Титульный лист программы
дисциплины (SYLLABUS)

Ф СО ПГУ 7.18.4/19

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова

Кафедра математики

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (SYLLABUS)

Дифференциальная геометрия и топология

Павлодар, 2013 г.

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ФМиИТ
_________ Н.А.Испулов
"___" __________20__г.

Составитель: ________ ст. преподаватель Кудайберген М.К.

Программа дисциплины (SYLLABUS)

DGT 2203 Дифференциальная геометрия и топология

для студентов очной формы обучения специальности 5В060100 «Математика»

Программа разработана на основании рабочей учебной программы, утвержденной ____ __________20__ г.

Рекомендована на заседании кафедры от «__» _______ 20___ г.
Протокол № ___

Заведующий кафедрой ___________ Г.С. Джарасова

Одобрена учебно - методическим советом факультета физики, математики и информационных технологий «__»____20__г. Протокол №____

Председатель УМС _____________ А.Б. Искакова «__»____20__г.

1.Паспорт учебной дисциплины

Наименование дисциплины Дифференциальная геометрия и топология
Дисциплина вузовского компонента
Количество кредитов и сроки изучения
Всего – 4 кредита
Курс: 2
Семестр: 4
Всего аудиторных занятий – 60 часов
Лекции – 30 часов
Практические/семинарские занятия – 30 часов
СРС – 120 часов
В том числе СРСП – 30 часов
Общая трудоемкость – 180 часов
Форма контроля
Экзамен – 4 семестр
Пререквизиты

Для освоения данной дисциплины необходимы знания, умения и навыки приобретенные при изучении следующих дисциплин:

– Математический анализ;
– Аналитическая геометрия;
– Некоторые разделы линейной алгебры.

Постреквизиты

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины необходимы для освоения следующих дисциплин:

- риманова геометрия;
- теория относительности.

2 Сведения о преподавателях и контактная информация

Кудайберген Маржан Кудайбергеновна
Старший преподаватель кафедры
Кафедра «Математика», аудитория А 410
E-mail: k.marzhan_k@mail.ru

3. Предмет, цели и задачи

Предмет дисциплины предполагает изучение следующих разделов: теория кривых, теория поверхностей, элементы топологии.

Цель дисциплины - опираясь на методы и наглядные образы классической дифференциальной геометрии, ввести студентов в область основных понятий и идей современной дифференциальной геометрии. Программа включает в себя как теорию кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, так и основные понятия топологии.

Задачи дисциплины

- полное раскрытие основных понятий дисциплины и осмысленное усвоение их студентами;
-развитие у студентов образного мышления и геометрической интуиции.

4.Требования к знаниям, умениям, навыкам и компетенциям

В результате изучения данной дисциплины студенты должны:
иметь представление:
- фундаментальных понятиях, законах;
- о применении абстрактных понятий, положений для конкретных практических задач;
знать:

– современный подход к определению основных понятий теории кривых и поверхностей;

– основные теоремы и формулы дифференциальной геометрии;

– определения основных понятий и теоремы начальных разделов топологии.

уметь:

– применять основные теоремы и формулы классической дифференциальной геометрии в решении задач;

– овладеть методами дифференциальной геометрии;

приобрести практические навыки:

с дифференциально-геометрическими объектами и иметь представление о их применении в геометрии и теории интегрирования.

быть компетентным:

- в вопросах дифференциальной геометрии;

- в вопросах топологии.

5.Тематический план изучения дисциплины

Распределение академических часов по видам занятий

№ п/п	**Наименование тем**	**Количество аудиторных часов по видам занятий**		**СРС**	
		лекции	**практические (семинарские)**	**всего**	**В том числе СРСП**
1	Теория кривых	12	12	48	10
2	Теория поверхностей	12	12	48	10
3	Элементы топологии	6	6	24	10
	Всего: 180 (4 кредита)	30	30	120	30

6. Содержание лекционных занятий

Тема 1 Теория кривых

План:

Векторные функции.

Определение кривой в дифференциальной геометрии. Способы задания. Особые точки кривой.

Длина дуги и натуральная параметризация.

Касательная прямая, соприкасающаяся плоскость и нормали кривой.

Сопровождающий трехгранник кривой, кривизна и кручение, формулы Френе.

Натуральные уравнения кривой.

Кривые с общими натуральными уравнениями.

Определение. Если каждому значению параметра t из некоторого промежутка отвечает определенный вектор r (зависящий от t), то вектор r называется векторной функцией (кратко вектор-функция) от скалярного аргумента t и в этом случае пишут:

$$r = r(t). \tag{1.1}$$

При изменении аргумента t вектор $r(t)$ изменяется как по величине, так и по направлению. В дальнейшем будем предполагать, что t изменяется в промежутке, конечном или бесконечном.

Будем считать, что вектор $r(t)$ исходит из начала координат, т.е. r – радиус-вектор некоторой точки M. В этом случае при изменении параметра t конец вектора $r(t)$ опишет линию L, называемую годографом векторной функции $r(t)$. При этом начало координат называют полюсом годографа. Уравнение (1.1) называют векторным уравнением кривой L (рис. 1.1).

Если у вектора $r(t)$ меняется только модуль, то годографом его будет луч, исходящий из полюса. Если модуль вектора $r(t)$ постоянен и меняется только его направление, то годограф есть линия, лежащая на сфере с центром в полюсе и радиусом, равным модулю вектора $r(t)$.

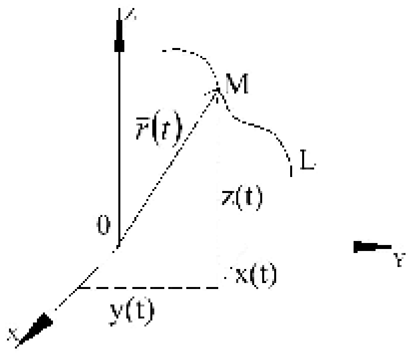


Рис. 1.1

Если через x, y, z обозначить проекции вектора $r(t)$ на оси прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, то эти величины для каждого значения параметра t в свою очередь принимают определенные числовые значения и поэтому являются скалярными функциями скалярного аргумента t:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. (1.2)

Говорят, что вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет предел $\mathbf{r_0}$ в точке $t = t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r_0}| = 0$ (здесь и далее $|\mathbf{v}|$ обозначают модуль вектора $\mathbf{v}$). Предел вектор-функции имеет обычные свойства:

- Предел суммы вектор-функций равен сумме пределов слагаемых (в предположении, что они существуют).
- Предел скалярного произведения вектор-функций равен скалярному произведению пределов сомножителей.
- Предел векторного произведения вектор-функций равен векторному произведению пределов сомножителей.

Непрерывность вектор-функции определяется традиционно.

Производная вектор-функции по параметру

Определим производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ по параметру:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Если производная в точке t существует, вектор-функция называется дифференцируемой в этой точке. Координатными функциями для производной будут $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$.

Свойства производной вектор-функции (всюду предполагается, что производные существуют):

- $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r_1}(t)+\mathbf{r_2}(t))=\dfrac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}+\dfrac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}$ — производная суммы есть сумма производных
- $\dfrac{d}{dt}(f(t)\mathbf{r}(t))=\dfrac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t)+f(t)\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ — здесь *f(t)* — дифференцируемая скалярная функция.
- $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t))=\dfrac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t)+\mathbf{r_1}(t)\dfrac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}$ — дифференцирование скалярного произведения.
- $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r_1}(t)\mathbf{r_2}(t)]=\left[\dfrac{d\mathbf{r_1}(t)}{dt}\mathbf{r_2}(t)\right]+\left[\mathbf{r_1}(t)\dfrac{d\mathbf{r_2}(t)}{dt}\right]$ — дифференцирование векторного произведения.
- $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t))=\left(\dfrac{d\mathbf{a}(t)}{dt},\mathbf{b}(t),\mathbf{c}(t)\right)+\left(\mathbf{a}(t),\dfrac{d\mathbf{b}(t)}{dt},\mathbf{c}(t)\right)+\left(\mathbf{a}(t),\mathbf{b}(t),\dfrac{d\mathbf{c}(t)}{dt}\right)$ — дифференцирование смешанного произведения.

Дифференциальная геометрия кривых — раздел дифференциальной геометрии, который занимается исследованием гладких пространственных и плоских кривых в евклидовом пространстве аналитическими методами.

Способы задания кривой

Наиболее общий способ задать уравнение пространственной кривой — **параметрический**:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (1)$$

где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ — гладкие функции параметра t, причем $(x')^2+(y')^2+(z')^2\ >0$ (условие регулярности).

Часто удобно использовать инвариантную и компактную запись уравнения кривой с помощью вектор-функции:

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, где в левой части стоит радиус-вектор точек кривой, а правая определяет его зависимость от некоторого параметра t. Раскрыв эту запись в координатах, мы получаем формулу (1).

В зависимости от свойств дифференцируемости функций $x(t),\ y(t),\ z(t)$, задающих кривую, говорят о степени гладкости (регулярности) кривой. Кривая называется **регулярной**, если для любой её точки, при подходящем выборе прямоугольной декартовой системы координат $x,\ y,\ z$, она допускает в окрестности этой точки задание уравнениями вида:

$y=y(x),\ z=z(x)$, где $y(x)$ и $z(x)$ — дифференцируемые функции.

Для того чтобы точка кривой, заданной общим уравнением (1), была обыкновенной (не особой точкой), достаточно, чтобы в этой точке выполнялось вышеуказанное неравенство $(x')^2+(y')^2+(z')^2\ >0.$

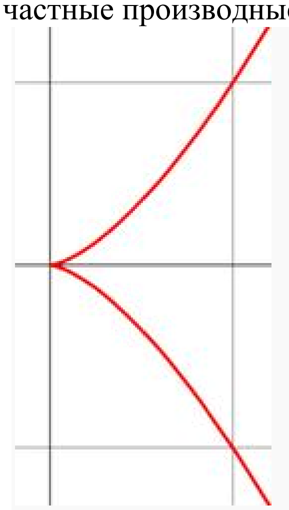
Дифференциальная геометрия рассматривает также **кусочно-гладкие** кривые, которые состоят из гладких участков, разделённых особыми точками. В особых точках определяющие функции либо не удовлетворяют условиям регулярности, либо вообще не дифференцируемы.

Плоские кривые

Важный класс кривых представляют плоские кривые, то есть кривые, лежащие в плоскости. Плоскую кривую также можно задать параметрически, первыми двумя из трёх уравнений (1). Другие способы:

- Явное задание: $y = f(x)$.
- Неявное задание: $F(x,\ y) = 0$.

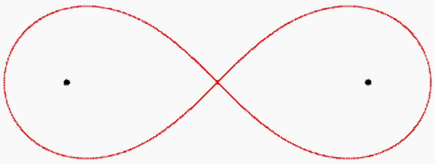
Функции $f,\ F$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. При неявном задании точка кривой будет обыкновенной, если в её окрестности функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $F'_x,\ F'_y$, не равные нулю одновременно.



Полукубическая парабола

Приведём примеры особых точек для плоских кривых.

- Полукубическая парабола: $x = t^2; \quad y = at^3$. Обе производные равны нулю в начале координат. Это особая точка (точка возврата первого рода), в ней вектор касательной скачкообразно меняет направление на противоположное.
- Уравнение $(x-1)(x^2+y^2) = 0$ определяет кривую, состоящую из прямой $x = 1$ и изолированной особой точки в начале координат.



Лемниската Бернулли

- Лемниската Бернулли — особая точка при самопересечении. В особой точке функция дифференцируема, однако условие регулярности нарушено.

Длина дуги кривой

Длина кривой

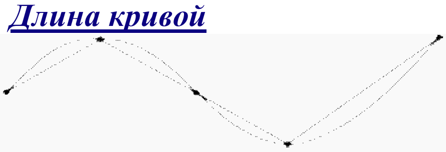


Рис. 3. Полигональное приближение кривой

Для измерения длины участка (дуги) произвольной кривой эта кривая заменяется ломаной, содержащей точки кривой как точки излома, и максимум длин всех таких ломаных принимается за длину кривой (рис. 3). В инвариантном виде формула для вычисления длины дуги (*спрямления кривой*) имеет вид:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

То же в декартовых координатах:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

В полярных координатах для плоской кривой:

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Параметризация

Кривая допускает бесчисленное множество различных способов параметрического задания уравнениями вида (1). Среди них особое значение имеет так называемая естественная параметризация, когда параметром служит длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

Среди преимуществ такой параметризации:

1. $\mathbf{r}'$ имеет единичную длину и поэтому совпадает с ортом касательной.
2. $\mathbf{r}''$ по длине совпадает с кривизной, а по направлению — с главной нормалью.

Соприкосновение

Ряд основных понятий теории кривых вводится с помощью понятия **соприкосновения множеств**,которое состоит в следующем.

Пусть M и m — два множества с общей точкой O. Говорят, что множество M имеет с m в точке O соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 1$, если $\frac{\delta(X)}{|XO|^\alpha} \to 0$ при $X \to O$, где $\delta(X)$— расстояние точки X множества M от m.

В применении к кривым это означает следующее: две кривые в общей точке имеют степень касания не ниже *k*-го порядка, если их производные в общей точке, до *k*-го порядка включительно, совпадают.

Касательная

Касательная прямая

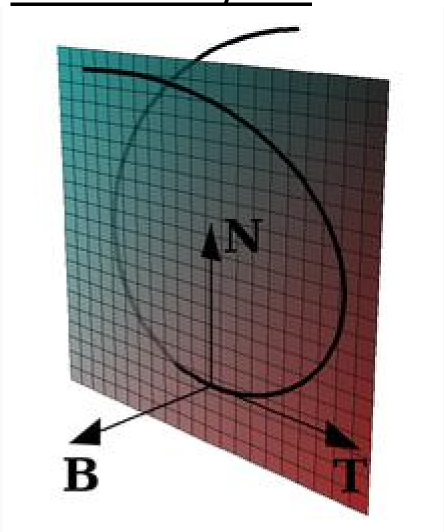


Рис. 1. В точке кривой построены векторы касательной (T), главной нормали (N) и бинормали (B). Показана также соприкасающаяся плоскость, содержащая касательную и главную нормаль.

Если в качестве M взять кривую, а в качестве m прямую, проходящую через точку O кривой, то при $\alpha \geqslant 1$ условие соприкосновения определяет касательную к кривой в точке O (рис. 1). Касательная в точке P кривой также может быть определена как предельное положение секущей, проходящей через P и близкую к ней точку P_1, когда P_1 стремится к P.

Гладкая регулярная кривая в каждой точке имеет определённую касательную. Направление касательной в точке t_0 кривой, задаваемой уравнениями (1), совпадает с направлением вектора $\{x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\}$.

В векторной записи это производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0)$.

В дифференциальной геометрии выводятся уравнения касательной для различных способов аналитического задания кривой. В частности, для кривой, задаваемой уравнениями (1), уравнения касательной в точке, отвечающей значению параметра t_0, будут

$$\frac{X-x_0}{x_0'}=\frac{Y-y_0}{y_0'}=\frac{Z-z_0}{z_0'}$$

, где индекс 0 указывает на значение функций x, y, z и их производных в точке t_0.

Для плоской кривой уравнение касательной в точке $(x_0,\ y_0)$ имеет следующий вид.

- Параметрическое задание: $$Y=y_0+\frac{y_0'}{x_0'}(X-x_0)$$
- Явное задание: $Y=y_0+f_0'(X-x_0)$
- Неявное задание: $$Y=y_0-\frac{(F_x')_0}{(F_y')_0}(X-x_0)$$

Соприкасающаяся плоскость и нормали

Если взять в качестве m плоскость, проходящую через точку O кривой M, то условие соприкосновения при $\alpha \geqslant 2$ определяет **соприкасающуюся плоскость** кривой (рис. 1). Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке имеет соприкасающуюся плоскость. Она либо единственная, либо любая плоскость, проходящая через касательную кривой, является соприкасающейся.

Пусть $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ — уравнение кривой. Тогда уравнение $\mathbf{R}=\mathbf{R}(X,Y,Z)$ её соприкасающейся плоскости определяется из соотношения:

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{r}'')=0$$

В координатах оно имеет вид:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$$

Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания, называется *нормалью к кривой*.

Плоскость, перпендикулярная касательной в данной точке кривой, называется **нормальной плоскостью**; все нормали для данной точки лежат в нормальной плоскости.

Нормаль, лежащую в соприкасающейся плоскости, называют **главной нормалью**, а нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**. Также нормалью и бинормалью для краткости могут называть единичные векторы вдоль этих прямых (при этом направление вектора главной нормали обычно выбирают совпадающим с направлением вектора кривизны кривой[1]).

\Векторное уравнение бинормали в точке, отвечающей значению t_0 параметра t, имеет вид:

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = \boldsymbol{r}(t_0) + \lambda[\boldsymbol{r}'(t_0),\ \boldsymbol{r}''(t_0)].$$

Направление главной нормали может быть получено как двойное векторное произведение: $[\mathbf{r}'\ [\mathbf{r}'\ \mathbf{r}'']]$.

Для плоской кривой содержащая её плоскость совпадает с соприкасающейся. Нормаль, с точностью до знака, только одна — главная, и её уравнение в точке $(x_0,\ y_0)$ имеет следующий вид.

- Параметрическое задание: $$Y = y_0 - \frac{x'_0}{y'_0}(X - x_0)$$
- Явное задание: $$Y = y_0 - \frac{X - x_0}{f'_0}$$
- Неявное задание: $$Y = y_0 + \frac{(F'_y)_0}{(F'_x)_0}(X - x_0)$$

Соприкасающаяся окружность

Рис. 2. Соприкасающаяся окружность в точке кривой

Окружность, **соприкасающаяся** с кривой в заданной точке P, имеет с кривой соприкосновение порядка $\alpha \geqslant 2$ (рис. 2). Она существует в каждой точке дважды дифференцируемой кривой с отличной от нуля кривизной (см. ниже) и является также пределом окружности, проходящей через P и две близкие к ней точки $P_1,\ P_2$, когда $P_1,\ P_2$ стремятся к P.

Центр соприкасающейся окружности называют **центром кривизны**, а радиус — **радиусом кривизны**. Радиус кривизны является величиной, обратной кривизне (см. ниже).

Центр соприкасающейся окружности всегда лежит на главной нормали; отсюда следует, что эта нормаль всегда направлена в сторону *вогнутости* кривой.

Геометрическое место центров кривизны кривой называется эволютой.

Кривая, ортогонально пересекающая касательные кривой, называется эвольвентой. Построение эволюты и эвольвенты — взаимно обратные операции, то есть для эвольвенты данной кривой эволютой является сама кривая.

Кривизна

При движении вдоль кривой её касательная меняет направление. Скорость этого вращения (отношение угла поворота касательной за бесконечно малый промежуток времени к этому промежутку) при равномерном, с единичной скоростью, движении вдоль кривой называется *кривизной* кривой. Производная же по времени положительного единичного вектора касательной называется в этом случае *вектором кривизны кривой*. То и другое - функции точки кривой. Кривизна есть абсолютная величина вектора кривизны.

В случае произвольного параметрического задания кривой[2] кривизна кривой в трехмерном пространстве определяется по формуле

$$k_1 = \frac{|[\mathbf{r}'(t),\ \mathbf{r}''(t)]|}{|\mathbf{r}'(t)|^3},$$

где $\mathbf{r}(t)$ — вектор-функция с координатами $x(t),\ y(t),\ z(t)$.

В координатах:

$$k_1 = \frac{\sqrt{(z''y' - y''z')^2 + (x''z' - z''x')^2 + (y''x' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

Для кривой в более многомерном пространстве можно заменить векторное произведение, обозначенное здесь квадратными скобками, на внешнее произведение.

Также для кривой в пространстве любой размерности можно воспользоваться формулой вектора кривизны:

$$\mathbf{k} = \frac{d\tau}{dl}$$

и фактом, что кривизна есть его модуль, а также выражением для единичного вектора касательной

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{r'}{|r'|}$$

и

$$dl = |\mathbf{r}'|dt,$$

и получить для кривизны формулу:

$$k = \left|\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{r}'|}\left(\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}\right)'\right|,$$

или, раскрыв скобки:

$$k = \left|\frac{\mathbf{r}''}{(\mathbf{r}')^2} - \mathbf{r}'\frac{(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')}{(\mathbf{r}')^4}\right|.$$

Прямые и только прямые имеют всюду равную нулю кривизну. Поэтому кривизна наглядно показывает, насколько (в данной точке) кривая отличается от прямой линии: чем ближе кривизна к нулю, тем это отличие меньше. Кривизна окружности радиуса R равна 1/R.

Дважды дифференцируемая кривая в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, имеет единственную соприкасающуюся плоскость.

Для плоских кривых можно различать направление вращения касательной при движении вдоль кривой, поэтому кривизне можно приписывать знак в зависимости от направления этого вращения. Кривизна плоской кривой, задаваемой уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, определяется по формуле

$$k = \pm\frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Знак $+$ или $-$ берётся по соглашению, но сохраняется вдоль всей кривой.

Кручение

При движении вдоль кривой в окрестности заданной точки соприкасающаяся плоскость вращается, причём касательная к кривой является мгновенной осью этого вращения. Скорость вращения соприкасающейся плоскости при равномерном, с единичной скоростью, движении называется **кручением**. Направление вращения определяет знак кручения.

Трижды дифференцируемая кривая в каждой точке с отличной от нуля кривизной имеет определённое кручение. В случае параметрического задания кривой уравнениями (1) кручение кривой определяется по формуле

$$k_2 = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'']|^2},$$

здесь $(*,*,*)$ обозначает смешанное произведение. В координатах для натуральной параметризации:

$$k_2=\frac{x'''(y'z''-y''z')+y'''(x''z'-x'z'')+z'''(x'y''-x''y')}{(y'z''-y''z')^2+(x''z'-x'z'')^2+(x'y''-x''y')^2}=\frac{x'''(y'z''-y''z')+y'''(x''z'-x'z'')+z'''(x'y''-x''y')}{(y'z''-y''z')^2+(x''z'-x'z'')^2+(x'y''-x''y')^2}.$$

Для прямой кручение не определено, поскольку неоднозначно определяется соприкасающаяся плоскость. Плоская кривая в каждой точке имеет кручение, равное нулю. Обратно, кривая с тождественно равным нулю кручением — плоская.

Формулы Френе

касательная главная нормаль бинормаль

Рис. 4. Трёхгранник Френе для винтовой линии.

Фигура, составленная из касательной, главной нормали и бинормали, а также из трех плоскостей, попарно содержащих эти прямые, называют*естественным трёхгранником* (*трёхгранником Френе*, см. рис. 4). Соприкасающаяся и нормальная плоскости уже упоминались; третья плоскость, содержащая касательную и бинормаль, называется **спрямляющей**.

Если рёбра естественного трёхгранника в данной точке кривой принять за оси прямоугольной декартовой системы координат, то уравнение кривой в естественной параметризации раскладывается в окрестности этой точки в ряд по координате вдоль кривой:

$$x=s+\dots,y=\frac{k_1}{2}s^2+\dots,z=-\frac{k_1k_2}{6}s^3+\dots..,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой в указанной точке.

Единичные векторы $\vec{t},\ \vec{n},\ \vec{b}$, соответственно для касательной, главной нормали и бинормали кривой, при движении вдоль кривой изменяются. При соответствующем выборе направления этих векторов из определения кривизны и кручения получаются формулы:

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=k_1\vec{n}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=-k_1\vec{t}+k_2\vec{b}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds}=-k_2\vec{n}$$

где дифференцирование идёт по дуге кривой. Формулы (2) называют *формулами Френé*, или *Френе-Серре*.

Кинематическое истолкование

Будем рассматривать длину дуги заданной кривой как время, а трёхгранник Френе — как твёрдое тело, движущееся вдоль кривой. Тогда это движение в каждый момент времени состоит из поступательного (вдоль касательной) и мгновенного вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (вектор Дарбу). Из формул Френе вытекает:

$$\vec{\omega}=k_1\ \vec{b}+k_2\ \vec{t}$$

Это означает, что вектор мгновенного вращения лежит в спрямляющей плоскости и распадается на 2 составляющие: вращение вокруг бинормали со скоростью k_1 (поворот) и вращение вокруг касательной со скоростью k_2 (кручение).

Натуральные уравнения кривой

Кривая с отличной от нуля кривизной полностью определяется (с точностью до положения в пространстве) заданием её кривизны и кручения как функций дуги s кривой. В связи с этим систему уравнения

$$k_1 = k_1(s), \quad k_2 = k_2(s)$$

называют *натуральными уравнениями кривой*.

Пример

Рассмотрим винтовую линию (рис. 4), заданную уравнениями:

$$x(t) = a \ \cos t$$
$$y(t) = a \ \sin t$$
$$z(t) = b \ t$$

По вышеприведенным формулам получаем:

$$k_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}$$
$$k_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Таким образом, кривизна и кручение винтовой линии постоянны. Поскольку натуральные уравнения однозначно определяют форму кривой, других кривых с постоянными кривизной и кручением не существует. Предельными случаями винтовой линии являются окружность (она получается при $b = 0$) и прямая ($a = 0$).

Тема 2 Теория поверхностей

План:

1. Определение поверхности в дифференциальной геометрии. Способы задания. Кривые на поверхности. Касательная плоскость и нормаль.
2. Первая квадратичная форма и длина кривой, угол между кривыми, площадь области на поверхности. Понятие о внутренней геометрии и изгибании поверхности.
3. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна в заданном на поверхности направлении. Теорема Мёнье. Индикатриса Дюпена. Формула Родрига. Главные кривизны и главные направления. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизна. Соприкасающийся параболоид и типы точек регулярной поверхности. Сферическое отображение поверхности и гауссова кривизна.
4. Линии кривизны. Асимптотические линии. Элементы теории сетей на поверхностях. Чебышевские сети.
5. Деривационные формулы поверхности. Формула Гаусса и теорема о принадлежности полной кривизны внутренней геометрии поверхности. Уравнения Петерсона-Кодации. Теорема о существовании поверхности с заданными квадратичными формами (теорема Бонне).
6. Геодезическая кривизна кривой на поверхности, геодезические линии, их экстремальное свойство и механическая интерпретация.
7. Ковариантный дифференциал и параллельный перенос вектора вдоль кривой на поверхности.
8. Поверхности постоянной гауссовой кривизны.
9. Метрика евклидова пространства в криволинейных координатах. Метрика псевдоевклидова пространства (пространства Минковского). Движения в пространстве Минковского. Риманова метрика на поверхности. Метрика плоскости Лобачевского. Модель Клейна плоскости Лобачевского.

Дифференциальная геометрия поверхностей — раздел математики, изучающий поверхности методами дифференциальной геометрии. При этом исследуемые поверхности обычно подчинены условиям, связанным с возможностью применения методов дифференциального исчисления. Как правило, это — условия *гладкости* поверхности, то есть существования в каждой точке поверхности определённойкасательной плоскости, кривизны и т. д. Эти требования сводятся к тому, что функции, задающие поверхность, предполагаются однократно, дважды, трижды, а в некоторых вопросах — неограниченное число раз дифференцируемыми или даже аналитическими функциями. При этом дополнительно накладывается условие регулярности.

Пове́рхность — традиционное название для двумерного многообразия в пространстве.

Способы задания

Поверхность определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют определённому виду уравнений:

$$F(x,\, y,\, z) = 0 \qquad (1)$$

Если функция $F(x,\, y,\, z)$ непрерывна в некоторой точке и имеет в ней непрерывные частные производные, по крайней мере одна из которых не обращается в нуль, то в окрестности этой точки поверхность, заданная уравнением (1), будет *правильной поверхностью*.

Помимо указанного выше *неявного способа задания* поверхность может быть определена *явно*, если одну из переменных, например z, можно выразить через остальные:

$$z = f(x,y) \qquad (1')$$

Также существует параметрический способ задания. В этом случае поверхность определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x &=& x(u,v) \\ y &=& y(u,v) \qquad (\mathbf{1''}) \\ z &=& z(u,v) \end{cases}$$

Понятие о простой поверхности

Интуитивно простую поверхность можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям).

Более строго, ***простой поверхностью*** называется образ гомеоморфного отображения (то есть взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности единичного квадрата. Этому определению можно дать аналитическое выражение.

Пусть на плоскости с прямоугольной системой координат u и v задан квадрат, координаты внутренних точек которого удовлетворяют неравенствам $0 < u < 1$, $0 < v < 1$. Гомеоморфный образ квадрата в пространстве с прямоугольной системой координат x, y, z задаётся при помощи формул $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (параметрическое задание поверхности). При этом от функций x(u, v), y(u, v) и z(u, v) требуется, чтобы они были непрерывными и чтобы для различных точек (u, v) и (u', v') были различными соответствующие точки (x, y, z) и (x', y', z').

Примером *простой поверхности* является полусфера. Вся же сфера не является *простой поверхностью*. Это вызывает необходимость дальнейшего обобщения понятия поверхности.

Подмножество пространства, у каждой точки которого есть окрестность, являющаяся *простой поверхностью*, называется ***правильной поверхностью***.

Поверхность в дифференциальной геометрии

В дифференциальной геометрии исследуемые поверхности обычно подчинены условиям, связанным с возможностью применения методов дифференциального исчисления. Как правило, это — условия *гладкости* поверхности, то есть существования в каждой точке поверхности определённой касательной плоскости, кривизны и т. д. Эти требования сводятся к тому, что функции, задающие поверхность, предполагаются однократно, дважды, трижды, а в некоторых вопросах — неограниченное число раз дифференцируемыми или даже аналитическими функциями. При этом дополнительно накладывается условие регулярности.

Случай неявного задания.

Поверхность, заданная уравнением $F(x,\, y,\, z) = 0,\ F : \Omega \to \mathbb{R}^3$, является *гладкой регулярной поверхностью,* если $\exists P_0(x_0,\, y_0,\, z_0) \,:\, F(x_0,\, y_0,\, z_0) = 0$, функция F непрерывно дифференцируема в своей области определения Ω, а её частные производные одновременно не обращаются в нуль (условие правильности) на всём множестве Ω:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0$$

Случай параметрического задания.

Зададим поверхность векторным уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v)$, или, что то же самое, тремя уравнениями в координатах:

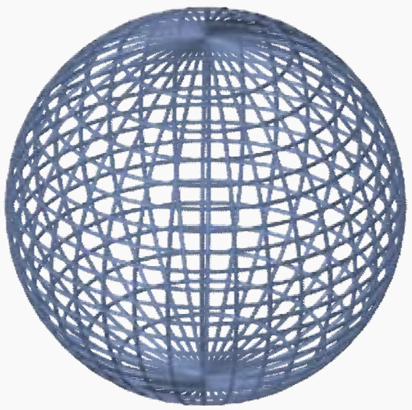
$$\begin{cases} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \qquad (u,\, v) \in \Omega \\ z &= z(u,v) \end{cases}$$

Эта система уравнений задаёт *гладкую регулярную поверхность*, если выполнены условия:

- система устанавливает взаимно однозначное соответствие между образом и прообразом Ω;
- функции $x(u,v)\,,\, y(u,v),\ z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в Ω;
- выполнено условие невырожденности:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}^2 > 0$$

Геометрически последнее условие означает, что векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ нигде не параллельны.



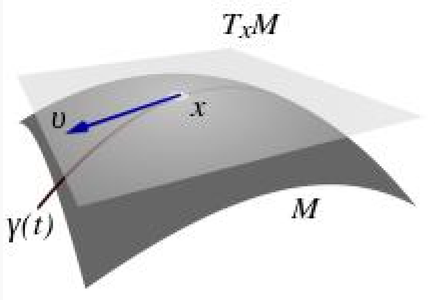
Координатная сетка на сфере

Параметры *u*, *v* можно рассматривать как внутренние координаты точек поверхности. Фиксируя одну из координат, мы получаем два семейства **координатных кривых**, покрывающих поверхность координатной сеткой.

Случай явного задания.

Поверхность S может быть определена как график функции $z = f(x,y)$; тогда S является *гладкой регулярной поверхностью,* если функция f дифференцируема. Этот вариант можно рассматривать как частный случай параметрического задания: $x = u;\ \ y = v;\ \ z = f(u,v)$.

Касательная плоскость



Касательная плоскость в точке поверхности.

Касательная плоскость в точке гладкой поверхности — это плоскость, имеющая максимальный порядок соприкосновения с поверхностью в этой точке. Эквивалентный вариант определения: касательная плоскость есть плоскость, содержащая касательные ко всем гладким кривым, проходящим через эту точку.

Пусть гладкая кривая на параметрически заданной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v)$ задана в виде: $u = u(t);\ v = v(t)$.

Направление $\mathbf{v}$ касательной к такой кривой даёт вектор:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Отсюда видно, что все касательные ко всем кривым в данной точке лежат в одной плоскости, содержащей векторы $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, которые мы выше предположили независимыми.

Уравнение касательной плоскости в точке $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0$$

(смешанное произведение векторов).

В координатах уравнения касательной плоскости для разных способов задания поверхности приведены в таблице:

	касательная плоскость к поверхности в точке (x_0, y_0, z_0)
неявное задание	$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$
явное задание	$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = (z - z_0)$
параметрическое задание	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$

Все производные берутся в точке (x_0, y_0, z_0).

Метрика и внутренняя геометрия

Вновь рассмотрим гладкую кривую:

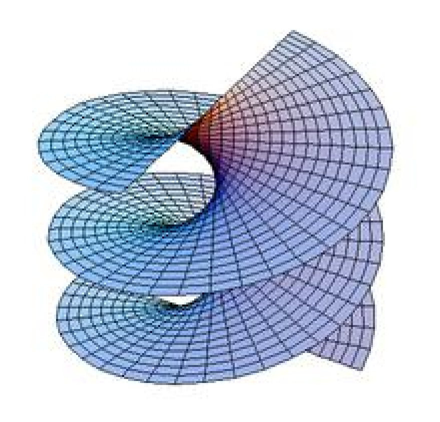
$u = u(t);\ v = v(t)$.

Элемент её длины определяется из соотношения:

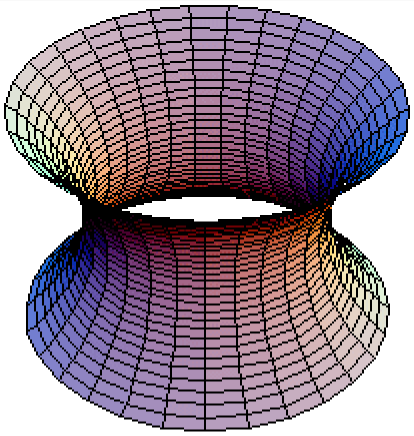
$$ds^2 = |d\mathbf{r}|^2 = (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv)^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где $E = \mathbf{r'_u}\mathbf{r'_u};\ \ F = \mathbf{r'_u}\mathbf{r'_v};\ \ G = \mathbf{r'_v}\mathbf{r'_v}$.

Эта квадратичная форма называется *первой квадратичной формой* и представляет собой двумерный вариант метрики поверхности. Для регулярной поверхности её дискриминант $EG - F^2 > 0$ во всех точках. Коэффициент $F = 0$ в точке поверхности тогда и только тогда, когда в этой точке координатные кривые ортогональны. В частности, на плоскости с декартовыми координатами $u,\ v$ получается метрика $ds^2 = du^2 + dv^2$ (теорема Пифагора).



Геликоид

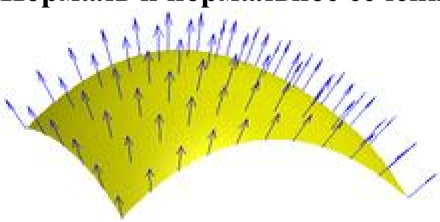


Катеноид

Метрика не определяет однозначно форму поверхности. Например, метрики геликоида и катеноида, параметризованных соответствующим образом, совпадают, то есть между их областями существует соответствие, сохраняющее все длины (изометрия). Свойства, сохраняющиеся при изометрических преобразованиях, называются **внутренней геометрией** поверхности. Внутренняя геометрия не зависит от положения поверхности в пространстве и не меняется при её изгибании без растяжения и сжатия (например, при изгибании цилиндра в конус).

Метрические коэффициенты $E,\ F,\ G$ определяют не только длины всех кривых, но и вообще результаты всех измерений внутри поверхности (углы, площади, кривизна и др.). Поэтому всё, что зависит только от метрики, относится к внутренней геометрии.

Нормаль и нормальное сечение



Векторы нормали в точках поверхности

Одной из основных характеристик поверхности является её *нормаль* — единичный вектор, перпендикулярный касательной плоскости в заданной точке:

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}]}{|[\mathbf{r}'_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}'_{\mathbf{v}}]|}.$$

Знак нормали зависит от выбора координат.

Сечение поверхности плоскостью, содержащей нормаль (в данной точке), образует некоторую кривую на поверхности, которая называется **нормальным сечением** поверхности. Главная нормаль для нормального сечения совпадает с нормалью к поверхности (с точностью до знака).

Если же кривая на поверхности не является нормальным сечением, то её главная нормаль образует с нормалью поверхности некоторый угол θ. Тогда кривизна k кривой связана с кривизной k_n нормального сечения (с той же касательной) формулой Мёнье:

$$k_n = \pm k\,\cos\theta$$

Координаты орта нормали для разных способов задания поверхности приведены в таблице:

	Координаты нормали в точке поверхности
неявное задание	$\dfrac{\left(\frac{\partial F}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$
явное задание	$\dfrac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x};\ -\frac{\partial f}{\partial y};\ 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}}$
параметрическое задание	$\dfrac{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)};\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)};\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}}$

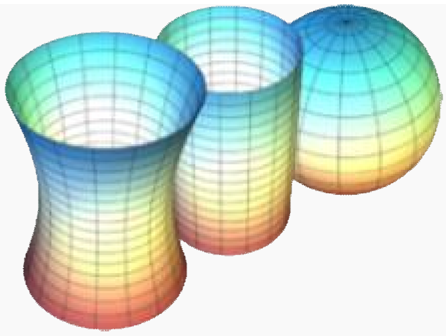
Здесь $\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix},\quad \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix},\quad \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$

Все производные берутся в точке (x_0, y_0, z_0).

Кривизна

Для разных направлений в заданной точке поверхности получается разная кривизна нормального сечения, которая называется **нормальной кривизной**; ей приписывается знак плюс, если главная нормаль кривой идёт в том же направлении, что и нормаль к поверхности, или минус, если направления нормалей противоположны.

Вообще говоря, в каждой точке поверхности существуют два перпендикулярных направления e_1 и e_2, в которых нормальная кривизна принимает минимальное и максимальное значения; эти направления называются *главными*. Исключение составляет случай, когда нормальная кривизна по всем направлениям одинакова (например, у сферы или на торце эллипсоида вращения), тогда все направления в точке — главные.



Поверхности с отрицательной (слева), нулевой (в центре) и положительной (справа) кривизной.

Нормальные кривизны в главных направлениях называются **главными кривизнами**; обозначим их κ_1 и κ_2.

Величина: $K = \kappa_1 \kappa_2$ называется гауссовой кривизной, полной кривизной или просто кривизной поверхности.

Встречается также термин **скаляр кривизны**, который подразумевает результат свёртки тензора кривизны; при этом скаляр кривизны вдвое больше, чем гауссова кривизна.

Гауссова кривизна может быть вычислена через метрику, и поэтому она является объектом внутренней геометрии поверхностей (отметим, что главные кривизны к внутренней геометрии не относятся). По знаку кривизны можно классифицировать точки поверхности (см. рисунок).

Кривизна плоскости равна нулю. Кривизна сферы радиуса R всюду равна $\frac{1}{R^2}$. Существует и поверхность постоянной отрицательной кривизны — псевдосфера.

Геодезические линии, геодезическая кривизна

Кривая на поверхности называется **геодезической линией**, или просто **геодезической**, если во всех её точках главная нормаль к кривой совпадает с нормалью к поверхности. Пример: на плоскости геодезическими будут прямые и отрезки прямых, на сфере — большие круги и их отрезки.

Эквивалентное определение: у геодезической линии проекция её главной нормали на касательную плоскость есть нулевой вектор. Если кривая не является геодезической, то указанная проекция ненулевая; её длина называется **геодезической кривизной** k_g кривой на поверхности.

Имеет место соотношение: $k^2 = k_g^2 + k_n^2$,

где k — кривизна данной кривой, k_n — кривизна её нормального сечения с той же касательной.

Геодезические линии относятся к внутренней геометрии.

Перечислим их главные свойства.

- Через данную точку поверхности в заданном направлении проходит одна и только одна геодезическая.
- На достаточно малом участке поверхности две точки всегда можно соединить геодезической, и притом только одной. Пояснение: на сфере противоположные полюса соединяет бесконечное количество меридианов, а две близкие точки можно соединить не только отрезком большого круга, но и его дополнением до полной окружности, так что однозначность соблюдается только в малом.
- Геодезическая является кратчайшей. Более строго: на малом куске поверхности кратчайший путь между заданными точками лежит по геодезической.

Площадь

Ещё один важный атрибут поверхности — её *площадь*, которая вычисляется по формуле:

$$S = \iint |[\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v]| \, \mathrm{d}\, u \, \mathrm{d}\, v$$

Здесь $\mathbf{r}'_u = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}$, $\mathbf{r}'_v = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}$.

Первая квадратичная форма или метрический тензор поверхности — квадратичная форма от дифференциалов координат на поверхности, которая определяет внутреннюю геометрию поверхности в окрестности данной точки. Знание первой квадратичной формы достаточно для вычисления длин дуг, углов между кривыми, площади областей на поверхности.

Пусть поверхность задана уравнением $r = r(u, v)$, где u и v — внутренние координаты на поверхности;
$dr = r_u du + r_v dv$ — дифференциал радиус-вектора r вдоль выбранного направления смещения из точки M в бесконечно близкую точку M'. Квадрат главной липшицевой части приращения длины $|MM'|$ выражается квадратом дифференциала dr:
$$dr^2 = r_u^2 du^2 + 2\langle r_u r_v \rangle du dv + r_v^2 dv^2$$
и называется **первой основной квадратичной формой поверхности**.
Коэффициенты первой квадратичной формы обычно обозначают через
$$E = |r_u|^2, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = |r_v|^2.$$
или в тензорных символах
$$dr^2 = g_{1,1} du^2 + 2g_{1,2} du dv + g_{2,2} dv^2.$$
Тензор $g_{i,j}$ называется основным, или метрическим, тензором поверхности.

- Первая квадратичная форма является положительно определенной формой в обыкновенных точках поверхности: $EG - F^2 > 0$.
- **Вторая квадратичная форма** n-мерной поверхности, вложенной в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, — квадратичная форма, задающая нормальную кривизну. Пусть $\mathbf{n}$ — нормальный вектор в точке P, а $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — локальная карта поверхности в точке P. Тогда вторая квадратичная форма вычисляется по формуле $q_{ij} = (\mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^i \partial x^j})$.
- Нормальная кривизна k_n по направлению $\mathbf{u}$ вычисляется по формуле $\frac{q(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, где g — первая квадратичная форма.

Тема 3 Элементы топологии

План:

Топологическое пространство. Топология метрического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфизм. Замкнутые множества. База топологии. Связность и линейная связность. Хаусдорфовы топологические пространства.

Компактные топологические пространства.

Топологи́ческое простра́нство — множество с дополнительной структурой определённого типа (так называемой топологией); является основным объектом изучения раздела геометрии под названием топология.
Исторически, понятие топологического пространства появилось как обобщение метрического пространства. Топологические пространства естественным образом возникают почти во всех разделах математики.

Пусть дано множество X. Система $\mathcal{T}$ его подмножеств называется *толо́гией* на X, если выполнены следующие условия:

1. Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$, то есть если $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
2. Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих $\mathcal{T}$, принадлежит $\mathcal{T}$, то есть если $U_i \in \mathcal{T} \quad i = 1, \ldots, n$, то $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.
3. $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*. Множества, принадлежащие $\mathcal{T}$, называются *открытыми множествами*.

- Множества, дополнительные к открытым, называются *замкнутыми*.
- Всякое открытое множество, содержащее данную точку называется её *окрестностью*.
- Три аксиомы, определяющие общий класс топологических пространств, часто дополняются теми или иными аксиомами отделимости, в зависимости от которых выделяют различные классы топологических пространств, например, тихоновские пространства, хаусдорфовы пространства, регулярные, вполне регулярные, нормальные пространства и др.
- Кроме этого, на свойства топологических пространств сильно влияет выполнение тех или иных аксиом счетности — первая аксиома счётности, вторая аксиома счётности (пространства со счетной базой топологии), а также сепарабельность пространства. Из наличия счетной базы топологии следует сепарабельность и выполнение первой аксиомы счетности. Кроме того, например, регулярные пространства со счетной базой являются нормальными и более того, метризуемы, то есть их топология может быть задана некоторой метрикой. Для компактных хаусдорфовых пространств наличие счетной базы топологии является необходимым и достаточным условием метризуемости. Для метрических пространств наличие счетной базы топологии и сепарабельность — эквивалентны.
- Связное двоеточие — двуточечное топологическое пространство.
- Вещественная прямая $\mathbb{R}$ является топологическим пространством, если, например, назвать открытыми множествами произвольные (пустые, конечные или бесконечные) объединения конечных или бесконечных интервалов. Множество всех конечных открытых интервалов $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ является базой этой топологии. Это — стандартная топология на прямой. Вообще же на множестве вещественных чисел можно ввести очень разнообразные топологии, например, $\mathbb{R}_{\rightarrow}$, прямая с «топологией стрелки», где открытые множества имеют вид (a, ∞), или топология Зарисского, в которой любое замкнутое множество — это конечное множество точек.
- Вообще, евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ являются топологическими пространствами. Базой их стандартной топологии можно выбрать открытые шары или открытые кубы.
- Обобщая далее, всякое метрическое пространство является топологическим пространством, базу топологии которого составляют открытые шары. Таковы, например, изучаемые вфункциональном анализе бесконечномерные пространства функций.
- Рассмотрим множество $C(X, Y)$ непрерывных отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y. Оно является топологическим пространством относительно следующей топологии, которая называется *компактно-открытой*. Зададим предбазу множествами $C(K, U)$, состоящими из отображений, при которых образ компакта K в X лежит в открытом множестве U в Y.
- Произвольное множество X можно сделать топологическим пространством, если называть открытыми все его подмножества. Такая топология называется дискретной. В ней любые множества являются открытыми. Другой предельный случай — назвать открытыми

минимально возможное количество подмножеств X, а именно, ввести тривиальную топологию — в ней открытыми являются лишь пустое множество и само пространство X.

Задание топологии с помощью базы или предбазы

База топологии

Не всегда удобно перечислять все открытые множества. Часто удобнее указать некоторый меньший набор открытых множеств, который порождает их все. Формализацией этого является понятие базы топологии. Подмножество топологии $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ называется базой топологии, если всякое открытое множество представляется как объединение множеств из $\mathfrak{B}$, то есть

$$\forall U \in \mathcal{T}\ \exists \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{B} : U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Еще более экономный способ задания топологии состоит в задании её предбазы — множества, которое становится базой, если к нему прибавить произвольные конечные пересечения его элементов. Для того, чтобы систему множеств $\mathfrak{P}$ можно было объявить предбазой топологии, необходимо и достаточно, чтобы она покрывала всё множество X.

Наиболее часто предбазы используются для задания топологии, индуцированной на X семейством отображений.

Индуцированная топология

Пусть $f : X \to Y$ — произвольное отображение, множества X в топологическое пространство Y. Индуцированная топология даёт естественный способ введения топологии на X: За открытые множества в X берутся всевозможные прообразы открытых множеств в Y; то есть $U \in X$ открыто, если существует открытое $V \in Y$ такое что $U = f^{-1}V$.

Задание топологии с помощью замкнутых множеств

Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $U = X \setminus F$ — открытое множество. Задать топологию на X системой замкнутых множеств — значит предъявить систему $\mathcal{P}$ подмножеств X со свойствами:

1. Система $\mathcal{P}$ замкнута относительно операции пересечения множеств (в том числе бесконечных семейств):

$$\forall \alpha \in A \quad F_\alpha \in \mathcal{P} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \mathcal{P}$$

2. Система $\mathcal{P}$ замкнута относительно операции объединения множеств (в конечном количестве):

$$F_1,\ F_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{P}$$

3. Множества $X,\ \varnothing$ включены в систему $\mathcal{P}$.

Если система множеств с такими свойствами задана, с помощью операции дополнения строится система $\mathcal{T}$ открытых множеств, задающая топологию на X.

$$\mathcal{T} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{P}\}.$$

Пример. Пусть B — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Спектром кольца B называется множество $X = \operatorname{Spec} B$ всех его простых идеалов. На множестве X топология вводится с помощью системы замкнутых множеств: пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал кольца B (не обязательно простой), тогда ему соответствует множество $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in X : \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$.

Все множества такого вида образуют систему множеств, удовлетворяющую перечисленным аксиомам, так как

$$\bigcap_{\alpha \in A} V(\mathfrak{a}_\alpha) = V\left(\sum_{\alpha \in A} \mathfrak{a}_\alpha\right), \quad V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}), \quad V((0)) = X, \quad V((1)) = \varnothing.$$

Понятие топологии является минимально необходимым для того, чтобы говорить о непрерывных отображениях. Интуитивно непрерывность есть отсутствие разрывов, то есть близкие точки при непрерывном отображении должны переходить в близкие. Оказывается, для определения понятия близости точек можно обойтись без понятия расстояния. Именно это и есть топологическое определение непрерывного отображения.

Отображение топологических пространств $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ называется *непрерывным*, если прообраз всякого открытого множества открыт.

7. Содержание практических занятий

Тема 1. Теория кривых

Векторные функции. Способы задания. Длина дуги и натуральная параметризация. Касательная прямая, соприкасающаяся плоскость и нормали кривой. Сопровождающий трехгранник кривой, кривизна и кручение, формулы Френе. Натуральные уравнения кривой. **Литература: [3], 8-54стр., [1], 27-52стр.**

1. Доказать, что годограф линейной функции $\bar{u} = \bar{a}t + \bar{b}$ есть прямая.
2. Доказать, что годограф функции $\bar{u} = \bar{a}\cos t + \bar{b}\sin t + \bar{c}$ есть эллипс, расположенный в плоскости, проходящей через точку $\bar{r}_0 = \bar{c}$ и содержащей векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если эти векторы неколлинеарны между собой.
3. Доказать, что если в предыдущем примере $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то годограф будет отрезком прямой.
4. Доказать, что годограф функции $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}t + \bar{c}t^2$ есть парабола ($\bar{b}$ и $\bar{c}$ неколлинеарны).
5. Составить параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, приняв за параметр угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку кривой.
6. Найти касательную в особой точке кривой $x = t^2;\ y = \dfrac{t^3}{3};\ z = \dfrac{t^4}{12}$. Ответ: Ось Ох.
7. Составьте уравнения касательной и нормали к следующим линиям и кривым: 1) $y = x^2 + 4x + 3$ в точках A, B, C с абсциссами: 1, 0, 1; 2) $y = x^3$ в точках A, B с абсциссами 0 и 1.
8. В какой точке касательная к параболе $y = x^2$ образует с осью Ох угол 45^0?
9. Вычислите длину дуги между двумя произвольными точками M_1 и M_2 следующих кривых: 1) $y = x^{3/2}$; 2) $y = \ln x$; 3) $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.
10. Вычислите длину дуги между указанными точками следующих кривых: 1) $y = \ln\cos x,\ x_1 = 0,\ x_2 = p/3$; 2) $x = 8at^3,\ y = 3a(2t^2 - t^4),\ t_1 = 0,\ t_2 = \sqrt{2}$.
11. Найдите натуральную параметризацию окружности.
12. Найдите кривизну кривой $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.
13. Составьте уравнение и начертите эволюту кривой $y = \ln x$.
14. Составьте уравнение касательной к кривой в указанной точке $x = \sec t,\ y = tgt,\ z = at$ при $t = p/4$.
15. Задана кривая $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$. Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t = 1$. Какая линия получается в пересечении касательных с плоскостью хОу?
16. Напишите уравнение соприкасающейся плоскости кривой $x = a\cos t,\ y = \sin t,\ z = e^t$ в точке $t = 0$.
17. Составьте уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z == bt$. Докажите, что главная нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол. Найдите векторы репера Френе.
18. Докажите, что для следующей кривой кривизна и кручение равны: $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$.

Тема 2. Теория поверхностей

Различные способы задания поверхности. Касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная

форма, длина кривой, угол между кривыми и площадь области на поверхности. Вторая квадратичная форма. Главные кривизны и главные направления. Полная и средняя кривизна. Геодезические линии.
Литература: [7], 68-114стр.

1. Напищите уравнение тора, который получается при вращении окружности $x = a + b\cos u,\ y = 0,\ z = b\sin u \quad (b < a)$ вокруг оси Oz.

2. Напишите параметрические уравнения гиперболического и параболического цилиндров.

3. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$ в точке $M(u = 2,\ v = 1)$.

4. Найдите первую квадратичную форму следующих поверхностей вращения: 1) $x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = c\sin u$ - эллипсоид вращения; 2) $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ - парабалоид вращения.

5. Дана поверхность $x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = uv \quad (|u| + |v| \neq 0)$. 1) найдите первую квадратичную форму; 2) вычислите дифференциал длины дуги для линий $u = 2,\ v = 1,\ v = au$; 3) вычислите длину дуги линии $v = au$ между точками ее пересечения с линиями $u = 1,\ u = 2$.

6. Найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$ на поверхности, имеющей первую квадратичную форму $ds^2 = du^2 + dv^2$.

7. Найдите площадь четырехугольника на прямом геликоиде $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$, ограниченного линиями $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$.

8. Найдите вторую квадратичную форму следующих поверхностей вращения: 1) $x = R\cos u\cos v,\ y = R\cos u\sin v,\ z = R\sin u$ - сфера; 2) $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u$ - круговой цилиндр.

9. Найдите главные направления и главные кривизны прямого геликоида $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$.

10. Найдите полную и среднюю кривизну прямого геликоида $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av$.

11. Найдите геодезические линии: прямого геликоида, псевдосферы.

Тема 3. Элементы топологии

Топологическая структура на множестве. Индуцированная топология. Непрерывные и гомеоморфные отображения. Компактность.
Литература: [3], 311стр.

Теорема 1.3. *Пусть X — метрическое пространство. Тогда*

1 О *X открыто;*

2 О *$\emptyset$ открыто;*

3 О *объединение $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ любого набора открытых подмножеств $U_\alpha \subset X$ открыто;*

4 О *пересечение $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ конечного набора открытых подмножеств $U_i \subset X$ открыто;*

1 З *$\emptyset$ замкнуто;*

2 З *X замкнуто;*

3 З *пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ любого набора замкнутых подмножеств $F_\alpha \subset X$ замкнуто;*

4 З *объединение $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ конечного набора замкнутых подмножеств $F_i \subset X$ замкнуто;*

Задача 1.4. Показать, что от конечности нельзя отказаться.
Задача 1.5. Доказать, что $B_\varepsilon(x)$ открыто.
Задача 1.6. Доказать, что $\operatorname{Int} Y$ открыто.
Задача 1.7. Доказать, что $\overline{Y}$ замкнуто.
Определение 1.8. *Топологией* на множестве X называется система его подмножеств τ (эти подмножества называются *открытыми*), удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $X \in \tau$;

2) $\emptyset \in \tau$;

3) если $U_\alpha \in \tau\ \forall \alpha \in A$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$;

4) если $U_1, \ldots, U_k \in \tau$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \tau$.

Пара (X, τ) называется *топологическим пространством.* Множество вида $F = X \setminus U$, где $U \in \tau$, называется *замкнутым.*
Задача 1.9. Проверить для замкнутых множеств свойства 1 З – 4 З.
Задача 1.11. Привести пример топологического пространства (X, τ), не связанного ни с какой метрикой (говорят: топология не метризуема).
Задача 1.13. $Y \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.
Задача 1.14. $\overline{Y}$ замкнуто.
Определение 1.15. Пусть $Y \subset X$, (X, τ) — топологическое пространство. Топология $\tau_1 := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ называется топологией, *индуцированной* τ на Y.
Задача 1.16. Проверить для τ_1 аксиомы топологии.
Задача 1.17. Пусть (X, ρ_X) — метрическое пространство. Тогда топологию на $Y \subset X$ можно ввести двумя способами:
1) ρ_X порождает τ_X, которая индуцирует τ_1,
2) ρ_X при ограничении на Y дает ρ_Y, которая порождает τ_{ρ_Y}.
Доказать, что $\tau_1 = \tau_{\rho_Y}$.

8. Задания самостоятельной работы

1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (астроида).
2. Вычислить длину кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le T$ (винтовая линия).
3. Написать уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали и спрямляющей плоскости винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.
4. Вычислить кривизну и кручение кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.
5. Найти естественную параметризацию кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$.

1. Площадь σ поверхности S:

A) $\iint [r_u, r_v]dudv$ B) $\iint [r_{uv}, r_v]dudv$ C) $\iint [r_u, r_{vu}]dudv$
D) $\iint [r_{uu}, r_v]dudv$ E) $\iint [r_u, r_{vv}]dudv$

2. Поверхности, имеющие одинаковые первые квадратичные формы и потому имеющие одинаковую

внутреннюю геометрию, называются
A) изометричными; B) гомеоморфными C) бинарными D) симметричными
E) параллельными
3. Формула в виде $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ задает:
A) вторую квадратичную форму B) первую квадратичную форму
C) площадь поверхности D) кривизну E) кручение
4. Формула в виде $\boldsymbol{r}_u^2 du^2 + 2(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)dudv + \boldsymbol{r}_v^2 dv^2$ задает:
A) первую квадратичную форму B) вторую квадратичную форму
C) площадь поверхности D) плоскую кривую E) кривизну
5. Формула $k_n = (\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{n})$ определяет:
A) нормальную кривизну кривой L B) геодезическую кривизну кривой L
C) главную кривизну кривой L D) кручение кривой L
E) асимптотическую линию кривой L
6. Индикатриса Дюпена представляет собой:
A) эллипс – в эллиптической точке B) эллипс – в параболической точке
C) эллипс – в гиперболической точке D) параболу – в параболической точке
E) параболу – в эллиптической точке

1. Топологическое пространство. Топология метрического пространства.
2. Непрерывные отображения топологических пространств.
3. Гомеоморфизм.
4. Замкнутые множества.
5. База топологии.
6. Связность и линейная связность.
7. Хаусдорфовы топологические пространства.
8. Компактные топологические пространства.

9. График консультации СРОП

Консультация по всем вопросам осуществляется согласно графику СРОП на текущий семестр

10. Расписание проверок знаний обучающихся

Посещение практических занятий оцениваются 0-100 баллов

График выполнения и сдачи заданий по дисциплине

№	Виды работ	Тема	Форма контроля	Срок сдачи № недели
1	КР 1	Касательная и нормаль к кривой на плоскости	Тетрадь с решением	3
2	КР 2	Длина дуги кривой	Тетрадь с решением	5
3	КР 3	Трехгранник Френе	Тетрадь с решением	8
4	Рубежный контроль 1			8
5	Кр 4	Кривизна и кручение кривой	Тетрадь с решением	10
6	КР 5	Касательная плоскость и нормаль к поверхности	Тетрадь с решением	12
7	КР 6	Первая квадратичная форма поверхности	Тетрадь с решением	14
8	Рубежный контроль 2			15

11. Критерии оценки знаний обучающихся

Изучение дисциплины заканчивается экзаменом в форме тестирования, который охватывает весь пройденный материал. Обязательным условием для допуска к экзамену является выполнение всех предусмотренных заданий в программе.

Каждое задание оценивается 0-100 баллов.

Рейтин допуска выводится из средне арифметического всех выполненных заданий на текущих занятиях (посещение лекции, домашние задания, задания по СРО, задания по практике и другие, рубежный контроль).

К итоговому контролю (ИК) по дисциплине допускаются студенты, выполнившие все требования рабочей учебной программы (выполнение и сдача работ и заданий по СРС) и набравшие рейтинг допуска (не менее 50 баллов).

Уровень учебных достижений студентов по каждой дисциплине (в том числе и по дисциплинам, по которым формой итогового контроля ГЭ) определяется итоговой оценкой (И), которая складывается из оценок РД и ИК (экзамена, дифференцированного зачета или курсовой работы/проекта) с учетом их весовых долей (ВДРД и ВДИК).

И = РД*0,6 + ИК*0,4

Итоговая оценка по дисциплине подсчитывается только в том случае, если обучающийся имеет положительные оценки, как по рейтингу допуска, так и по итоговому контролю. Не явка на итоговый контроль по неуважительной причине приравнивается к оценке «не удовлетворительно».

Для корректности подсчета итоговой оценки знания обучающегося на рубежном контроле (рейтинге) и итоговом экзамене оцениваются в процентах от 0 до 100%.

Оценка рубежного контроля складывается из текущих оценок и оценки рубежного контроля.

Учебные достижения оцениваются по многобалльной буквенной системе адекватной ее цифровому эквиваленту и традиционной шкале оценок:

Оценка по буквенной системе	Цифровой эквивалент баллов	Процентное содержание	Оценка по традиционной системе
А	4,0	95-100	Отлично
А-	3,67	90-94	
В+	3,33	85-89	Хорошо
В	3,0	80-84	
В-	2,67	75-79	
С+	2,33	70-74	Удовлетворительно
С	2,0	65-69	
С-	1,67	60-64	
D+	1,33	55-59	
D	1,0	50-54	
F	0	0-49	Неудовлетворительно

12. Требования преподавателя, политика и процедуры

Посещение обучающимися всех аудиторных занятий без опозданий является обязательным. В случае пропуска занятия отрабатываются в порядке установленном деканатом. Допускается максимально только два пропуска занятий. Два опоздания на занятие приравниваются одному пропуску. В случае более двух пропусков преподаватель имеет право в дальнейшем студента не допускать к занятиям до административного решения вопроса. Присутствие на лекциях посторонних лиц, не являющихся контингентом студентов данного курса, запрещается.

Работы следует сдавать в указанные сроки. Крайний срок сдачи всех заданий – за 3 дня до начала экзаменационной сессии.

Студенты, не сдавшие все задания не допускаются к экзамену.

Повторение темы и отработка пройденных материалов по каждому учебному занятию обязательны. Степень освоения учебных материалов проверяется тестами или письменными работами. Тестирование студентов может проводиться без предупреждения.

При выполнении самостоятельной работы студентов под руководством преподавателя (СРСП) учитывать следующие четыре основные функции.

Первая – предполагает реализацию активного восприятия студентами информации преподавателя, полученной в период установочных занятий по учебной дисциплине.

Вторая функция предполагает, что студенты самостоятельно, на основании рекомендаций преподавателя, изучают учебно-методические пособия, литературные источники, выполняют домашние задания, контрольные и курсовые работы и т.д. На этом этапе от студентов требуется знание методов работы, фиксация своих затруднений, самоорганизация и самодисциплина.

Третья функция студентов состоит в анализе и систематизации своих затруднительных ситуаций, выявлении причин затруднений в понимании и усвоении ими учебного материала, выполнении других учебных действий. Студенты переводят неразрешимые затруднения в систему вопросов для преподавателя (ранжируют их, упорядочивают, оформляют), строят собственные версии ответов на эти вопросы.

Четвертая функция студентов состоит в обращении к преподавателю за соответствующими разъяснениями, советами, консультациями.

13 Список литературы

Основная:

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика.-М.:УРСС.Т.2.-2004.-187с.
2. Дифференциальная геометрия. Под ред.А.С.Феденко.-Мн.:Изд-во БГУ им.В.И Ленина.-2003.-256с.
3. Белько И.В. Сборник задач по дифференциальной геометрии.-М.:Наука.-2003.-272с.

Дополнительная:

4. Вернер А.Л. Элементы топологии и дифференциальной геометрии.-М.:Просвещение.-2003.-113с.
5. Бакельман И.Я. Введение в дифференциальную геометрию «в целом».-М.:Наука.-2003.-440с.