысынан тек бір ғана қисық өтеді. (19 сызба)



**19-сызба**

$O_{uv}$ жазықтығындағы $\mathrm{u} = \mathrm{const}$, $\mathrm{v} = \mathrm{const}$ түзулеріне сәйкес беттегі $\vec{u} = const$, $\vec{\mathrm{v}} = const$ қисықтары координаталық торшалар деп аталады.

(3) теңдеуді бір векторлық теңдеу арқылы былай жазуға болады:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \qquad (4)$$

Себебі параметрленген беттің $M$ нүктесінің $(u, v)$ қисық сызықты координаталары осы нүктенің орналасуын анықтайды, демек, бұл қисық сызықты координаталар $M$ нүктесінің $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ радиус-векторының да мәнін анықтайды, олай болса, параметрленген беттің радиус-векторы осы нүктенің қисық сызықты координаталарының функциясы болады.

$E_3$ кеңістігіндегі $\Omega$ бетінің кез келген нүктесінің $U$ шағын аймағында $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ функциялары $C^{(k)}$ класына тиісті ($k$-сыншы ретке дейінгі туындылары табылып, олар үзіліссіз) болса, онда $\Omega$ беті $C^{(k)}$ класты жүйелі бет деп аталады. Дербес жағдайда, егер $k = 1$болса, онда мұндай бет жатық бет деп аталады. Беттің $U$ аймағы $E_2$ кеңістігінің қарапайым облысына бір мәнді бейнелегендіктен,

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2, \qquad (5)$$

ал бұл (5) теңдік $\vec{r_u}, \vec{r_v}$ векторлары коллинеар емес екенін білдіреді.

Егер $\Omega$ бетінің $M(u,v)$ нүктесі үшін $\vec{r_u}$ және $\vec{r_v}$ векторлары коллинеар болса, онда мұндай нүкте беттің ерекше нүктесі деп аталады.
Егер

$$\bar{u} = j\,(u,v), \qquad \bar{v} = y\,(u,v) \qquad (6)$$

теңдеулерін енгізсек, онда беттің параметрленуі де өзгереді, сондықтан беттің $\vec{r}$ радиус-векторын $(\bar{u},\bar{v})$ жаңа параметрі бойынша өрнектейміз. Беттің $C^{(k)}$ - класты жүйелігін сақтау үшін $\bar{j}$ және $\bar{y}$ функцияларын да $C^{(k)}$ класты деп ұйғарамыз. (6) теңдеуден $(u,v)$ параметрлерінің табылу шарты былай жазылады:

$$\begin{vmatrix} j_u & j_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

демек, (3) теңдеуден алынатын

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

екінші ретті анықтауыштардың біреуі нольден өзгеше.
Анықтау үшін:

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

делік, онда (3) теңдеуден жазықтықтағы $(u,v)$ шамалары $x$ пен $y$ айнымалылары арқылы былайша өрнектеледі:

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y).$$

Бұл шамаларды (3) теңдеудің үшіншісіне қойып, беттің

$$z = f(x,y)$$

айқын теңдеуін аламыз. Көп жағдайда беттің (1) айқындалмаған теңдеуі қарастырылады. Егер $F_x, F_y, F_z$ дербес туындыларының ең болмағанда біреуі нольден өзгеше, мәселен, $F_x \neq 0$ болса, онда $M$ нүктесінің $U$ аймағында $z$ айнымалысы $x$ пен $y$ айнымалыларының функциясы болады, яғни

$$z = f(x,y)\,.$$

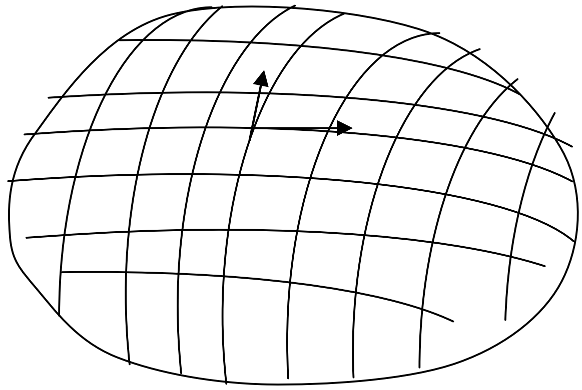
Дербес $F_x, F_y, F_z$ туындылары нольге айналатын беттің нүктелері беттің ерекше нүктелері деп аталады.

u = const, v = const түзулеріне беттегі сәйкес қисықтар координаталық торшалар болатыны белгілі, сондықтан $\vec{r_u}, \vec{r_v}$ векторларына мынадай геометриялық мағына беруге болады:

$\vec{r_u}$ векторы u қисығының, ал $\vec{r_v}$ векторы $v$ қисығының берілген нүктедегі жанама векторы (20 сызба).

v = const

u = const,




**20-сызба**

(4) векторлық теңдеу тік бұрышты $O_{xyz}$ координаталар системасында былай жазылады:

$$\vec{r}_u(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}. \qquad (7)$$

Бұл (7) теңдеу келесі үш координаталық теңдеулермен мәндес:

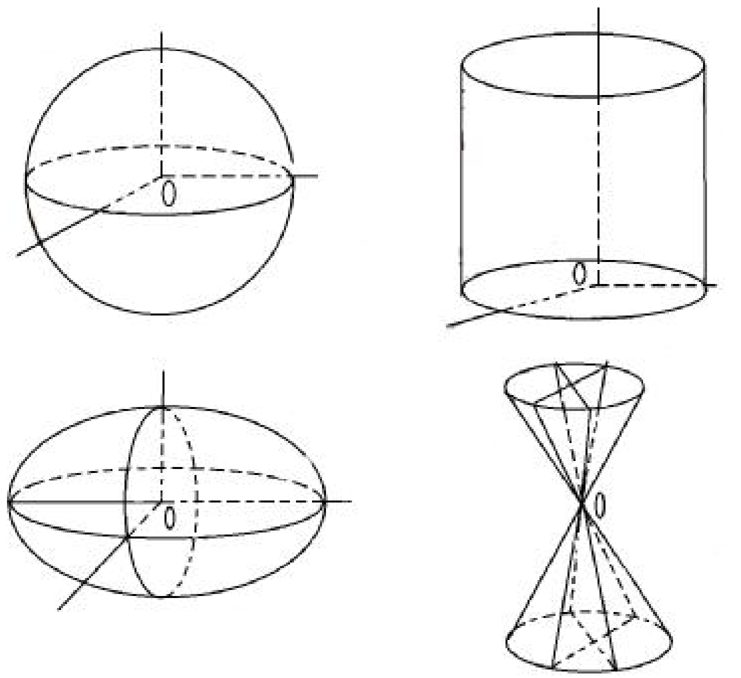
$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v). \qquad (8)$$

Ал $(u,v)$ параметрлер жұбының мәні мен беттің нүктесінің арасындағы сәйкестік бір мәнді, олай болса, (8) теңдеу параметрлеріне байланысты, сонда нүктенің координаталары мынадай қатынаспен өрнектеледі:

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (9)$$

(9) теңдеу беттің айқындалмаған теңдеуі деп аталады.

Эллипсоид, сфера, цилиндрлік, конустық, гиперболалық, беттер бетке мысал болып табылады.



**21-сызба**

Біз негізінен өзін-өзі қиып өтпейтін беттің бөліктерін ғана қарастырамыз.

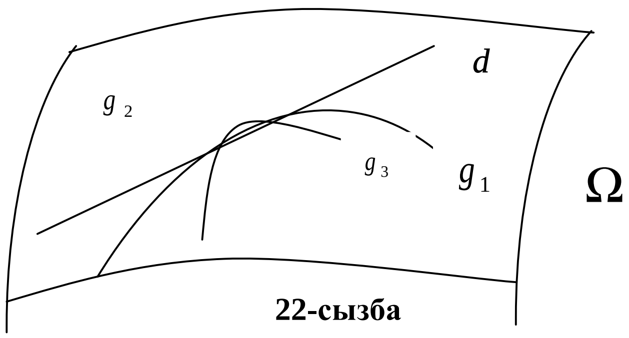
## 15. Бет және оның жанамалары
## Беттің нормалі

Бет

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

айқындалмаған теңдеуімен берілсін.

Егер түзу бетте жататын қандай да бір болмасын қисыққа жанама болса, онда мұндай түзу бетке жанама деп аталады (22 сызба).




**22-сызба**

Бетте жататын $g$ қисығы

$$g : x = x(t), y = y(t), z = z(t) \qquad (2)$$

параметрлік теңдеулерімен берілсін. Түзу мен беттің жанасу шартын табамыз, ол үшін $g$ қисығының нүктелерінің координаталарын беттің теңдеуіне қоямыз, сонда $g$ қисығы бетке тиісті болғандықтан, төмендегідей тепе-теңдік аламыз:

$$F\{x(t), y(t), z(t)\} \equiv 0 \qquad (3)$$

Бұл (3) теңдеу тепе-теңдік $t$ параметрінің кез келген мәнінде орындалатыны анық. (3) теңдікті $t$ параметрі бойынша дифференциалдаймыз.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\equiv 0 \qquad (4)$$

(4) теңдеудің сол жағы төмендегідей екі шамалардың көбейтіндісінен тұрады:

а) беттің теңдеуінен алынған дербес туындылар:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=F_x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=F_y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}=F_z$$

және

ә) қисықтың нүктесінің координаталарынан алынған туындылар:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}.$$

а) және ә) пункттегі туындылар қарастырылатын нүктенің бетте орналасуына ғана тәуелді де, осы қарастырылатын нүкте арқылы өтетін қисықтардан тәуелсіз.

$$\vec{N} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \qquad (5)$$

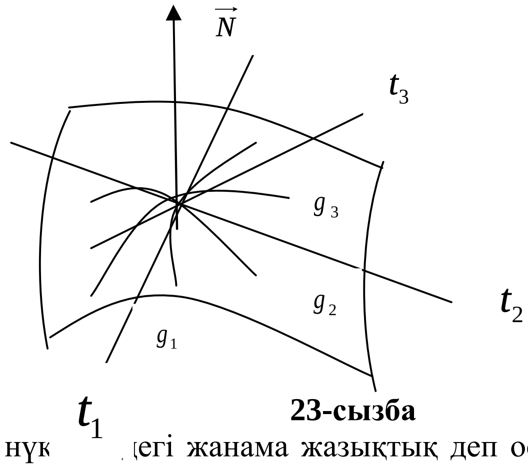
векторын енгізсек, сонда (4) тепе-теңдік $\vec{N}$ және $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторларының скаляр көбейтіндісі бойынша былайша жазуға болады:

$$\vec{N}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0. \qquad (6)$$

Егер беттің нүктесі үшін $\vec{N}$ векторы нольдік вектор, демек, $F_x = F_y = F_z = 0$ болса, онда беттің мұндай нүктелері беттің ерекше нүктелері деп аталады.

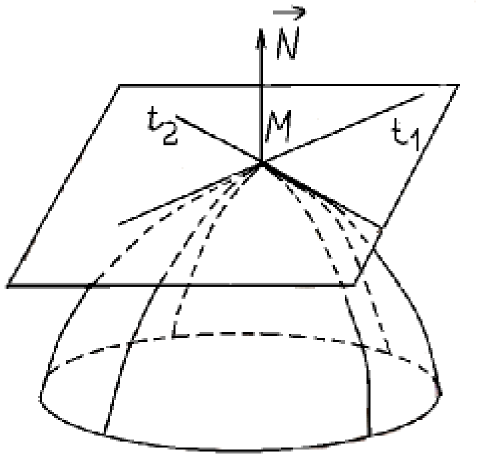
(6) теңдік қисыққа жанама $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторы мен қарастырылатын нүктеге тәуелді $\vec{N}$ векторының өзара ортогональ екенін көрсетеді, ал беттің берілген нүктесі арқылы осы бетте жататын және берілген нүкте арқылы өтетін шексіз көп қисық жүргізуге болады және бұл қисықтар үшін де (6) теңдік орындалады, олай болса, осы қисықтардың жанама түзулерінің бағыттаушы векторлары тек бір ғана $\vec{N}$ векторына ортогональ. Мынадай

қорытындыға келдік: беттің берілген қарапайым нүктесінде бетке жанасатын барлық түзулер тек бір ғана жазықтыққа тиісті (23 сызба)




**23-сызба**

Беттің берілген нүктедегі жанама жазықтық деп осы нүктеде бетке жанасатын түзулердің геометриялық орнын айтамыз (24-сызба)




**24-сызба**

Жанасу нүктесі арқылы өтіп, жанама жазықтыққа перпендикуляр болатын түзу беттің нормаль түзуі деп, ал нормаль түзудің бағыттаушы векторы беттің нормаль векторы деп аталады.

Жанама жазықтық теңдеуін алу үшін, жанама жазықтықтың беттің берілген $\vec{r}(t)\{x(t), y(t), z(t)\}$ нүктесі арқылы өтетінін және беттің нормаль $\vec{N}$ векторы (6) формула бойынша өрнектелетінін ескереміз. Жанама жазықтықтың ағымды нүктесінің радиус-векторын $\vec{r}$ деп белгілесек, $\vec{r}-\vec{r}$ векторы жанама жазықтықта жатады, олай болса, $\vec{r}-\vec{r}$, $\vec{N}$ векторлары ортогональ, демек, бұл векторлардың скаляр көбейтіндісі нольге тең:

$$\vec{N}\left(\vec{r}-\vec{r}\right)=0. \tag{7}$$

(7) теңдеуді $\vec{r}=x\vec{i}+h\vec{j}+z\vec{k}$ және $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ радиус-векторларының координаталары арқылы өрнектеп, жанама жазықтықтың теңдеуін аламыз:

$$F_x(x-x)+F_y(h-y)+F_z(e-z)=0 \tag{8}$$

Нормаль түзу мен нормаль вектордың анықтамасынан $\vec{N}$ векторы беттің нормаль векторы болатынын байқау қиын емес (23 сызба). Беттің қарапайым нүктесінде беттің нормаль түзуінің канондық теңдеуі:

$$\frac{x-x(t)}{F_x}=\frac{h-y(t)}{F_y}=\frac{e-z(t)}{F_z}, \tag{9}$$

$$F_xF_yF_z \neq 0.$$

## 16. Кеңістіктегі қисықты екі беттің қиылысуы ретінде анықтау
## Кеңістіктегі қисыққа жанама

Кеңістікте өзара беттеспейтін екі беттің қиылысу нүктелерінің жиыны кеңістікте қандай да бір болмасын кеңістіктегі қисықты анықтайды (беттерге қойылатын шарт: олар деңгейлі беттер болмауы керек). Айталық, бұл беттер айқындалмаған

$$s_1 : j\,(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

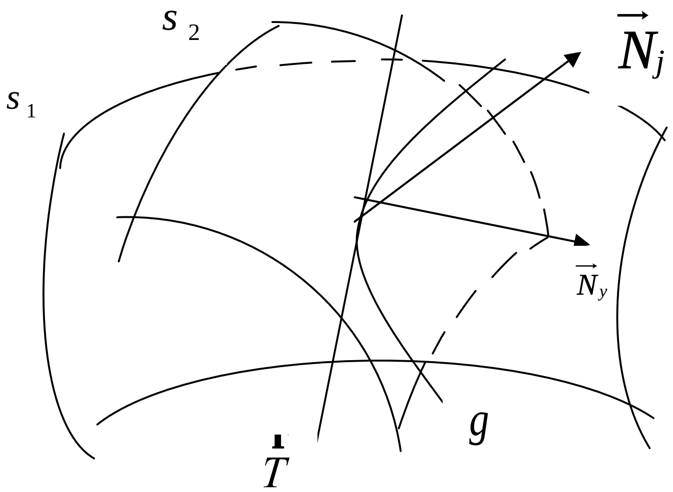
$$s_2 : y\,(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

теңдеулермен берілсін. Қисықтың бойынан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін алайық (25 сызба), онда бұл нүкте $j\,(x, y, z) = 0$ теңдеуімен анықталатын $s_1$ бетіне де, $y\,(x, y, z) = 0$ теңдеуімен анықталатын $s_2$ бетіне де тиісті, олай болса, $M_0$ нүктесінің $(x_0, y_0, z_0)$ координаталары (1), (2) теңдеулерді қанағаттандырады:

$$j\,(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad y\,(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Алдыңғы тармақтағыдай $M_0$ нүктесінде $s_1$ және $s_2$ беттерінің сәйкесінше нормаль $\vec{N}_j, \vec{N}_y$ векторын құрамыз және бұл векторларды өзара коллинеар (түзулес) емес деп ұйғарамыз, сондықтан осы $M_0$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтар өзара беттеспейді. $\vec{N}_j$ және $\vec{N}_y$ векторлары коллинеар емес, олай болса,

$$rang\begin{pmatrix} j_x & j_y & j_z \\ y_x & y_y & y_z \end{pmatrix} = 0.$$




**25-сызба**

$\vec{N}_j, \vec{N}_y$ векторларын базистік векторлар бойынша жіктелік:

$$\vec{N}_j = j_x\vec{i} + j_y\vec{j} + j_z\vec{k}, \qquad \vec{N}_y = y_x\vec{i} + y_y\vec{j} + y_z\vec{k} \tag{3}$$

Егер екі вектордың векторлық көбейтіндісінің екінші қасиетін ескерсек, онда $g = s_1 \cap s_2$ қисығының жанама түзуінің $\vec{T}$ бағыттаушы векторы $\vec{N}_j, \vec{N}_y$ векторларының векторлық көбейтіндісі ретінде анықталатынын байқау қиын емес, себебі $\vec{N}_j$ векторы да, $\vec{N}_y$ векторы да $\vec{T}$ векторына ортогональ. Сонымен,

$$\vec{T} = \left[\vec{N}_j, \vec{N}_y\right] \tag{4}$$

векторы $g$ қисығының $t$ жанама түзуінің бағыттаушы векторы және $T$ векторы келесі формула бойынша есептеледі:

$$\vec{T} = \begin{vmatrix} j_x & j_y & j_z \\ y_x & y_y & y_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$$

$g$ қисығының $M_0$ нүктесінде жүргізілген жанама түздің теңдеуі:

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} j_y^0 & j_z^0 \\ y_y^0 & y_z^0 \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} j_z^0 & j_y^0 \\ y_z^0 & y_y^0 \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} j_x^0 & j_y^0 \\ y_x^0 & y_y^0 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

мұндағы $(X, Y, Z)$ - айнымалылары $g = s_1 \cap s_2$ қисығының ағымды нүктесінің координаталары, ал

$$j_x^0 = j_x(x_0, y_0, z_0), \quad j_y^0 = j_y(x_0, y_0, z_0), \quad j_z^0 = j_z(x_0, y_0, z_0)$$

$$y_x^0 = y(x_0, y_0, z_0), \quad y_y^0 = y(x_0, y_0, z_0), \quad y_z^0 = y(x_0, y_0, z_0)$$

Қисықтың берілген нүктедегі жанама түзуіне перпендикуляр және берілген нүкте арқылы өтетін жазықтық қисықтың нормаль жазықтығы деп аталады және нормаль жазықтықтың теңдеуі былай жазылады:

$$\begin{vmatrix} j_y^0 & j_z^0 \\ y_y^0 & y_z^0 \end{vmatrix}(X - x_0) + \begin{vmatrix} j_z^0 & j_x^0 \\ y_z^0 & y_x^0 \end{vmatrix}(Y - y_0) + \begin{vmatrix} j_x^0 & j_y^0 \\ y_x^0 & y_y^0 \end{vmatrix}(Z - z_0) = 0 \qquad (6)$$

Нормаль жазықтықтың (6) теңдеуін анықтауыштың қасиеттеріне сүйене былайша жазуға болады:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ j_x^0 & j_y^0 & j_z^0 \\ y_x^0 & y_y^0 & y_z^0 \end{vmatrix} = 0$$

## 17. Беттегі қисықтар.

Беттегі $g$ қисығы параметрлік теңдеулерімен берілсін:

$$g: \quad x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (1)$$

$$u = u(t), \qquad u = u(t)$$

мұндағы $t$ тәуелсіз айнымалы. Егер беттің параметрлік теңдеуін пайдалансақ, онда қисықтың ағымды нүктесінің радиус-векторы былайша жазылады:

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), u(t)). \qquad (2)$$

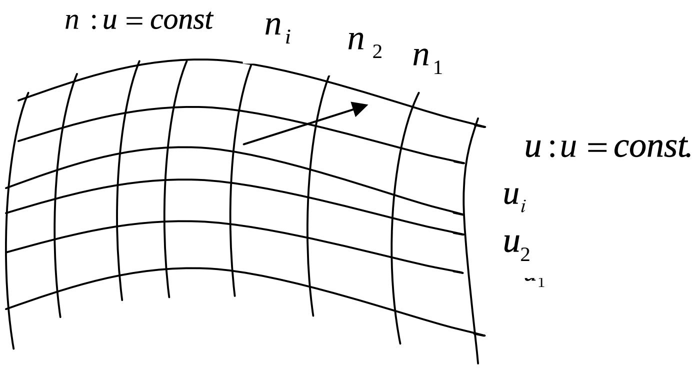
Егер $u = const$ болса, онда $u$ сызығы қандай да бір қисықты, ал егер $u = const$ болса, онда $u$ сызығы қандай да бір қисықты сызады /26 сызба/:

$$u: \; u = const; \qquad u \neq u = const.$$

Беттегі мұндай қисықтардың үйірі беттегі торшалар немесе беттегі өрнектер деп аталатыны бізге белгілі /26 сызба/.
Беттің кез-келген $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы осы торшаның тек қана екі қисығы өтеді.
(2) теңдеуді $t$ айнымалысы бойынша дифференциалдайық:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u(u,u)du + \vec{r}_u(u,u)du,$$

мұнда $du = u_t'dt,$ $du = u_t'dt$ және есептелетін нүктеде $du, du$ дифференциалдарының екеуі




**26-сызба**

бірдей нөлге тең емес деп ұйғарамыз.

Беттегі қисықтың доғасының ұзындығын есептейміз:

$$ds^2 = d\vec{r}^{\,2},$$

олай болса, $ds^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_u du)^2$ ,

$$ds^2 = \vec{r}_u^{\,2}(du)^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_u dudu + \vec{r}_u^{\,2}(du)^2.$$

Белгілеу енгіземіз:

$$\vec{r}_u^{\,2} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = E(u,u) \ , \quad \vec{r}_u^{\,2} = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = G(u,u) \ ,$$

$$\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = F(u,u)$$

Бұл белгілеулерден кейін доғаның ұзындығының дифференциалының квадраты былай жазылады:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2 \qquad (3)$$

Бұл өрнек беттің бірінші квадраттық формасы деп аталады. (3) теңдіктің сол, оң жақтарынан түбір табамыз:

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2} \quad ,$$

сонда

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}^2\right) + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{du}{dt} + G\left(\frac{du}{dt}\right)^2} \ dt \qquad (4)$$

(4) формула беттегі қисықтың доғасының ұзындығын өрнектейді.

### 18. Беттегі қисықтардың арасындағы бұрыш.

Беттің $M$ нүктесі арқылы $M_1 g_1$ және $g_2$ екі қисық өтсін. $g_1$ және $g_2$ қисықтарына тиісті $M$ нүктесінің радиус-векторларының дифференциалдарын сәйкесінше $d\vec{r}$ , $d\vec{r}$ деп белгілейміз, сонда

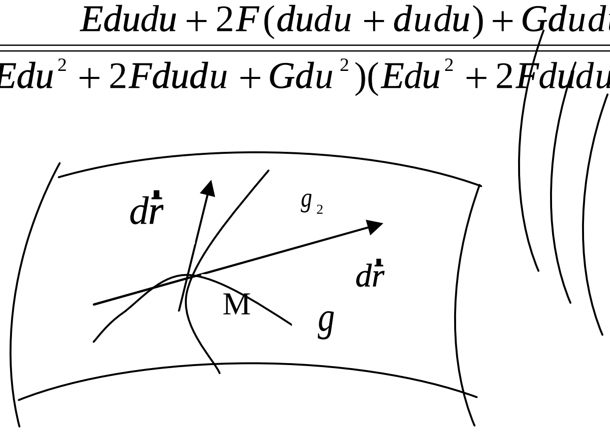
$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_u du \ , \quad d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_u du$$

$d\vec{r}$, $d\vec{r}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусы былай есептеледі:

$$\cos(d\vec{r}\,\hat{,}\,d\vec{r}) = \frac{d\vec{r}\cdot d\vec{r}}{|d\vec{r}|\cdot|d\vec{r}|} = \frac{(\vec{r}_u du + \vec{r}_u du)(\vec{r}_u du + \vec{r}_u du)}{\sqrt{(Edu^2 + 2Fdudu + Gdu)^2(Edu^2 + Fdudu + Gdu^2)}}$$

бұдан

$$\cos(d\vec{r}\,\hat{,}\,d\vec{r}) = \frac{Edudu + 2F(dudu + dudu) + Gdudu}{\sqrt{(Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2)(Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2)}}$$




**27 сызба**

Координаталық торшалар үшін:

$$du = 0, \qquad du \neq 0;$$

$$du \neq 0, \qquad du = 0$$

олай болса, кооординаталық торшалардың арасындағы бұрыш:

$$\cos w = \frac{F}{\sqrt{Eq}} \quad , \quad w = (d\vec{r}\,\hat{,}\,d\vec{r})$$

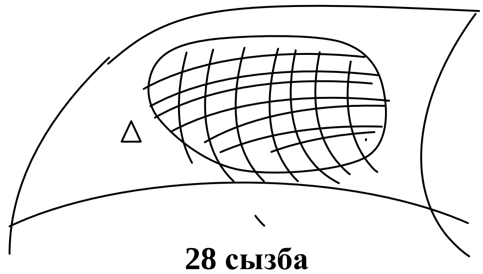
Сонымен қатар бірінші квадраттық форма арқылы беттегі қисық сызықты фигураның ауданын есептеуге болады. Векторлардың векторлық көбейтіндісі үшін Лагранж формуласын пайдаланып, $[\vec{r}_u, \vec{r}_u]^2$ өрнегін есептейміз:

$$[\vec{r}_u \vec{r}_u] = \vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_u^{\,2} - (\vec{r}_u \vec{r}_u)^2 = EG - F^2.$$

Ал $[\vec{r}_u \vec{r}_u]$ векторы нөлдік вектордан өзгеше болғандықтан, $EG - F^2 \geq 0$ теңсіздігінің орындалатыны анық.

## 19. Беттегі фигураның ауданы

Беттен $\Delta$ облысын қарастырып, бұл облысты ұсақ $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ облыстарға бөлеміз. Әрбір облыстың ішкі бөлігінде жанама жазықтық жүргізіп, сол жанама жазықтыққа $\Delta_i$ бөлікті проекциялаймыз.

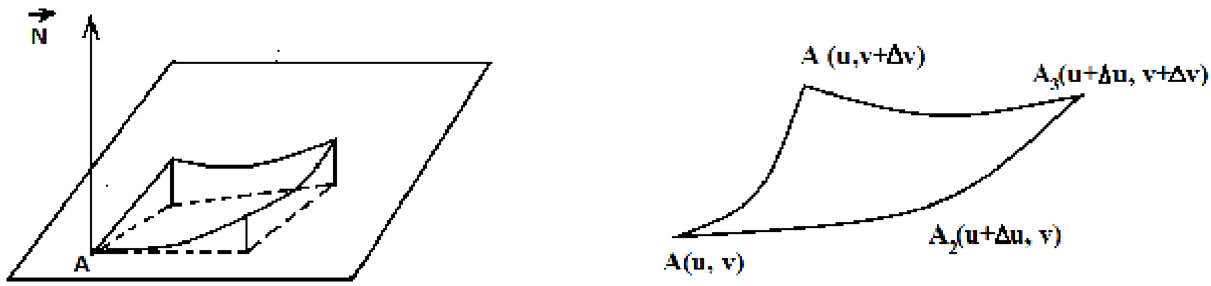



**28 сызба**

Сонда $\Delta_i$ бөліктерінің проекциясының жазық ауданын $\Delta S_i$ арқылы белгілейік, онда

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \,.$$

$n$ шексізге ұмтылғанда осы қосындының шегі $\Delta$ фигурасының ауданы деп аталады.




**29 сызба**

Бір шағын аймақты алып, келесі нүктелерді қарастырамыз /28 сызба/: $A_1(u,u),\ \ A_2(u+\Delta u,u),\ \ A_3(u+\Delta u,u+\Delta u),\ \ A_4(u,u+\Delta u).$

Бұл нүктелердің радиус-векторлары:

$$\vec{OA_2} = \vec r_u(u+\Delta u,u) = \vec r(u,u) + \vec r_u\Delta u + \vec e_1\cdot\Delta u,$$

$$\vec{OA_4} = \vec r(u,\Delta u+u) = \vec r(u,u) + \vec r_u\Delta u + \vec e_2\cdot\Delta u, \qquad \text{сонда}$$

$$\vec{A_1A_2} = \vec A_2 - \vec A_1 = \vec r_u\Delta u, \qquad \vec{A_1A_4} = \vec A_4 - \vec A_1 = \vec r_u\Delta u,$$

олай болса,

$$\Delta\vec S_i = \left|[\vec r_u\vec r_u]\right|\Delta u\Delta u + e, \qquad \text{және} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta u\to 0,\ \Delta u\to 0}} S_n = \lim\sum_{i=1}^{n}\left|[\vec r_u\vec r_u]\right|_i \Delta u_i\Delta u_i$$

Бұдан

$$S = \iint_\Delta \left|[\vec r_u\vec r_u]^2\right| du du, \qquad \text{ал} \quad [\vec r_u\vec r_u]^2 = EG - F^2 \geq 0 \quad \text{болғандықтан,}$$

$$S = \iint_\Delta \sqrt{EG-F^2}\,du du.$$

Бұл интеграл параметрлеу әдісіне тәуелді емес. Шындығында $a$ , $b$ басқа қисық сызықты координаталар системасы болып, бұл параметрлер $(u,u)$ параметрлері арқылы мына түрде өрнектелсін:

$$a = a(u,u)\ , \qquad b = b(u,u)$$

сонда $\vec r_a = \vec r_u\dfrac{du}{da} + \vec r_u\dfrac{du}{da}\ , \qquad \vec r_b = \vec r_u\dfrac{du}{db} + \vec r_u\dfrac{du}{db}.$

Бұдан $$[\vec r_a,\vec r_b] = [\vec r_u,\vec r_u]\left(\frac{du}{da}\cdot\frac{du}{db} - \frac{du}{db}\cdot\frac{du}{da}\right).$$

Еселік интегралды есептейміз:

$$\iint_\Delta \left|[\vec r_a\vec r_b]\right| da db = \iint_\Delta \left|[\vec r_u\vec r_u]\right|\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{du}{da} & \dfrac{du}{\partial b}\\ \dfrac{du}{\partial a} & \dfrac{du}{db}\end{vmatrix} da db$$

Интегралдау теориясында еселік интегралдың астындағы өрнекті түрлендіргеннен не якобиан, не түрлендіру анықтауышы шығып, интеграл шамасы өзгермейтіні математикалық анализ курсынан белгілі, олай болса:

$$\iint_{\Delta} \left|[\vec{r}_u \vec{r}_u]\right| du du = \iint_{\Delta} \left|[\vec{r}_a \vec{r}_b]\right| da db .$$

## 20. Нормаль иілім

Бетте орналасқан қисықтардың иілімдерінің арасында көптеген байланыстар мен қатынастар бар. Бұл қатынастарды алу үшін қисықтың іліктес (ілеспелі) бетке қатысты орналасуын зерттейміз. Біріншіден, қисықтың жанама $\vec{t}$ векторы әруақытта жанама жазықтыққа тиісті, ал, екіншіден, қисықтың бас нормалі мен бинормалінің векторлары осы жанама жазықтыққа қандай да бір болмасын бұрышпен көлбейді . Бетте орналасқан қисықтың бас нормалінің бағыттаушы векторы $\vec{r}''$ және

$$\ddot{\vec{r}} = k\vec{V} \tag{1}$$

(Бұл векторды қисықтың иілім векторы деп те атайды).

Сызықтың иілім векторының, яғни $\ddot{\vec{r}}$ векторының беттің берілген нүктесіндегі беттің нормаль векторына, демек, $\vec{N}$ векторына, түсірілген проекциясы қисықтың нормаль (табиғи) иілімі деп аталады. Нормаль иілімді $k_n$ арқылы белгілейміз және $R = \dfrac{1}{k_n}$ шамасы нормаль иілімнің радиусы деп аталады.

Егер алдын-ала нормаль $\vec{N}$ векторының бірлік $\vec{n}$ векторын таңдап алсақ, онда нормаль иілім бағдарланған (ориентирленген) деп есептеледі. Сонымен, нормаль $\vec{N}$ векторында белгілі бір бағыт таңдап алынғандықтан $\ddot{\vec{r}}$ векторының $\vec{N}$ векторындағы проекциясы не оң, не теріс болады. Сонымен нормаль қисықтың:

$$k_n = np_{\vec{n}}\ddot{\vec{r}}$$

Нормаль иілімді есептеу үшін $\vec{r}$ вектор-функциядан натурал $S$ параметрі бойынша туынды табамыз:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u \cdot \dot{u} + \vec{r}_u \cdot \dot{u} \tag{2}$$

Бұл вектор қисықтың жанама түзуінің бірлік векторы және $\dot{\vec{r}}$ векторы жанама жазықтыққа тиісті екендігі белгілі;

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{ds}$$

болғандықтан, (2) теңдеуден $S$ параметрі бойынша туынды табамыз:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}(\dot{u})^2 + \vec{r}_u\ddot{u} + \vec{r}_{uu} \cdot (\dot{u})^2 + \vec{r}_{uu}\ddot{u} + 2\vec{r}_{uu}\dot{u}\dot{u}.$$

Иілім векторының $\vec{N}$ нормаль векторына түскен проекциясын табу үшін, $\ddot{\vec{r}}$ векторын $\vec{n}$ векторына скаляр көбейтсек жеткілікті; сонымен қатар $\vec{r}_u, \vec{r}_u$ векторлары жанама жазықтыққа тиісті екенін ескереміз, демек, $\vec{r}_u \perp \vec{n}, \vec{r}_u \perp \vec{n}$ .

Сонымен:

$$k_n = \ddot{\vec{r}}\vec{n} = \vec{n}\vec{r}_{uu}(\dot{u})^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uu}\dot{u}\dot{u} + \vec{n}\vec{r}_{uu}(\dot{u})^2 \tag{3}$$

Егер

$$Z = \vec{n}\vec{r}_{uu} \ , \qquad M = \vec{n}\vec{r}_{uu} \ , \qquad N = \vec{n}\vec{r}_{uu}$$

деп белгілесек, онда (3) теңдік былайша жазылады:

$$k_n = Z\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + N\left(\frac{du}{ds}\right)^2,$$

немесе

$$k_n = \frac{Z(du)^2 + 2Mdudu + N(du)^2}{ds^2}. \tag{4}$$

Ал квадраттық

$$j_2 = Z(du)^2 + 2Mdudu + N(du)^2 \tag{5}$$

формасы беттің екінші квадраттық формасы деп аталады.
Егер

$$ds^2 = j_1 = Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2 \tag{6}$$

беттің бірінші квадраттық формасын ескерсек, онда нормаль иілім былай жазылады:

$$k_n = \frac{Zdu^2 + 2Mdudu + Ndu^2}{Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2} \tag{7}$$

Демек, нормаль қисықтың беттік нүктесі арқылы өтетін қисықтың сол нүктеде есептелген екінші мен бірінші квадраттық формаларының қатынасына тең.

Нормаль $\vec N$ векторының бірлік $\vec n$ векторы былай есептеледі:

$$\vec n = \frac{[\vec r_u \vec r_u]}{|[\vec r_u \vec r_u]|} = \frac{[\vec r_u \vec r_u]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Осы себепті:

$$Z = \frac{(\vec r_u \vec r_u \vec r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\vec r_u \vec r_u \vec r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\vec r_u \vec r_u \vec r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

(7) формула беттің берілген нүктесі арқылы өтетін қисықтың нормаль қисықтығы қисықтық жанамасының бағытына ғана тәуелді екенін көрсетеді. Шындығында, беттің теңдеуі берілсе, онда беттің I, II квадраттық формаларының коэфиценттерін есептеуге болады, ал дифференциалдардың қатынасы жанаманың бағытын анықтайды. Басқаша былай айтуға болады: берілген нүкте арқылы өтетін және жанамасы ортақ болатын барлық қисықтардың осы нүктедегі нормаль қисықтығы өзара тең.

## 21. Қисықтың қисықтығы және жанасушы жазықтық

Қисықтың өзінің қисықтығы $k$ шамасын қарастырайық. Бұл қисықтықты нормаль қисықтықтан ажырату үшін

$$k = \frac{1}{p}$$

шамасын толық иілім деп атаймыз. Толық және нормаль қисықтықтың арасындағы тәуелділікті анықтау үшін беттің нормаль $\vec N$ векторы мен қисықтың бас нормалінің арасындағы бұрыш ұғымын енгіземіз:

$$k_n = \frac{1}{R} = \vec n \ddot{\vec r} = \vec n k \vec u = k\cos q = \frac{\cos q}{p}$$

Нормаль қисықтың анықтамасы бойынша:

$$q = (\widehat{\vec n, \vec u}), \qquad k_n = \frac{\cos q}{p}$$

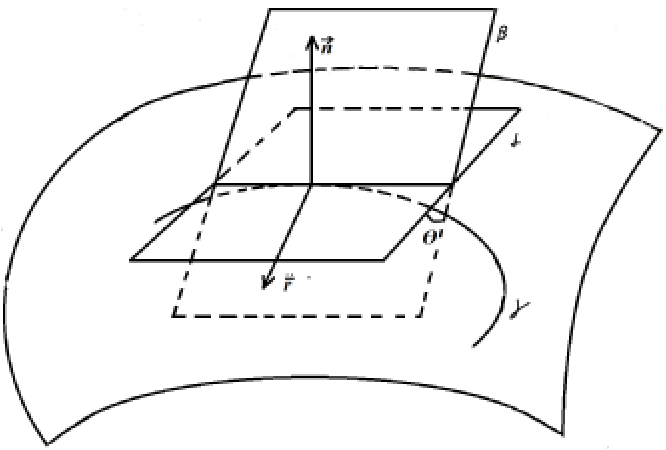
Демек, $\frac{1}{R} = \frac{1}{p}\cos q,$ бұдан $p = R\cos q$

Сонымен, толық $k$ қисықтығы нормаль $k_n$ қисықтығы мен $\frac{p}{2}-q$ бұрышына тәуелді, ал бұл бұрыш беттің жанама жазықтығы мен қисықтың жанасушы жазықтығының арасындағы бұрышқа тең.

Керісінше, егер беттегі қисықтың берілген нүктесінде жанасушы жазықтық берілсе, онда беттегі қисықтың жанамасы (жанама түзуі) осы жанасушы жазықтық пен беттің жанама жазықтығының қиылысуы болып табылады. Жанама түзудің бағытын біле отырып, нормаль иілімді, олай болса, толық иілімді анықтауға болады, себебі $q$ бұрышы да белгілі.

$a$ жанама, $b$ жанасушы жазықтық, ал $\dot{n}$ векторы жанама жазықтықтың нормаль векторы.

Бетте орналасқан қисықтың толық иілімі жанасушы жазықтықтың орналасуымен анықталады немесе егер берілген нүкте арқылы өтетін барлық қисықтардың осы нүктедегі жанасушы жазықтықтары бірдей болса, онда бұл жазықтықтардың толық иілімдері де өзара тең болады. Бұл қорытындыны беттегі қисықтардың иілімінің орнына



**30-сызба**

олардың жазық қималарының иілімдерін қарастыруға болатынын көреміз. Шындығында, кез-келген қисықты қарастыра отырып, бетті қисықтың жанасушы жазықтығымен қиямыз, сонда жанасушы жазықтықтағы жазық қисық пен беттегі қисықтың жанасу нүктесіндегі иілімдері беттеседі.

## 22. Беттің характеристикалық теңдеуі. Толық және орта иілімдер

Бетте екі қисық сызықты координаталар системасы берілсін. Біріншісі берілген нүктеде ортонормаланған система, демек, бұл системаның $\dot{i}$, $\dot{j}$ векторлары беттің берілген нүктесінде бас бағыттар бойынша бағытталған, онда беттің негізгі I, II квадраттық формалары былайша жазылады:

$$j_1 = dx^2 + dy^2, \qquad j_2 = k_1 dx^2 + k_2 dy^2 \tag{1}$$

мұндағы $k_1, k_2$ беттің бас иілімдері.

Ал екінші қисық сызықты координаталар системасы кез-келген түрде алынады, тек бұл системаға қатысты беттің нүктесі ерекше нүкте болмауы керек. Осы екінші системада негізгі формаларды жазып, оны (1) формалармен теңестіреміз:

$$Ldu^2 + 2Mdudu + Ndu^2 = k_1 dx^2 + k_2 dy^2 \tag{2}$$

$$Edu^2 + 2Fdudu + Gdu^2 = dx^2 + dy^2$$

Екінші теңдеудің оң және сол жақтарын $k_1$ - ге көбейтіп, алдыңғы теңдіктен шегереміз:

$$(L - k_1 E)du^2 + 2(M - k_1 F)dudu + (N - k_1 G)du^2 = (k_2 - k_1)dy^2.$$

Ал кез-келген координаталар системасынан нормаль координаталар системасына көшкенімізде түрлендіру формуласы былай жазылады:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial u} dJ = adu + bdu$$

Орындарына мәндерін қойып, теңестірсек:

$$L - k_1 E = (k_2 - k_1) a^2 ,$$

$$M - k_1 F = (k_2 - k_1) ab \ ,$$

$$N - k_1 G = (k_2 - k_1) b^2 \ ,$$

бұдан

$$(L - k_1 E)(N - k_1 G) - (M - k_1 F)^2 = 0 \ , \quad \begin{vmatrix} L - k_1 E & M - k_1 F \\ M - k_1 F & N - k_1 G \end{vmatrix} = 0.$$

$(dy)^2$ шығарып тастау арқылы $k_2$ коэфиценті үшінде біз осындай теңдеу аламыз, олай болса, беттің бас иілімдері келесі квадрат теңдеудің түбірлері болады:

$$(L - sE)(N - sG) - (M - sF)^2 = 0 \tag{3}$$

(3) теңдеу беттің характеристикалық теңдеуі деп аталады, ал бұл теңдеуде жақшаларды ашып жинақтасақ:

$$S^2 - \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2} + \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \tag{4}$$

Белгілеу енгіземіз:

$$H = \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{5}$$

Сонда (4) характеристикалық теңдеу былайша жазылады:

$$S^2 - 2H_s + K = 0$$

$H$ және $K$ коэфиценттері беттің орта және толық иілімдері деп аталады.

Виет теоремасы бойынша:

$$K = k_1 k_2, \qquad k_1 + k_2 = 2H$$

Толық иілім бас иілімдердің көбейтіндісіне, ал орта иілім бас иілімдердің қосындысына тең және толық, орта иілімдердің арасындағы байланыс келесі теңсіздік түрінде өрнектеледі:

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0$$

және орта, толық иілімдер (5) формула бойынша есептеледі.

**3 тақырып. Топология элементтері**

Топологиялық кеңістік. Метрикалық кеңістіктегі топология. Топологиялық кеңістіктердегі үзіліс бейнелеулер. Гомеоморфизм. Тұйық жиындар. Топологияның базасы. Байланыстылық және сызықтық байланыстылық.. Хаусдорф топологиялық кеңістіктері. Компакты топологиялық кеңістіктер.

Топологиялық кеңістік.

Топология фигуралардың өзара бір мәнді және өзара үздіксіз бейнелеуде өзгеріссіз (инвариант) қалатын қасиеттерін қарастырады (зерттейді).

Мысалы, егер бетті созылмалы пленка деп қарастырсақ, онда өзара бір мәнді және өзара үздіксіз түрлендірулер (өзіне өзі бейнелеу) ретінде оны созу және қысуды атайды.

Топологиялық негізгі ұғымы, топологиялық кеңістік болады.

Элементтері нүкте деп аталатын $X$ жиынына ашық жиын деп аталатын барлық бөлімше жиындарының жиыны $\Phi = \{F_\alpha\}$ төменгі үш шартты қанағаттандыратын болсын.

а) ашық жиындардың (шектеулі немесе шектеусіз ) жиынының бірігуі ашық жиын болады;

б) кез келген ашық жиындардың қиылысуы ашық жиын болады;

в) бос жиын $\varnothing$ және $X$ жиынының осі ашық жиын болады.

Онда $\Phi = \{F_\alpha\}$ - $X$ жиынындағы топологиялық  структура деп аталады.

Анықтама: Топологиялық кеңістік деп, топологиялық структура анықталған $X$ жиынын айтады және $(X, \Phi)$ деп белгілейді.

а)-в) шарттары топологиялық структураның аксиомалары деп аталады.

а)-в) аксиомаларды формула түрінде жазайық.

а) $\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha \in \Phi, \alpha \in I$ индекстер жиыны.

б) Егер, $F_1, F_2, \ldots F_n \in \Phi$, онда $\bigcap_{i=1} F_i \in \Phi$

Топологиялық кеңістігінің мысалдарын қарастырайық.

1. Егер Ф $X$ жиынының барлық бөлімше жиындарымен беттесіп кетсе, онда $(X, \Phi)$ топологиялық кеңістік дискретті деп аталады. Дискретті кеңістікте барлық жиындар ашық екенін көреміз.

2. Егер Ф екі $\varnothing$ және $X$ жиынынан тұрса, $(X, \Phi)$ топологиялық антидискретті кеңістік деп аталады.

Дискретті кеңістікті бір қап горох пен салыстыруға болады, әрбір дән өз алдына жеке, ал антидискреттілі-өзара шатасып жатқан жіптер байланысымен, немесе бір тарелка спагетти мен салыстыруға болады.

3. Айталық $X[0,+\infty]$ сәуле болсын, $\Phi\varnothing$ және $oX$ жиындары барлық сәулелер $(a, +\infty), a \geq 0$ жиынынан тұрсын. Ф бірігуіне б) және в) аксиомалары орындалатыны түсінікті, ал а) аксиомасына қарасты кез келген осындай сәулелер үйірінің бірігуі тағы сәуле болады.

Кеңістік $(X, \Phi)$ –стрелка деп аталады. Ашық жиындардың толықтаушысын ерекше атаймыз.

$F \subset X$ жиынының толықтаушысы $X \setminus F$ ашық болса $(X \setminus F \subset \Phi)$, онда $E$ жиыны тұйық  жиын деп аталады.

Теорема:

а) Екі тұйық жиынның қиылысуы тұйық болады;

б) кез келген екі тұйық жиынның бірігуі- тұйық болады;

в) бос жиын және кеңістіктің өзі тұйық;

д) кез келген саны шектеулі тұйық жиындардың бірігуі тұйық.

Дәлелдеу:

Алдымен в) қасиетінен бастайық, топологиялық структураның в) аксиомасы бойынша бос жиыны $\varnothing$-тұйық, себебі оның толықтаушысы –кеңістіктің өзі $X$–ашық, ал кеңістіктің өзі $X$-тұйық, себебі оның толықтаушысы-бос жиын $\varnothing$–ашық.

Енді б) қасиетіне келейік. Айталық $F, G \in X$-тұйық жиындар болсын. Онда олардың толықтаушылары $X \setminus F$ және $X \setminus G$ ашық болады. Олардың бірігуінің $F \cup G$ тұйық екенін дәлелдеу үшін $F \cup G$ жиынының толықтауыш жиыны ашық екенін дәлелдеуіміз керек. Ал екі жиынның бірігуінің толықтаушысы олардың толықтаушыларының қиылысуымен бірдей болады. $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G)$. (кейде жиынның толықтаушысын $G$ белгісімен белгілейді-Complement) сөзінің бірінші әрпі, онда жоғарғы $C(F \cup G) = CF \cap CG$ деп жазылады.

**Топологияның базасы.**

Айталық $(X, \Phi)$–топологиялық кеңістік делік және $A \subset B \subset X$. Егер $\exists U \in \Phi / A \subset U \subset B$ болса, онда $B$ жиыны $A$ жиынының аймағы деп аталады.

Егер $A=\{x\}$ бір ғана нүктесінен тұратын болса, онда $\{x\}$жиынының аймағы жай ғана x нүктесінің аймағы дейді. $X$ нүктесінің аймағынының ашық болуы міндетті емес екендігін ескерте кетейік.

Теорема.

Айталық $(X,\Phi)$–топологиялық кеңістік және $A\subset X$ болсын. $A$ жиыны ашық болса ғана, тек сонда ғана ол әрбір өз нүктесінің аймағы болып табылады.

3. $(X,\Phi)$–топологиялық кеңістік делік. Егер әрбір $x\in X$, нүктесі үшін және оның кез келген $Bx$ аймағы үшін мына:

$\exists V\in B/x\in U\subset Bx$ шарттары орындалса, онда $X$- тен алынған ашық бөлімше жиындарының $B\subset\Phi$ үйірі $\Phi$ топологиясының базасы деп аталады.

Мысалы, интервалдар жиыны накты салдардың $R$ жиынында табиғи топология базасын құрайды.

4. $(X,\Phi)$ топологиялық кеңістігінен қандай да бір $F$ жиынын алайық. Егер $x$ нүктесінің аймағы $F$ болса, онда $x\in F$ нүктесі $F$ жиынының **ішкі** нүктесі деп аталады.

$F_0^0$ жиынының барлық ішкі нүктелерінің $F$ жиыны оның іші деп аталады.

Егер $x$ нүктесі $A$ жиынының $A=x/A$ толықтаушының ішкі нүктесі болса, онда ол $A$ жиынына сыртқы нүкте деп аталады.

Егер $x$ нүктесінің кез келген аймағының $A$ мен бос емес қиылысуы болса, онда ол нүктені $A$ жиынының жанасушы нүктесі деп аталады.

Айталық $(X,\Phi)$–топологиялық кеңістік және $A\subset X$ делік. $A$ жиынымен бірге Ф–ден алынған барлық мүмкін болатын элементтердің қиылысу жиынын $T$ арқылы белгілейік.

$I^*, II^*$ аксиомаларын $T$ қанағаттандыратын тексеруге болады, ендеше, $A$ жиынындағы топологиялық структураны да анықтайтын болады.

$T$ топологиясы туралы, $A$ жиынында Ф топологиясы арқылы индукцияланған дейді.

$(A,T)$ топологиялық кеңістігі кеңістігінің бөлімше кеңістігі деп аталады.

Үздіксіз және гомоморфизм.

1. Үздіксіз бейнелеу ұғымы топологияның негізгі ұғымдарының бірі болып табылады. Егер $(X,\Phi)$, $(X',\Phi')$ топологиялық кеңістіктердің $X'$–тегі $f(x)$нүктесінің кез келген $U'$ аймағы үшін $f(u)\subset U'$, яғни $f(y)\in U'$, $\forall y\in U$болатындай $X$–тегі $x$ нүктесінің $u$ аймағы бар болса, онда $f:X\to X'$ (1) бейнелеуі $x\in X$ нүктесінде үздіксіз деп аталады.

Егер $x$–тен алынған әрбір нүктеде $f$ бейнелеуі үздіксіз болса, онда ол үздіксіз деп аталады.

2. $f:X\to X'$ бейнелеуі мынадай екі шартты қанағаттандырса, онда ол гомоморфизм немесе топологиялық бейнелеу деп аталады.

а) $f$ –биекция (сондықтан да $f^{-1}$–кері бейнелеуі бар);

б) $f$ пен $f^{-1}$ бейнелеулері үздіксіз.

Бұл жағдайда $X$пен $X'$ кеңістіктері гомоморфты деп аталады және $X\sim X'$ деп жазылады. Гомоморфизм анықтамасынан ~ қатынасының мынандай қасиеттері шығады:

1) $X\sim X'$, 2) $X\sim X'\Rightarrow X'\sim X$, 3) $(X\sim X'\sim X'')\Rightarrow X\sim X''$.

Сөйтіп ~ қатынасы барлық топологиялық кеңістіктердің $X$ жиынындағы эквиваленттік қатынасы болып табылады. $X$~фактор жиынының элементтері топологиялық типтер деп аталады. Әрбір топологиялық тип бірі екіншісіне гомоморфизмы болып келетін топологиялық кеңістіктен тұрады.

Кеңістіктің гомоморфизміне қатысты кез келген инвариаттық қасиеті топологиялық қасиет деп аталады.

3) Жиынның ашық (жабық) болу қасиеті топологиялық инвариант болады.

**Айрымдылық. Компактылық. Байламдылық.**

1. Егер топологиялық кеңістіктің кез келген екі түрлі нүктесінде қиылыспайтын аймағы бар болса, онда оны айырылатын (немесе хаусдорты) кеңістік деп атаймыз.

Мысалы:

Айырылатын кеңістікте: $R^n$ сандық кеңістігі ( $R$ сандық түзуі үшін бұл айқын) айырылады. $A^n$ аффиндік кеңістігі мен $P_n$ проективтік кеңістігінде айырылатын кеңістіктер. Антидискретті кеңістіктер айырылмайды.

2. $X$ кеңістігінің жабуы деп $X$ жиындарының бөлімше жиындарының үйірін $U$ айтады, егер $\bigcup X_\lambda = X$ болса. Егер $X_\lambda$ ашық болса, онда топологиялық $\lambda \in I$ кеңістіктің $(X_\lambda)$–жабуы ашық деп аталады. $(X_\lambda)$ жабудың бөлімше жабуы-бұл өздері жабу болып табылатын оның бөлімше үйірі. $X, \Phi$ кеңістігі төмендегідей Борель-Лебег аксиомасын қанағаттандырса, онда оны компактылы кеңістік деп атайды: әрбір ашық жабудың шектеулі бөлімше жабуы бар, яғни егер $X = \bigcup X_\lambda$, мұндағы $X_\lambda \in \Phi, \forall \lambda \in I$ болса, онда $X = X_{\lambda_1} \bigcup X_{\lambda_2} \bigcup \ldots \bigcup X_{\lambda_n}$, болатындай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in I$ индекстерінің шектеулі жиыны болады.

Егер $A$ бөлімше кеңістігі компактылы болса, онда топологиялық кеңістіктен $A$ жиыны компактылы жиын деп аталады. Мысалы, $R$ сандық кеңістігі -$[a, b]$ -сандық кеңістігінде компактылы жиын.

$X, \Phi$ топологиялық кеңістігінің әрбір $x$ нүктесінде $X$–тегі $\overline{U_x}$ компактылы бөлімше кеңістік болатындай $U_x \in \Phi$ аймағы бар болса, онда ол локально-компактылы кеңістік деп аталады.

Егер $\overline{A} \bigcap B = \varnothing$ және $A \bigcap \overline{B} = \varnothing$, онда $(X, \Phi)$ топологиялық кеңістігінің $A$ мен $B$ жиындары айырылған жиындар деп аталады. $(X, \Phi)$ кеңістігі егер ол екі бос емес айырылған бөлімше жиындардағы бірігуі болып табылады, онда ол байламды кеңістік деп аталады.

Егер $\Gamma \subset X$ бөлімше жиыны X–тегі байламды бөлімше кеңістік болса, онда ол байламды жиын деп аталады.

**Мысалы:**

$\Gamma - A_2$ аффиндік жазықтықтағы гипербола, $A$ мен $B$ осы гиперболаның тармақтары. Айталық, $T$-аффиндік жазықтықтың топологиясымен Г жиынында индукцияланған топология. $(\Gamma, T) - A_2$ дегі бөлімше кеңістік, әрі $\Gamma = A \bigcup B$, ал $A$ мен $B$ айырылған. Демек, Г гипербола байламсыз. Осы сияқты екі қуысты гиперболоид пен гиперболалық цилиндрдің байламсыз екендігіне көз жеткізуге болады.

**Ескертпе.** Қарастырылған айырымдылық, компактылық және байламдылық ұғымдары кеңістіктің топологиясына қойылған белгілі талаптар көмегімен, яғни оның барлық ашық жиындарының Ф үйірінде анықталған. Сондықтан кеңістіктің айрылатын немесе компакт, немесе ақырында, байламды бола алушылық қасиеттері кез келген гомоморфизмде сақталады.

**Жиынның шекарасы.** Айталық $(X, \Phi)$ топологиялық кеңістік болсын және $A \subset X$. $x$ нүктесі, егер оның кез келген аймағының $A$ жиынымен де, сол сияқты оның СА толықтаушысымен де бос емес қиылысуы бар болса, онда ол $A$ жиынының шекаралық нүктесі деп аталады.

$A$ жиынының шекарасы деп, оның барлық шекаралық нүктесі басқаша да анықтауға болады: егер шекаралық нүкте $X$ $A$ жиынымен СА жиынының әрқайсысы үшін жанасу нүкте болса, онда ол $A$ жиынының шекаралық нүктесі болып табылады.

Метрикалық кеңістіктер.

$(X, \Phi)$ топологиялық кеңістігінің кез келген қиылыспайтын тұйық бөлімше жиындарының қиылыспайтын аймақтары бар болса, онда ол нормаль кеңістік деп аталады.

Мысалы, $R^n$ сандық кеңістік нормаль болып табылады, дискрет және антидискрет кеңістіктер нормаль кеңістіктер болып табылады.

Айталық, $E$ бос емес жиын, ал $R+$ теріс емес нақты салдар жиыны болсын, $E$ жиынындағы метрика деп мынадай:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in E$

($\rho$ функцияның симметриялылығы)

($\rho(x, y) + \rho(y, z) \Rightarrow \rho(x, z)$

(үшбұрыш теңсіздігі), қасиеттері бар

$\rho : E * E \to R+$

бейнелеуін айтамыз.

$(E, \rho)$ парын метрикалық кеңістік дейміз, мұндағы $E$-бос емес жиын және $\rho$-ондағы метрика. Е-ден алынған $x, y, \mathbf{K}$ элементтері нүктелер деп аталады, теріс емес $\rho(x, y)$ саны $x$ пен $y$ нүктелерінің ара қашықтығы деп аталады.

$\rho$ функциясының 1-3 қасиеттерін метрикалық кеңістіктің аксиомалары деп атайды.

$E$-дегі ашық жиындар жиынын $\Phi$ арқылы бейнелейік $E$–дегі ашық жиындар анықтамасын пайдаланып, $\Phi - I, II$ топологиялық кеңістіктің аксиомаларын қанағатандырады. Сондықтан Ф-Е жиынындағы топология. Бұл топология $\rho$ метрикалық арқылы индукцияланған деп аталады.

Сөйтіп, кез келген метрикалық кеңістік-метрикамен индукцияланған топологиямен бірге алғанда топологиялық кеңістік болып табылады. Бос жиыны және $B(x, r) = \{x \in E / \rho(x, r) \subset r\}$, ашық шарларының $B = \{B(x, r) / x \in E, r \in R_+^0\}$ үйірі осы топологияның базасы болып табылады. Айталық, (X, Ф)-топологиялық кеңістігі берілсін. Егер X жиынында берілген Ф топологиясы осы жиында индукцияланатын $\rho$ метрикасы табылса, онда (X, Ф) кеңістігі метрикаландыратын кеңістік деп аталады.

Дәлелдейміз : Л.С. Урисон теоремасын келтіреміз.

Теорема санаулы базасы бар кеңістік нормаль болса ғана, тек сонда ғана метрикаланады.

Көпбейнеліктер.

1. Егер $A_n$ аффиндік кеңістігінде $R = \{0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \mathbf{K}, \vec{e}_n\}$ реперін беретін болсақ, онда $R^n : (x^1, x^2, \mathbf{K}, x^n) \in R^n$ сандық кеңістігінің нүктелері болып табылатыны $x^1 \in R$, $n$ сандарының $(x^1, x^2, \mathbf{K}, x^n)$ реттелген жүйесі әрбір $x \in A_n$ нүктесінің координатасы болады. Сонымен, $A_n$ аффиндік кеңістігінде $R$ реперінің берілуі $f : A_n \to R^n$ бейнелеуін анықтайды. Бұл бейнелеудің гомоморфизм болатынын оңай байқауға болады. Қорытып айтқанда, $A_n$-дегі координаталар жүйелерін ($E_n$ евклидтік кеңістіктегі декарт координаталар жүйесі сияқты) $R^n$ сандық кеңістігіне (табиғи топологиямен бөлінген) осы кеңістіктің гомоморфизмі ретінде қарастыруға болады.

2. Айталық, $(X,\Phi)$ айырылатын топологиялық кеңістік болсын. $n$-өлшемді координаталық жүйе (немесе $n$-өлшемді карта) деп, кейбір $U \subset X$ ашық бөлімше жиынының $R^n$ сандық кеңістігінің ашық бөлімше жиынын $\varphi$ картасының координаталық аймағы деп аталады.

Үздіксіздігі және гомоморфизм.

1.Үздіксіз бейнелеу ұғымы топологияның негізгі ұғымдарының бірі болып табылады.

Егер $(X,\Phi)$, $(X',\Phi')$ топологиялық кеңістіктердің $X'$–тегі $f(x)$ нүктесінің кез келген $U'$ аймағы үшін $f(U) \subset U'$, яғни $f(y) \in U', \forall y \in U$ болатындай $X$–тегі $x$ нүктесінің $U$ аймағы бар болса, онда $f: X \to X'$ (1) бейнелеуі $x \in X$ нүктесінде үздіксіз деп аталады. Егер $X$–тен алынған әрбір нүктеде $f$ бейнелеуі үздіксіз болса, онда ол үздіксіз деп аталады.

2. $f: X \to X'$ бейнелеуі мынандай екі шартты қанағаттандырса, онда ол гомоморфизм (немесе топологиялық бейнелеу) деп аталады.

а) $f$ -биекция (сондықтан да $f^{-1}$–кері бейнелеуі бар);

б) $f$ пен $f^{-1}$ бейнелеулері үздіксіз.

Бұл жағдайда $X$ пен $X'$ кеңістіктері гомоморфты деп аталады және $X \sim X'$ деп жазылады.

Гомоморфизм анықтамасынан ~ қатынасының мынандай қасиеттері шығады:

1) X~X, 2) X~$X' \Rightarrow X'$~X; 3) (X~$X' \sim X''$) $\to X \sim X''$.

Сөйтіп ~ қатынасы барлық топологияның кеңістіктердің $X$ жиынындағы эквиваленттік қатынасы болып табылады. $X/\sim$ фактор жиынының элементтері топологиялық типтер деп аталады. әрбір топологиялық тип бірі екіншісіне гомоморфты болып келетін топологиялық кеңістіктен тұрады.

Кеңістіктің гомеоморфизмге қатысты кез келген инварианттық қасиеті топологиялық қасиет деп аталады.

**7. Тәжірибелік сабақтардың мазмұны, сағаттағы көлемі**

**Тақырып 1. Қисықтар теориясы**

1. $\bar{u} = \bar{a}t + \bar{b}$ сызықты функцияның годографы түзу болатындығын дәлелдеу керек.
2. $\bar{u} = \bar{a}\cos t + \bar{b}\sin t + \bar{c}$ функцияның годографы $\bar{r}_0 = \bar{c}$ нүктесі арқылы өтетін, $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары орналасқан жазықтықта жатқан эллипс болатынын дәлелдеңіз, векторлар өзара коллинеар емес.
3. Алдыңғы мысалда $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар болса, онда годограф түзудің кесіндісі болатынын дәлелдеңіз.
4. $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}t + \bar{c}t^2$ функцияның годографы парабола ($\bar{b}$ және $\bar{c}$ коллинеарлы емес) болатынын дәлелдеңіз.
5. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ шеңберінің параметрлік теңдеулерін құрастырыңыз, параметр арқылы түзудің координаттар басы және қисықтың бойындағы нүкте арқылы өтетін бұрыштық коэффициенті алынған.
6. $x = t^2;\ y = \dfrac{t^3}{3};\ z = \dfrac{t^4}{12}$ қисықтың ерекше нүктесінде жанаманы табыңыз. Жауабы: Ох осі.
7. Келесі сызықтарға және қисықтарға жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін құрастырыңыз: 1) $y = x^2 + 4x + 3$ A, B, C нүктелерінде, абсциссалары: 1, 0, 1; 2) $y = x^3$ в точках A, B нүктелерінде, абсциссалары 0 және 1.

8. Қандай нүктеде $y = x^2$ параболаға жүргізілген жанама Ох осімен $45^0$ бұрыш жасайды?
9. Келесі қисықтардың кез келген $M_1$ және $M_2$ нүктелерінің арасындағы доғаның ұзындықтарын есептеңіз: 1) $y = x^{3/2}$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.
10. Келесі қисықтардың $M_1$ және $M_2$ нүктелерінің арасындағы доғаның ұзындықтарын есептеңіз: 1) $y = \ln\cos x,\ x_1 = 0,\ x_2 = p/3$; 2) $x = 8at^3,\ y = 3a(2t^2 - t^4),\ t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{2}$.
11. Шеңбердің натурал параметризациясын табыңыз.
12. $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ қисықтың қисықтығын табыңыз.
13. $y = \ln x$ қисықтың эволютасын салыңыз және оның теңдеуін құрастырыңыз .
14. $x = \sec t,\ y = tgt,\ z = at$ қисықтың берілген нүктеде жүргізілген жанаманың теңдеуін құрастырыңыз, $t = p/4$.
15. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ қисығы берілген. $t = 1$ нүктесіне жүргізілген жанма түзудің және нормаль жазықтықтың теңдеулерін құрастырыңыз. Жанамалардың хОу жазықтығымен қиылысуында қандай сызық пайда болады?
16. $x = a\cos t,\ y = \sin t,\ z = e^t$ қисыққа $t = 0$ нүктесінде жүргізілген жанасушы жазықтықтың теңдеуін жазыңыз.
17. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z == bt$ бұранда сызықтың жанама, нормаль жазықтық, бинормаль, жанасушы жазықтық, бас нормаль және түзеуші жазықтық теңдеулерін құрастырыңыз. Бас нормаль бұранда сызықтың осін тік бұрышпен қиятынын, ал бинормаль бұранда сызықтың осімен тұрақты бұрыш жасайтынын дәлелдеңіз. Френе реперінің векторларын табыңыз.
18. Келесі қисық үшін қисықтық пен бұралым тең екендігін дәлелдеңіз: $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$.

**Тақырып 2. Беттер теориясы**

**1.** $x = a + b\cos u,\ y = 0,\ z = b\sin u\quad (b < a)$ шеңберінің $Oz$ осін айналып шығуынан пайда болатын тораның теңдеуін жазыңыз вокруг оси.

**2.** Гиперболалық және параболалық цилиндрлердің параметрлік теңдеулерін жазыңыз.

**3.** $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$ бетіне $M(u = 2, v = 1)$ нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың және нормальдың.

**4.** Келесі айналу беттердің бірінші квадраттық формасын жазыңыз: 1) $x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = c\sin u$ - айналу эллипсоиды; 2) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ - айналу парабалоиды.

**5.** $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv\quad (|u| + |v| \neq 0)$ беті берілген. 1) Бірінші квадраттық форманы табыңыз; 2) $u = 2, v = 1, v = au$ қисығы үшін доғаның ұзындығының дифференциалын есептеңіз; 3) $v = au$ сызығының $u = 1, u = 2$ сызықтарымен қиылысу нүктелерінің арасындағы доғаның ұзындығын есептеңіз.

**6.** Бірінші квадраттық формасы $ds^2 = du^2 + dv^2$ болатын, беттің бойындағы $v = 2u$ және $v = -2u$ сызықтардың арасындағы бұрышты табыңыз.

**7.** $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ тік геликоидтың бойында жатқан, $u = 0, u = a, v = 0, v = 1$ сызықтарымен шектелген төртбұрыштың ауданын табыңыз.

**8.** Келесі айналу беттерінің екінші квадраттық формасын табыңыз: 1) $x = R\cos u\cos v,\ y = R\cos u\sin v,\ z = R\sin u$ - сфера; 2) $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u$ - дөңгелек цилиндр.

9. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ тік геликоидтың бас бағыттары мен бас қисықтықтарын табыңыздар.

10. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$ тік геликоидтың толық және орта қисықтығын табыңыз.

11. Т ік геликоидтың, псевдосфераның геодезиялық сызықтарын табыңыз.

**Тақырып 3. Топология элементтері**

1. $B_e(x)$ ашық екендігін дәлелдеу.
2. $IntY$ ашық екенін дәлелдеу.
3. $\overline{Y}$ тұйық екенін дәлелдеу.
4. Анықтама. X жиынындағы тополгия деп, келесі аксиомаларды қанағаттандыратын оның $t$ ішкі жиындарының жүйесін айтады: 1) $X \in t$ ; 2) $\varnothing \in t$ ; 3) егер $U_a \in t \ \forall a \in A,$ онда $\bigcup_{a \in A} U_a \in t$ ; 4) егер $U_1,...,U_k \in t$ , онда $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in t$ .

   $(X, t)$ жұбы топологиялық кеңістік деп аталады. $F = X \setminus U$ түріндегі жиын тұйық деп аталады. Мұндағы $U \in t$ .

Тұйық жиындар үшін 1-4
аксиомаларды тексеріңіз.

**8. Өздік жұмыс тапсырмалары**

1. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (астроида) қисығына жүргізілген жанаманың және нормальдің теңдеулерін құрастырыңыз.
2. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le T$ (бұранда сызық) қисығының ұзындығын есептеңіз.
3. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ бұранда сызықтың жанама түзуінің, нормаль жазықтығының, бинормальдің, жанасушы жазықтықтың, бас нормальдің және түзеуші жазықтықтың теңдеулерін құрастырыңыз.
4. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ қисығының қисықтығы мен бұралымын есептеңіз.
5. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ қисықтың натурал параметрлеуін табыңыз.

Беттер теориясы» тақырыбы бойынша
Тест

1. $S$ бетінің $\sigma$ ауданы:

A) $\iint [r_u, r_v] dudv$ B) $\iint [r_{uv}, r_v] dudv$ C) $\iint [r_u, r_{vu}] dudv$
D) $\iint [r_{uu}, r_v] dudv$ E) $\iint [r_u, r_{vv}] dudv$

2. Бірінші квадраттық формалары және ішкі геометриялары бірдей болатын беттер
A) изометриялы; B) гомеоморфты C) бинарлы D) симметриялы
E) параллель деп аталады.

3. $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ түріндегі формула:
A) екінші квадраттық форма B) бірінші квадраттық форма
C) беттің ауданы D) қисықтық E) бұралым

4. $\boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) dudv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2$ түріндегі формула:
A) бірінші квадраттық форма B) екінші квадраттық форма
C) беттің ауданы D) жазық қисық E) қисықтық

5. $k_n = (\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{n})$ формуласы:
A) $L$ қисығының нормаль қисықтығын анықтайды B) $L$ қисығының геодезиялық қисықтығын анықтайды
C) $L$ қисығының бас қисықтығын анықтайды D) $L$ қисығының бұралымын анықтайды E) $L$ қисығының асимптоталық сызығын анықтайды

6. Дюпен индикатрисасы ол...
A) эллипстік нүктедегі – эллипс B) параболалық нүктедегі – эллипс
C) гиперболалық нүктедегі – эллипс D) параболалық нүктедегі – парабола E) эллипстік нүктедегі – парабола

1. Топологиялық кеңістік. Метрикалық кеңістіктің топологиясы.
2. Топологиялық кеңістіктердің үзіліссіз бейнелеулері.
3. Гомеоморфизм.
4. Тұйық жиындар.
5. Топология базасы.
6. Байланыстылық және сызықтық байланыстылық.
7. Хаусдорф топологиялық кеңістіктері.
8. Компакты топологиялық кеңістіктер.

**9. СОӨЖ кеңестер графигі**

Барлық сұрақтар бойынша кеңес осы семестрге сәйкес құрастырылған СОӨЖ кестесімен жүргізіледі.

**10. Студенттердің білімін тексеру кестесі**

**Пән бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру графигі**

| № | Жұмыс түрлері | Тақырып | Әдебиет | Орындау уақыты | Бақылау түрі | Тапсыру мерзімі |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | Жазбаша жұмыс | Жазықтықтағы қисық сызыққа жанама және нормаль жүргізу | | Екі апта | | 3-ші апта |
| 2 | Жазбаша жұмыс | Қисықтың доғасының ұзындығы | | Бір апта | | 5-шы апта |
| 3 | Жазбаша жұмыс | Френенің табиғи үш жағы | | Екі апта | | 7-ші апта |
| 4 | Межелік бақылау | | | | тест | 8-ші апта |
| 5 | Жазбаша жұмыс | Қисықтың иілімі және бұралымы | | Бір апта | | 10-шы апта |
| 6 | Жазбаша жұмыс | Беттің жанама жазықтығы және нормалі | | Екі апта | | 12-ші апта |
| 7 | Жазбаша жұмыс | Беттің бірінші квадраттық формасы. | | Екі апта | | 14-ші апта |
| 8 | Межелік бақылау | | | | тест | 15-ші апта |

**11. Студенттердің білімін бағалау критерийлері**

Пән бойынша емтихан тест түрінде өткізіледі. Емтиханға жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын орындаған студенттер жіберіледі.

Әр тапсырма 0-100 баллмен бағаланады.

Жіберу рейтингі ағымдағы сабақтардағы (дәрістерге қатысу, үй тапсырмалары, СӨЖ бойынша тапсырмалар, тәжірибе тапсырмалары, межелік бақылау) барлық орындалған тапсырмалардың арифметикалық орташасынан қорытылады.

Пән бойынша қорытынды бақылауға (ҚБ) жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын (жұмыстарды және СӨЖ бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру) орындаған және кіру рұқсатының рейтингі 50 баллдан кем емес студенттер жіберіледі.

Студенттің әр пән бойынша (пәннің қорытынды бақылау түрі мемлекеттік емтихан болса да) оқу жетістіктерінің деңгейі қорытынды бағамен (Қ) анықталады. Қорытынды баға ЖР және ҚБ (емтихан, дифференциалды сынақ немесе курстық жұмыс (жоба))салмақтық үлестер негізінде есептеледі (СҮжр және СҮқб).

Қ = ЖР*0,6 + ҚБ*0,4

Пән бойынша қорытынды баға жіберу рейтингі де, емтихан бағасы да оң бағаланған жағдайда ғана есептеледі. Дәлелсіз себеппен қорытынды бақылауға келмеген жағдайда «қанағаттаннарлықсыз» деген бағаға теңестіріледі.

Қорытынды бағаның есептелуі дұрыс болу үшін межелік бақылау (рейтинг) және қорытынды емтихан 0 ден 100%-ға дейін пайызбен бағаланады.

Межелік бақылау бағасы ағымдағы және межелік бақылаудың бағаларының қосындысы болады.

Бақылаудың барлық түрінде де оқудағы жетістіктер балды-рейтингті жүйесі бойынша бағаланады:

| Әріп жүйесі бойынша баға | Балдың цифрлық баламасы | Пайыздық мазмұны | Дәстүрлі жүйедегі баға |
|---|---|---|---|
| A | 4,0 | 95-100 | Өте жақсы |
| A- | 3,67 | 90-94 | |
| B+ | 3,33 | 85-89 | Жақсы |
| B | 3,0 | 80-84 | |
| B- | 2,67 | 75-79 | |
| C+ | 2,33 | 70-74 | Қанағаттанарлық |
| C | 2,0 | 65-69 | |
| C- | 1,67 | 60-64 | |
| D+ | 1,33 | 55-59 | |
| D | 1,0 | 50-54 | |
| F | 0 | 0-49 | Қанағаттанарлықсыз |

**12. Оқытушының талаптары, курс саясаты**

Студенттер міндетті түрде сабақтарға қатысу керек. Сабақты босатқан жағдайда деканаттың орнатқан тәртібі бойынша босатқан сабағын тапсырады. Сабаққа екі рет кешігіп келу бір сабақты босатумен теңеледі. Екі сабақтан көп босатқан жағдайда оқытушы студентті сабаққа кіргізбеуге құқылы. Берілген курстың студенттерінің контингенті болмайтын бөгде адамдардың дәрісте отыруына тыйым салынады.

Тапсырмаларды көрсетілген мерзімде тапсыру қажет. Барлық тапсырмаларды тапсырудың соңғы мерзімі – емтихан сессиясының басталуына 3 күн қалғанға дейін.

Барлық тапсырмаларды тапсырмаған студенттер емтиханға жіберілмейді.

Студенттер әр оқу сабағы бойынша тақырыпты қайталауға және өткен тапсырмаларды орындап тапсыруға міндетті. Оқу материалдарын меңгеру деңгейі тест немесе жазбаша жұмыстар арқылы тексеріледі. Студенттерді тестілеу алдын ала ескертусіз өткізілуі мүмкін.

Студенттің оқытушымен өздік жұмысын (СОӨЖ) орындау барысында келесі төрт негізгі функцияларды ескеру керек:

Бірінші – оқу пәні бойынша сабақтар барысында оқытушы студентке берген ақпараттың белсенді қабылдануын болжамдайды.

Екінші – студенттер өздігінен оқытушының нұсқауларын негізге алып, оқу-әдістемелік құралдарды, әдебиеттерді меңгеруді, үй тапсырмаларын, бақылау және курстық жұмыстарды орындауды болжамдайды. Осы кезеңде студенттерден жұмыс әдістерін білуді, өздік ұйымдастырушылықты және тәртіпті талап етеді.

Үшінші – студенттің өзінің қиындық туғыздыратын жағдайларын талдау және жүйелеу, оқу материалын түсіну және меңгеру кезіндегі қиыншылықтардың себептерін анықтау, басқа оқу амалдарын орындау. Студенттер шешілмейтін қиындықтарын оқытушы үшін сұрақтар жүйесіне аударады (реттейді, құрастырады), сол сұрақтарға өз жауаптарын қосады.

Студенттердің төртінші функциясы оқытушыдан сәйкес түсініктеме, кеңес алудан тұрады.

## 13. Әдебиеттер тізімі


**Негізгі:**

1. Құдайберген М.Қ., Макина Н.Қ. Дифференциалдық геометрия элементтері: математика мамандығының студенттеріне арналған оқу құралы.-Павлодар: Кереку, 2010.-140б.
2. Краснов М.Л. Вся высшая математика.-М.:УРСС.Т.2.-2004.-187с.

**Қосымша:**

3. Вернер А.Л. Элементы топологии и дифференциальной геометрии.-М.:Просвещение.-2003.-113с.
4. Бакельман И.Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом».-М.:Наука.-2003.-440с.