Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

С.Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

5В080700 «Орман ресурстары және орман шаруашылығы»
мамандығынының студенттеріне арналған

VM 1201 Жоғары математика

ПӘНІ БОЙЫНША ОҚЫТУ БАҒДАРЛАМАСЫ (SYLLABUS)

Павлодар, 2013 ж.

Құрастырушы: Құдайберген М.Қ.

БЕКІТЕМІН
ФМжАТФ-нің деканы
__________ Испулов Н.А.
2013ж. «___»__________

Құрастырушы: __________ аға оқытушы Құдайберген М.Қ.

5В080700 «Орман ресурстары және орман шаруашылығы» мамандығының ЖОБ негізіндегі күндізгі оқу нысанының студенттеріне арналған

VM 1201 Жоғары математика

пәні бойынша оқыту бағдарламасы (Syllabus)

Бағдарлама 2013ж. «___» _________бекітілген жұмыс оқу бағдарламасының негізінде әзірленді.

2013ж. «___»__________ кафедра отырысында ұсынылған №__ Хаттама
Кафедра меңгерушісі ______________ Исин М.Е.2013ж. «____» ________

Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданған 2013ж. «__»__________ №____ Хаттама

ОӘК төрағасы ____________ Искакова А.Б.20__ж. «_____»___________

1. Оқу пәнінің паспорты

Пәннің атауы Жоғары математика

Міндетті компонент пәні

Кредит саны және меңгеру мерзімі

Барлығы – 2 кредит

Курс: 1

Семестр: 1

Барлығы аудиториялық сабақтар – 30 сағат

Дәрістер – 15 сағат

Тәжірибелік сабақтар – 15 сағат

СӨЖ – 60 сағат

соның ішінде СОӨЖ – 15 сағат

Жалпы еңбек сыйымдылығы – 90 сағат

Бақылау формасы

Емтихан – 1 семестр

Пререквизиттер

– Осы пәнді меңгеру үшін төмендегі пәндерді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және машықтар қажет: мектепте оқыған математика пәнінің негізі.

Постреквизиттер

Пәнді меңгеру кезінде алынған білім, икемділік және машықтар келесі пәндерді меңгеру үшін қажет: мамандықтың математикалық пәндері; мамандықтың қолданбалы пәндері.

2. Оқытушы туралы мәліметтер және байланысу ақпараттары

Құдайберген Маржан Құдайбергенқызы

Математика кафедрасының аға оқытушысы

«Математика» кафедрасы, А - 410 аудитория

Байланыс телефоны: 67-36-46, ішкі тел. 11-20

E-mail: k.marzhan_k@mail.ru

3. Пәннің мақсаты және міндеттері

Пәннің мақсаты: Математикалық әдістер ғылым, техника, экономика және басқару мәселелерін шешуде үлкен роль атқарады. Сондықтан математиканы оқытудың алдына келесі мақсаттар қойылады:

- студенттердің математикалық және алгоритмдік ойлауын дамыту;
- студенттердің математикалық есептерді зерттеу және оларды шешу әдістерін игеру;
- студенттердің қолданбалы кәсіптік есептерді шешуде математикалық білімдерін қолдану дағдыларын қалыптастыру;

Пәннің міндеті:

- математикалық ұғымдар мен әдістер мысалында студенттерге ғылыми көзқарастың мәнін түсіндіру;
- математиканың мәнін және оның қолданбалы – кәсіптік есептерді шешудегі ролін түсіндіру;
- студенттерді математикалық әдістерді кәсіптік әрекеттерінде қолдануға бағыттау.

4. Білім, икем, дағдылар және құзырларға қойылатын талаптар

Осы пәнді меңгеру нәтижесінде:

студенттердің түсінігі болуы тиіс:

- фундаменталды ұғымдар, заңдар туралы;
- абстракты ұғымдарды нақты тәжірибелік есептер үшін қолданылуы туралы;

студенттер білуі тиіс:

- негізгі ұғымдарды, формулаларды, анықтамаларды, теоремаларды;
- есептерді шешудің тәсілдері мен әдістерін;

студенттің икемді болуы тиіс:

- бағдарлама бойынша қарастырылатын формулаларда дәлелдеу және қорытып шығару;

- математикалық модельдерді құрастыру;
- математикалық зерттеулерді жүргіздіру;

студент тәжірибелік дағдыларды иемденуі тиіс:

- ұсынылатын әдебиетпен өздігінен жұмыс жасау;
- алдына қойылған мәселе есептерді шешу;
- теоремаларды құрастыру және дәлелдеу;

студент құзырлы болуы тиіс:

- алгебра және геометрия сұрақтарында;
- математикалық анализ сұрақтарында.

5 Пәннің тақырыптық жоспары

Сабақ түрлері бойынша академиялық сағаттардың бөлінуі

№	Тақырыптардың атауы	Сабақ түрлері бойынша аудиториялық сағаттардың саны			СӨЖ	
		Дәріс тер	Тәжірибелік	Зерт/лық, студ/лық, жеке	Бар лығы	Соның ішінде СОӨЖ
1	Сызықты алгебра және аналитикалық геометрия элементтері	2	2		8	2
2	Математикалық талдауға кіріспе	2	2		8	2
3	Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі	3	3		10	3
4	Анықталмаған және анықталған интеграл	3	3		10	3
5	Жай дифференциалдық теңдеулер	3	3		8	3
6	Көп айнымалы функциялар	1	1		8	1
7	Сан қатарлары	1	1		8	1
	Барлығы: 90 (2 кредит)	15	15		60	15

6. Дәріс сабақтарының мазмұны

Тақырып 1. Сызықты алгебра және аналитикалық геометрия элементтері

Жоспар:

1. Матрицалар, анықтауыштар

2. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешу әдістері

3. Вектор. Вектордың ұзындығы. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі. Үш вектордың аралас көбейтіндісі

4. Жазықтықтағы түзу

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Матрицалар теориясы қазіргі заман ғылымдарында кең түрде қолданылады. Ол: физикалық химия, теориялық физика, электродинамика, кванттық механика, және де түрлі қолданбалы мәселелерді шешу барысында, яғни, жоспарлауда, өндіріспен басқаруда қолданылады.

Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар

Бізге $m \times n$ саннан құрастырылған мынадай кесте берілсін:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

Осы кестені реті (өлшемі) $m \times n$-ге тең **матрица** деп атайды және былай белгілейді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ немесе } A_{m\times n},\ A_{mn},\ A_{ij} = (a_{ij}) \quad (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n})$$

m жатық және n тік жолдан тұратын матрицаны – реті $m \times n$ матрица деп атайды.

Матрицадағы a_{ij} - оның элементі; i - жатық жолдың индексі, j - тік жолдың индексі.

A_{mn} және B_{pq} екі матрицаның реттері бірдей болса, оларды **типтес матрицалар** деп атайды.

Мысалы: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A_{mn} және B_{pq} екі матрица реттері бірдей және олардың сәйкес элементтері өзара тең болса, онда **матрицалар тең** деп аталады.

Бір ғана жатық жолдан құрастырылған матрица **жатық жол матрица** деп аталады.

Ал бір ғана тік жолдан құрастырылған матрица **тік жол матрица** деп аталады.

Элементтерінің бәрі нөлге тең болып келген матрица **нөльдік матрица** деп аталады.

Егер матрицаның жатық жолдарының саны тік жолдарының санына тең болса, онда матрица **квадрат матрица** деп аталады.

Квадрат матрицаның реті оның жатық немесе тік жолдарының саны бойынша анықталады.

Квадрат матрицаның $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ элементтері **бас диагональды** құрады.

Бас диагональдың элементтерінен басқа элементтердің бәрі нөлге тең болса, квадрат матрица **диагональ матрица** деп аталады.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Бас диагональдың элементтерінің бәрі бірдей 1-ге тең болып келетін диагональ матрица **бірлік матрица** деп аталады.

Егер квадрат матрицаның бас диагоналінің бір жағына орналасқан элементтерінің бәрі нөль болса, онда матрицалар **төменгі немесе жоғарғы үшбұрышты матрицалар** деп аталады.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадрат матрицаның барлық жатық жолдарын өз нөмірлерімен тік жол етіп ауыстырып жазудан шыққан матрица **транспозицияланған матрица** деп аталады.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Егер $A=A^T$ болса, онда A матрицасын симметриялы матрица деп атайды.

Матрицаларға қолданылатын сызықты амалдар: матрицаларды қосу және азайту, матрицаны санға көбейту.

Қосу мен азайту тек өлшемдері бірдей матрицалар үшін анықталады.

$A=(a_{ik})_{mn}$, $B=(b_{ik})_{mn}$ **матрицалардың қосындысы** деп $C=(c_{ik})_{mn}$ матрицасын айтады, мұнда $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$, $(i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n})$.

Мысалы: $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. Онда екеуінің қосындысы:

$$A+B=\begin{pmatrix} -3+1 & 1+2 \\ 2+0 & 0+7 \\ 5+0 & 7+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ik})_{mn}$, $B=(b_{ik})_{mn}$ **матрицалардың айырымы** деп $D=(d_{ik})_{mn}$ матрицасын айтады, мұнда $d_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$, $(i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n})$.

A матрицаның l **санға көбейтіндісі** деп $B=(b_{ik})_{mn}$ матрицасын айтады, мұнда $b_{ik}=l\cdot a_{ik}$.

Мысалы: $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot0 & 3\cdot2 \\ 3\cdot2 & 3\cdot0 & 3\cdot0 \\ 3\cdot0 & 3\cdot1 & 3\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A_{mn}=(a_{ik})_{mn}$, $B_{nl}=(b_{ik})_{nl}$ **матрицалардың көбейтіндісі** деп $C_{ml}=(c_{ik})_{ml}$ матрицасын айтады, мұнда $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\dots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$. A матрицаның тік жолдарының саны мен B матрицаның жатық жолдарының саны тең болуы қажет және $A\cdot B\neq B\cdot A$. Көбейтіндінің белгілеуі: $A\cdot B=C$.

Мысалы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot3+1\cdot6+3\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot5+3\cdot7 \\ 4\cdot3+0\cdot6+1\cdot0 & 4\cdot4+0\cdot2+1\cdot1 & 4\cdot1+0\cdot5+1\cdot7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 13 & 28 \\ 12 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

Анықтауыштар және олардың қасиеттері

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ квадрат матрица берілсін.

2-ші ретті квадрат матрицаның **анықтауышы** деп $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ санын айтады және келесі түрде белгіленеді: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ немесе $|A|, \quad \Delta$.

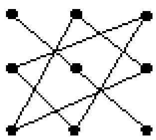
Сонымен қатар, анықтауышты детерминант деп атайды: $\det A, \quad \det(a_{ik})$

3-ші ретті квадрат матрицаның **анықтауышы** деп

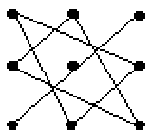
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$ санын айтады.

Анықтауыштың мәні алты қосылғыштың алгебралық қосындысына тең. Үшеу «+» таңбасымен, қалған үшеуі «-» таңбасымен алынған. Мұны Саррюс ережесі деп атайды.

+



—



+

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

-

Анықтауыштардың қасиеттері

1. Анықтауыштағы барлық жатық жолдар мен сәйкес барлық тік жолдардың орындарын ауыстырса, одан анықтауыштың мәні өзгермейді.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Анықтауыштағы кез келген екі жатық немесе екі тік жолдың орындарын ауыстырса, анықтауыштың тек таңбасы ғана өзгереді.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

3. Егер анықтауыштағы екі жатық немесе екі тік жолдың сәйкес элементтері өзара тең болса, онда анықтауыштың мәні 0-ге тең болады.
4. Егер анықтауыштағы кез келген бір жолдың барлық элементтерінің ортақ көбейткіші болса, оны көбейткіш етіп анықтауыштың таңбасының сыртына шығаруға болады.
5. Егер анықтауыштағы екі жатық немесе екі тік жолдың сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыштың мәні 0-ге тең болады.
6. Егер анықтауыштағы кез келген жатық немесе тік жолдың барлық элементтері 0-ге тең болса, онда анықтауыштың мәні 0-ге тең болады.
7. Егер анықтауыштағы кез келген бір жатық немесе тік жолдың элементтері екі (немесе бірнеше) санның қосындысынан тұрса, онда анықтауышты екі (немесе бірнеше) анықтауыштың қосындысы етіп жазуға болады.

$$\begin{vmatrix} a_1 + a' & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'' & b_2 & c_2 \\ a_3 + a''' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b_1 & c_1 \\ a'' & b_2 & c_2 \\ a''' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8. Егер анықтауыштағы кез келген бір жатық немесе тік жолдың барлық элементтерін бірдей нөльге тең емес бір санға көбейтіп, параллель жатқан екінші бір жолдың сәйкес элементтеріне апарып қосса, одан анықтауыштың мәні өзгермейді.

$$\begin{vmatrix} a_1 + lb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + lb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + lb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Анықтама. Анықтауыштың a_{ik} элементіне сәйкес **минор** деп анықтауыштағы i-ншы жатық жол мен k-нөмірлі тік жолдың элементтерін сызып алғанда қалатын анықтауышты айтады.

a_{ik} элементіне сәйкес минор - M_{ik}.

Анықтама. Анықтауыштың a_{ik} элементіне сәйкес **алгебралық толықтауыш** деп (A_{ik}) көбейтіндісін айтады, яғни,

a_{ik} элементіне сәйкес алгебралық толықтауыш - $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$

9. Егер анықтауыштағы кез келген жатық немесе тік жолының барлық элементтерін өздеріне сәйкес алгебралық толықтауыштарға көбейтіп, шығатын көбейтінділердің бәрін қосса, ол қосынды анықтауыштың мәніне тең болады.

Кері матрица

Анықтама. A^{-1} квадрат матрицасы A квадрат матрицасына **кері** деп аталады, егер де $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ шарты орындалса. Мұнда E - бірлік матрица.

Анықтама. Квадрат матрица **ерекше емес** деп аталады, егер оның анықтауышы нөлден айрықша болса.

Егер матрицаның анықтауышы нөльге тең болса, онда ол **ерекше** деп аталады. Кез келген ерекше емес матрицаның кері матрицасы болады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$ мұнда A_{ij} - A матрицасының a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы. (A матрицаның әр жолдағы элементтердің алгебралық толықтауыштары сол номермен бағанға жазылған).

Мысалы: Берілген $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицаға кері матрица құрастыру керек.

Шешімі: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$; $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1.$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 5 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 1 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

Сызықты теңдеулер жүйесі

n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі мына түрде беріледі:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\ ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{6}$$

Мұндағы x_j - белгісіз шамалар, a_{ij} - i нөмерлі теңдеудегі j нөмерлі белгісіздің коэффициенті, b_i - i нөмерлі теңдеудің бос мүшесі, $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

(6) теңдеулер жүйесінің коэффициентерінен құрылған мына матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{mn}\tag{7}$$

негізгі матрица деп аталады, ал мына матрица

$$A^*=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}\tag{8}$$

осы жүйенің **кеңейтілген** матрицасы делінеді.

Егер (6) теңдеулер жүйесінің барлық бос мүшелері нөлге тең болса, онда бұл жүйе **біртекті** деп аталады.

1.2 пунктінінь 2-ші және 3-ші анықтамаларда аталған теңдеулер жүйесінің шешімі үйлесімді, үйлесімсіз, анықталған және анықталмаған теңдеулер жүйесі туралы ұғымдар өздерінің мағыналарын толық сақтайды.

(6) теңдеулер жүйесінің белгісіздері мен бос мүшелерінен

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ ...\\ x_n\end{pmatrix} \text{ және } B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ ...\\ b_n\end{pmatrix}$$

матрицаларын құрып осы жүйені мына матрицалық теңдеу түрінде жазамыз:

$$A\cdot X=B.\tag{9}$$

n белгісізі бар n теңдеулер жүйесін шешу әдістері

Крамер әдісі: Біртекті емес n белгісізді n теңдеулер жүйесі берілсін:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,
\end{cases}
\tag{10}
$$

Осы жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

нөлге тең болмасын.

Осы анықтауыштың k нөмерлі тік жолының элементтерін (10) жүйесінің сәйкес бос мүшелерімен алмастырғанда шыққан анықтауышты Δ_k деп белгілеік:

$$
\Delta_k = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix}, \ k = \overline{1, n}
$$

Осы анықтауыштар бойынша (10) теңдеулер жүйесінің шешімі Крамер формулалары арқылы анықталады:

$$
x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \ k = 1,2,\ldots,n.
$$

Матрица әдісі. (10) теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазамыз $A \cdot X = B$. (9 теңдеуі)

(5) формуласы бойынша А матрицасына кері A^{-1} матрицасын табамыз. Енді (9) теңдеуін сол жағынан A^{-1}-ге көбейтіп және $A^{-1}A = E$ екенін ескеріп,

$$
X = A^{-1}B
$$

түрінде (9) теңдеуінің шешімін табамыз.

Векторлар

Бағытталған кесіндіні **геометриялық вектор**, қысқаша **вектор** деп атайды. Вектор, бағытталған кесінді ретінде, өзінің бас нүктесі А мен соңғы нүктесі В арқылы берілсе, $\overrightarrow{AB}$ деп белгіленеді. Осымен қатар, вектор, үстіне сызықша қойылған, кіші латын әріппен немесе толық латын єріппен де белгіленеді, мысалы $\vec{a}$ немесе **а**. Бас нүктесі мен соңғы нүктесі түйіскен вектор **нөлдік вектор** деп аталады. Бір түзудің немесе өзара параллель түзулердің бойында жататын векторлар **коллинеарлы** деп аталады.

Коллинеарлы, ұзындықтары мен бағыттары бірдей векторларды тең деп атайды.

Берілген екі вектордың әрқайсысы үшінші векторға тең болса, онда бұл векторлар өзара тең болады. Сондықтан, берілген $\vec{a}$ векторына тең, кез келген Р нүктесінен шығатын, тек қана бір вектор бар болады. Демек, вектор өзінің бас нүктесіне дейінгі дәлдікпен анықталады. **Еркін векторлар** туралы ұғып осы мағынада қолданылады.

Берілген масштабта анықталған $\vec{a}$ векторының ұзындығы оның модулі деп аталады да $|\vec{a}|$ деп белгіленеді. Әлбетте, $\vec{a} = \vec{b}$ болса, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болады. Модульдері тең векторлардың өзара тең болуы міндетті емес.

Кез келген u сандар өсі берілсін. $\overrightarrow{AB}$ векторының бас нүктесі A мен соңғы нүктесі B-дан u өсіне түсірілген перпендикулярдың сәйкес табандары A' пен B' болсын. Бағытталған $\overrightarrow{A'B'}$ **кесіндісінің** $A'B'$ **шамасы** $\overrightarrow{AB}$ **векторының** u **өсіндегі проекциясы** деп аталады да $\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$ деп белгіленеді.

Кеңістіктің кез келген *S* нүктесінен шығып, $\overrightarrow{AB}$ векторы мен u µсіне параллель және бағыттас болатын екі сәуленің арасындағы j бұрышы, $\overrightarrow{AB}$ векторының u өсіне көлбеулік бұрышы деп аталады. Осы бұрыш арқылы $\overrightarrow{AB}$ векторының u µсіндегі проекциясы

$$\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$$

формуласы бойынша анықталады.

Кез келген $\vec{a}$ векторының кеңістікте анықталған координаттар жүйесінің µстеріндегі проекциялары x, y, z деп белгіленеді де $\vec{a} = \{x, y, z\}$ түрінде жазылады. Егер берілген жүйе тікбұрышты декарттық жүйе болса, онда x, y, z вектордың **декарттық координаттары** деп аталады.

Егер $\vec{a}$ векторы өзінің $A(x_1, y_1, z_1)$ бас нүктесі мен $B(x_2, y_2, z_2)$ соңғы нүктесі арқылы берілсе, онда x, y, z

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1$$

формулалары бойынша есептеледі.

$\vec{a}$ векторының модулі өзінің x, y, z координаттары арқылы

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

формуласы бойынша анықталады. Әлбетте,

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Демек, $\vec{a}$ векторының **модулі** оның бас нүктесі А мен соңғы нүктесі В-ның **ара қашықтығына** тең.

$\vec{a}$ векторының Ox,Oy,Oz өстеріне көлбеулік бұрыштары α, β, γ болсын. (1) формуласы бойынша, $x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha$, $y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta$, $z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$

болады. Бұл формулалардағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының **бағыттаушы косинустары** деп аталады.

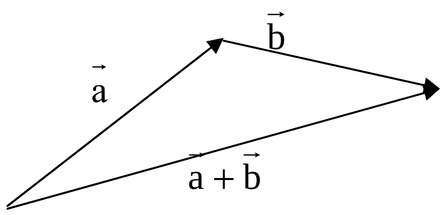
Бағыттауышы косинустар

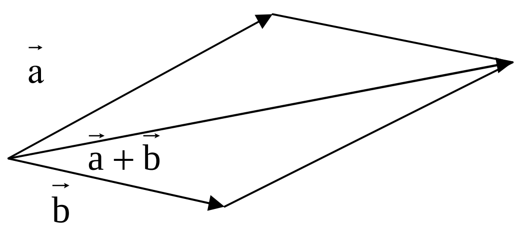
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

тепе-теңдегін қанағаттандырады.

Векторлар арасындағы сызықтық амалдар

Егер $\vec{b}$ векторының бас нүктесі $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен түйіссе, онда $\vec{a}$-ның бас нүктесінен шығып $\vec{b}$-ның соңғы нүктесінде аяқталатын вектор $\vec{a}$ **мен** $\vec{b}$ **векторларының қосындысы** деп аталады да $\vec{a} + \vec{b}$ деп белгіленеді (үшбұрыш ережесі, 16- сурет).

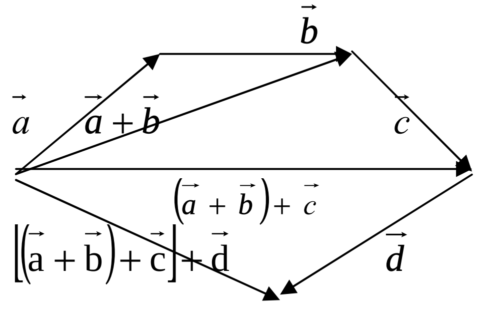




16 - сурет   17 - сурет

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір нүктеден шықса, онда осы векторлар бойынша құралған параллелограмның диагоналі осы векторлардың қосындысына тең болады (параллелограмм ережесі, 17-сурет). Соңғы ережеден $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ теңдігі туындайды.

Бірнеше векторлардың қосындысы, үшбұрыш ережесін біртіндеп қолдану арқылы анықталады. Мысалы, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторларының қосындысы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}\right] + \vec{d}$ теңдігі бойынша орындалады (18- сурет).



18-сурет

Коллинеарлы, ұзындықтары тең және карама-қарсы бағытталған екі вектор **өзара карама-қарсы векторлар** деп аталады. Егер берілген вектор $\vec{a}$ болса, оған **карама-қарсы** вектор $-\vec{a}$ деп белгіленеді.

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторларының айырымы** деп, $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$-ға тең болатын $\vec{c}$ векторы айтылады да, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ деп белгілінеді. Әлбетте, $\vec{c}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, демек, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$-ға қарама-қарсы вектордың қосындысына тең.

$\vec{a}$ **векторының** α **санына көбейтіндісі** деп $\vec{a}$ векторына коллинеарлы, ұзындығы $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ санына тең, $\alpha>0$ болғанда $\vec{a}$- мен бағыттас болатын, $\alpha<0$ болғанда $\vec{a}$-ға қарама-қарсы бағытталған $\alpha\cdot\vec{a}$ векторын айтады. Векторлардың проекциялары тұралы төменде келтірілген теоремалар орындалады:

Теорема 1 Векторлар қосындысының қандай болмасын бір µске проекциясы осы векторлардың осы өстегі проекцияларының қосындысына тең:

$$пр_u\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_n}\right)=пр_u\overrightarrow{a_1}+пр_u\overrightarrow{a_2}+...+пр_u\overrightarrow{a_n}.$$

Теорема 2 Векторды санға көбейткенде оның проекциясы да осы санға көбейтіледі: $пр_u\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)=\alpha\cdot пр_u\vec{a}$.

Бұл теоремалардан, егер

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$$

болса, онда

$$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\},$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\},$$

$$\alpha\cdot\vec{a}=\{\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot y_1,\alpha\cdot z_1\}$$

болатынын көреміз.

Осымен қатар, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеарлы болуы үшін

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті ($\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөлдік векторлар емес).

Егер $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ векторлары: 1) $\vec{i}$ векторы Ох өсінде, $\vec{j}$- Оу өсінде, $\vec{k}$ - Oz µсінде жатса; 2) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ өздері жатқан өстермен бағыттас болса; 3) $|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$, $|\vec{k}|=1$ болса, онда $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ **базистік векторлар** деп аталады. Бұл векторларды

бірлік базистік деп те атайды. Базистік векторлар арқылы кез келген $\vec{a}=\{x, y, z\}$ векторы

$$\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$$

түрінде өрнектеледі.

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі деп

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (3)$$

санын айтамыз.

Мұндағы φ - $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындығы бұрыш. Анықтама бойынша, $\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot\cos 0^{\mathbf{0}}=|\vec{a}|^2$.

Бұл сан $\vec{a}$ вектордың **скалярлық квадраты** деп аталады. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр болса, онда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Бірлік базистік векторлар үшін

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

теңдіктері орындалады. Координаттары арқылы берілген $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$ және $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \qquad (4)$$

формуласы арқылы анықталады.

$$|\vec{a}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} \quad \text{немесе} \quad |\vec{b}|\cdot\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

болғандықтан, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} \quad \text{немесе} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

түрінде жазуға болады. (3) және (4) формулаларынан

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

немесе, координаттары арқылы

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторлары арасындағы бұрыш** анықталады.

u кез келген өс, $\vec{e}$ осы өс бойымен бағытталған бірлік вектор болсын. Егер u µсі координат өстерімен α, β, γ бұрыштарын құрса, онда

$$\vec{e}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

және

$$\text{пр}_u \vec{a} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma$$

болады.

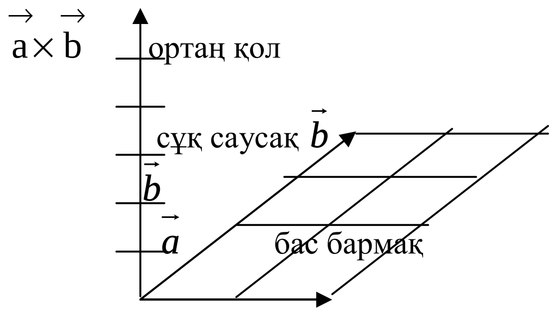
Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{a} \times \vec{b}$ түрінде белгіленіп, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын векторды айтады:

1) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, мұндағы j - берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш;

2) $\vec{a} \times \vec{b}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына перпендикуляр;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ векторлары осы ретпен оң үштік құрайды.



19-сурет

Үшінші шарт бойынша, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ векторларды «оң қол ережесіне» сәйкес орналасуы керек (19 -сурет).

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1) Векторлардың векторлық көбейтіндісі көбейтінділерідің орналасу ретінен тәуелді. Көбейткіштерінің орнын ауыстыру векторлық көбейтіндінің таңбасына өзгертеді:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Векторлық көбейтіндінің бұл қасиеті көбейткіштердің қарсы орын алмастырылымдығы деп аталады.

2) Скалярлық көбейткішке қатысты терімділік қасиеті:

$$\left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b} \text{ және } \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b};$$

3) Қосу амалына қатысты үлестірімділік қасиеті:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \text{ және } \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a};$$

4) Бірінші шарт бойынша, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісің модулі осы векторлар бойынша құралған параллелограмның ауданына тең және өзара коллениар векторлардың векторлық көбейтіндісі нөлге тең.

5) Базистік бірлік векторлар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлары үшін:

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{j}=0,\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{j}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{k}=0$$

теңдіктері орындалады.

6) Егер $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ болса, онда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

немесе

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

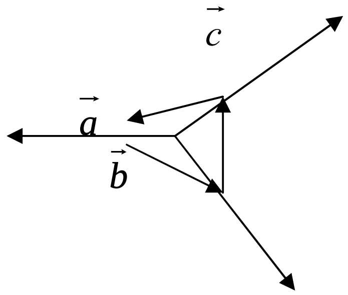
Векторлар үштігі деп белгілі ретпен орналасқан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын айтады. Мұндағы $\vec{a}$-бірінші, $\vec{b}$- екінші, $\vec{c}$-үшінші вектор. Векторлар үштігі ретінде $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үштігі $\vec{b},\vec{a}$, $\vec{c}$ үштігіне тең емес. Циклдік орын алмастыру векторлар үштігін өзгертпейді.

Мысалы, $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ мен $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ бір векторлық үштік ретінде қарастыралады.

Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары бір жазықтықта немесе өзара параллель жазықтықтарда жатса, онда бұл векторлар **компланар векторлар** деп аталады.

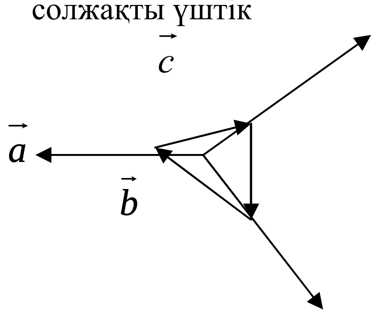
Берілген компланар емес вектордан алты үштік құруға болады. Олардың үшеуі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ оңжақты бағытталған (20-сурет), басқа үшеуі $\vec{b},\vec{a},\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{c},\vec{b}$; $\vec{c}$, $\vec{b},\vec{a}$ солжақты бағытталған үштіктер (5-сурет).

оңжақты үштік



20-сурет

солжақты үштік



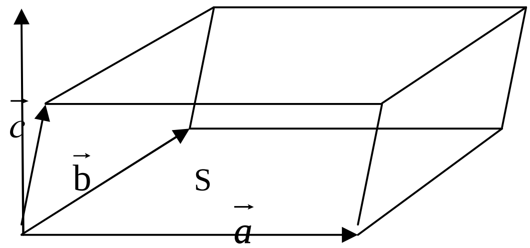
21-сурет

Компланар векторлар үштігі оңжақты да, солжақты да болмайды.

Анықтама $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының $\vec{c}$ векторына скалярлық көбейтіндісі айтылады да $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ деп белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:



22-сурет

1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштігі оңжақты болса «+» таңбасымен, ал солжақты болса «-» таңбасымен алынған, осы векторлар бойынша салынған параллепипедтің көлеміне тең (22-сурет).

2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \pm V$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін, олардың аралас көбейтіндісінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 .$$

4) Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары координаттары арқылы берілсе

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\},\ \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\},\ \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\},$$

онда

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

формуласы бойынша анықталады.

Жазықтықтағы түзу

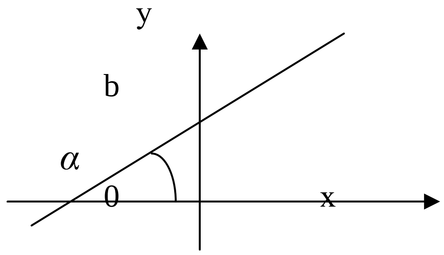
Тікбұрышты декарттық жүйеде екі айнымалыдан тәуелді кез келген **сызықтық** теңдеу жазықтықта **түзуді** анықтайды.

$$Ax + By + C = 0$$

түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.Абсцисса өсінің оң бағыты мен берілген түзудің арасындағы α бұрышы **түзудің көлбеулік бұрышы** деп аталады. Бұл бұрыш абсцисса өсінің оң бағытынан басталып есептелінеді және бұрышты есептеу сағат тілінің қозғалу бағытына қарсы болса «+» таңбасымен, кері жағдайда «-» таңбасымен алынады.

Көлбеулік бұрыштың тангенсі түзудің бұрыштық коэффициенті деп аталады. Әдетте, бұл коэффициент $k = tg\alpha$ деп белгіленеді.

Түзудің жазықтықта берілу тәсілдері: 1)Бұрыштық коэффициенті **k** және түзудің ордината өсінен қиып өтетін **b** кесіндісі арқылы түзуді $y = kx + b$ теңдеуі арқылы анықталады.



8-сурет

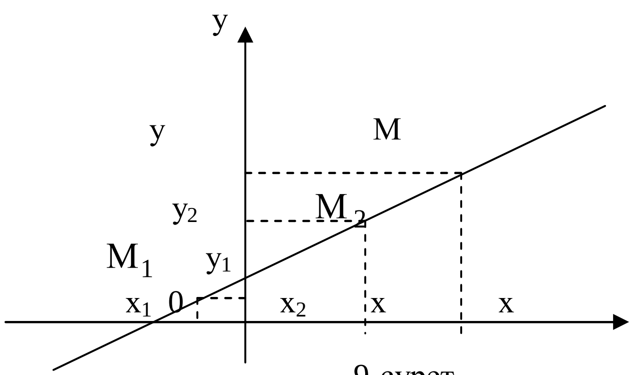
2) $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ **нүктелері арқылы өтетін түзу**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

теңдеуі арқылы анықталады және **бұрыштық коэффициенті**

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

формуласы арқылы есептеледі (9-сурет).

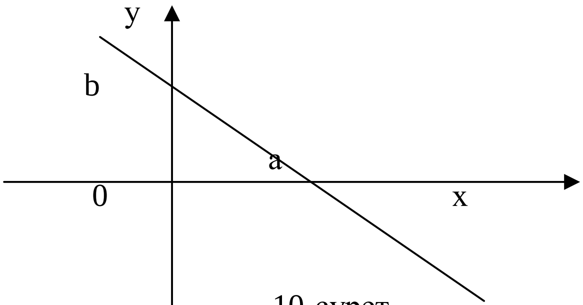


9-сурет

3) Координат өстерінен **a және b кесінділері арқылы өтетін** түзу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

теңдеуі арқылы анықталады. (10-сурет) және б±л теңдеу **түзудің кесінділердегі теңдеуі** деп аталады, (мұндағы *a* –Ох өсінен, b –Оу өсінен түзудің қиып өтетін кесінділері).



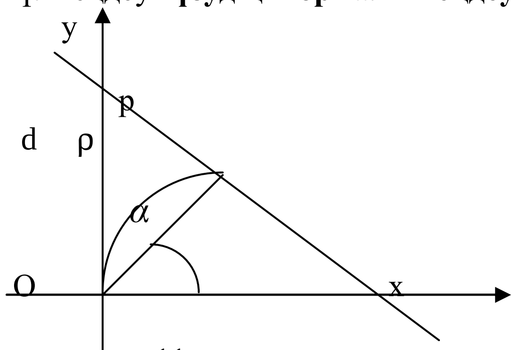
10-сурет

4) Координат басынан түзуге түсірілген **нормаль арқылы** анықталған түзу (11-сурет).

Егер осы нормальдің табаны Р нүктесінде жатып, ОР кесіндісі Ох µсімен α бұрышын жасаса және ұзындығы р-*га* тең болса, онда түзу

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$$

теңдеуі арқылы анықталады. Бұл теңдеу **түзудің нормаль теңдеуі** деп аталады.



11-сурет

Егер түзу нормаль теңдеуі арқылы берілсе, онда $M\left(x^*, y^*\right)$ нүктесінің осы түзуден ауытқуы

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha$$

формуласы арқылы есептеледі. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық осы ауытқудың абсолют шамасына тең: $d = |\delta|$.

Түзудің жалпы теңдеуін нормаль түріне келтіру үшін, осы теңдеудің барлық мүшелері

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формуласы арқылы анықталған **нормаль көбейткішке** көбейтіледі. Нормаль көбейткіштің таңбасы жалпы теңдеудегі бос мүшенің таңбасына кері болады.

Түзудің толық емес теңдеулері: 1) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі бос мүше С=0 болса, онда теңдеу түрінде жазылады да, түзу координат басы арқылы өтеді; **2)** егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $B = 0\,(A \neq 0)$ болса, онда теңдеу $Ax + C = 0$ түрінде жазылады да,

$$x = a,\ a = -\frac{C}{A},$$

түріне келтіріледі. Бұл түзу ординат өсіне параллель болып, абсцисса өсінен а-ға тең кесіндіні қиып өтеді; **3**) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $A = 0 \left(B \neq 0\right)$ болса, онда теңдеу $By + C = 0$ түрінде жазылады да,

$$y = b,\ b = -\frac{C}{B},$$

түріне келтіріледі.

Бұл түзу абсцисса өсіне параллель болып, ординат өсінен *b*-ға тең кесіндіні қиып өтеді; 4) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $B = 0, C = 0\ \left(A \neq 0\right)$ болса, онда теңдеу

$$x = 0$$

түрінде жазылады да ординат өсін анықтайды; 5) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $A = 0, C = 0\ \left(B \neq 0\right)$ болса, онда теңдеу

$$y = 0$$

түрінде жазылады да абсцисса µсін анықтайды; 6) егер түзудің жалпы теңдеуінің барлық коэффициенттері нөлге тең болмаса, онда жалпы теңдеу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

түріне келтіріледі. Бұл **түзудің кесінділердегі теңдеуі.**

Мұндағы $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$

болады да абсцисса өсінен *а*-ға тең және ординат өсінен b-ға тең кесінділерді қиып өтеді.

Егер екі түзудің k_1 және k_2 бұрыштық коэффициенттері белгілі болса, онда осы **түзулердің арасындағы бұрыш**

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

формуласы арқылы анықталады.

Егер екі түзу $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ және $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ жалпы теңдеулері арқылы берілсе, онда бұл түзулердің бұрыштық коэффициенттері

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

формулалары арқылы анықталады.

Түзулер өзара параллель болуы үшін $k_1 = k_2$, демек $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ шарттары орындалу керек.

Түзулер өзара перпендикуляр болуы үшін

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

немесе

$$k_1 = -\frac{1}{k_2},$$

демек

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

шарттары орындалу керек.

Егер

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

болса, түзулер параллель болады, ал

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

болса, онда түзулер беттеседі.

Егер түзулер бір S нүктесінде қиылысса, онда

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (13)$$

теңдеуі центрі S нүктесінде жатқан түзулер **шоғын** анықтайды.

Мұндағы α мен β кез келген нақты сандар. Егер $\alpha \neq 0$ болса, онда $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ деп алып, (13) теңдеуі

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

түріне келтіріледі. Бұл теңдеу, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түзуінен басқа, S нүктесі арқылы өтетін кез келген түзуді анықтайды.

Тақырып 2. Математикалық талдауға кіріспе

Жоспар:

1. Математикалық талдауға кіріспе

2. Функция түсінігі

3. Тізбек және тізбектің шегі

4. Фунцияның шегі

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

1. Математикалық талдауға кіріспе

Нақты санның геометриялық бейнесі-сандар өсіндегі нүкте және керісінше, сандар өсіндегі әрбір нүкте нақты санды анықтайды. Сондықтан «нақты сан», «сандар өсіндегі нүкте» терминдері бір мағыналы, яғни синонимді сөздер ретінде қолданылады.

Нақты сандар жиыны **рационал** және **иррационал** сандар жиындарының біріктірілуінен тұрады. **Рационал** сан деп екі бүтін санның қатнасы ретінде өрнектелетін санды айтады. Бұл сан шекті ондық бөлшек немесе периодты шексіз ондық бөлшек түріне келтіріледі. Иррационал сан периодты емес шексіз ондық бөлшек түрінде өрнектеледі. Егер сандар өсіндегі нүктенің координат басына дейінгі қашықтығы бірлік кесіндімен (масштабпен) өлшемдес болса, онда бұл нүкте рационал санның, өлшемдес болмаса иррационал санның бейнесі болады. Рационал сандар жиыны Q, иррационал сандар жиыны I, ал нақты сандар жиыны R әріпімен белгіленеді және $R = Q \cup I$ болады.

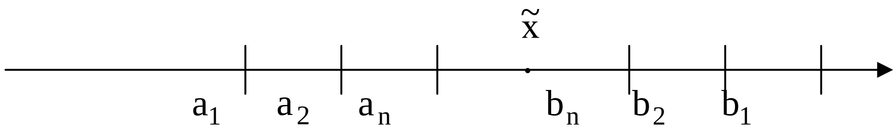
«Нақты сандар жиыны» мен «нақты сандар өсіндегі нүктелер жиыны» туралы ұғымдар бір мағынада қолданылады да, қысқаша «сандар жиыны» немесе «нүктелер жиыны» деп айтылады.

Екі санмен шектелген нүктелер жиыны **аралық** деп аталады да $<a,b>$ деп белгіленеді. Егер аралықты шектейтін нүктелер осы жиынға енсе, онда бұл аралық **сегмент** деп аталады да $[a,b]$ деп, ал енбесе **интервал** делінеді де, (a,b) деп белгіленеді; осы нүктелердің біреуі еніп екіншісі енбесе, онда аралық **жартылай интервал** немесе **жартысегмент** деп аталады да $[a,b)$ немесе $(a,b]$ деп белгіленеді. Интервал өзіне енетін кез келген нүктенің **маңайы** деп аталады. Центрі x_0 нүктесінде болатын ұзындығы $2e$-ге тең интервал осы нүктенің e-маңайы деп аталды да $O_e(x_0)=(x_0-e, x_0+e)$ деп белгіленеді.

Нақты сандар жиынының негізгі қасиеті-оның үзіліссіздігі. Бұл қасиет төмендегі теорема түрінде айтылады:

Теорема 1 Ұзындықтары нөлге ұмтылатын, бірінің ішінде бірі орналасқан сегменттердің бәріне ортақ тек қана бір нүкте бар болады.

Төмендегі суретте осы теореманың геометриялық нұсқасы көрсетілген.



Мұндағы $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$ және $[a_n,b_n]$ сегментінің ұзындығы b_n-a_n нөлге ұмтылатын шама, ал $\tilde{x}$ осы сегменттердің бәріне ортақ нүкте.

Өлшеу процесін қолдануға болатын әрбір объектің сандық мәні *шама* деп аталады. Табиғатты зерттейтін ғылым саласының тек өзіне тән шамалары болады. Атап айтқанда: физикада–салмақ, масса, жылу сыйымдылығы т.с.с.; химияда-атомдық салмақ, валенттілік, т.т.; геометрияда–кесіндінің ұзындығы, фигураның ауданы, дененің көлемі т.с.с.

Белгілі бір сандық мәнін сақтайтын **шама тұрақты** деп аталады. Әр түрлі сандық мәндер қабылдай алатын шама **айнымалы** делінеді. Әдетте, тұрақты шама латын алфавитінің алғашқы әріптерімен $(a,b,c,\ldots)$ айнымалы шама соңғы әріптерімен $(x,y,z,\ldots)$ белгіленеді.

2. Функция түсінігі

2.1Функцияның анықтамасы.

Айталық, бізге нақты сандардан тұратын X және Y жиындары берілсін.

Анықтама. Егер белгілі бір ереже немесе заң бойынша X жиынының әрбір элементі x-ке Y жиынының тек қана бір элементі y сәйкес келсе, онда X жиынында бір мәнді $y=f(x)$ функциясы анықталған дейді. Бұл ережені немесе заңды X жиынын Y жиынына бейнелеу деп те атайды.

Осы анықтамадағы X жиынын $y=f(x)$ функциясының анықталу облысы, ал Y жиынын $y=f(x)$ функциясы мәндерінің жиыны немесе функцияның өзгеру облысы деп, x - ты тәуелсіз айнымалы немесе аргумент деп, ал y - ті тәуелді айнымалы немесе функциясы деп атайды.

Тәуелсіз айнымалы x - тың кейбір x_0 мәніне сәйкес тәуелді айнымалы (функция) $y=f(x)$-тің мәнін функцияның $x=x_0$ болғандағы (немесе x_0 нүктесіндегі) мәні деп атайды және $y_0=f(x_0)$ символымен белгілейді.

Мысалы, $y = 3x^2 - 1$ функциясы берілсе, оның $x_0 = -1$ нүктесіндегі мәні $y_0 = f(-1) = 2$.

Егер X сан осінің бойында жатқан жиын болса, онда $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы не интервал $(a;b)$, не сегмент $[a;b]$, не жартылай түзулер $[a;+\infty), (-\infty;a]$ немесе бүкіл сан осі $(-\infty;+\infty)$ болуы мүмкін. Сонымен қатар функцияның анықталу облысы бірнеше аралықтың бірігуі болуы мүмкін.

Мысалы, $y = \lg\dfrac{1-x}{x^2 - x - 6}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция айнымалы x - тың мына $\dfrac{1-x}{x^2 - x - 6} > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын мәндерінде анықталған. Сонда бұл теңсіздіктен $(1-x)(x^2 - x - 6) > 0$ немесе $(x-1)(x+2)(x-3) < 0$ теңсіздігі шығады. Демек, берілген функцияның анықталу облысы екі аралықтан тұрады: $(-\infty;-2)$ және $(1;3)$. Яғни, $X = (-\infty;-2) \cup (1;3)$.

Бір X жиынында берілген $f(x)$ және $j(x)$ функцияларына қосу $f(x) + j(x)$, азайту $f(x) - j(x)$, көбейту $f(x) \cdot j(x)$, бөлу $\dfrac{f(x)}{j(x)}$, $j(x) \neq 0$ амалдарын қолдануға болады, сонда осы амалдар орындалғаннан кейін шығатын функциялардың да анықталу облысы X немесе оның бөлігі болуға тиіс.

Мысалы, мына $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ формуламен берілген функцияны қарастырайық. Бұл функция екі функцияның қосындысынан тұрады. Олардың біреуі $f(x) = \sqrt{x}$, ал екіншісі $j(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. Бірінші функцияның анықталу облысы $x \geq 0$, яғни $[0;+\infty)$. Екінші функцияның анықталу облысы $1 - x > 0$, немесе $(-\infty;1)$. Сонда осы екі функцияның қосындысы болып табылатын бастапқы $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ функциясының анықталу облысы (қосылғыш функциялардың анықталу облыстарының көбейтіндісі) жартылай интервал $[0;1)$ болады.

$y = f(x)$ **функциясының графигі** деп, координаттары берілген функционалдық тәуелділікті қанағаттандыратын, жазықтықтағы нүктелер жиынын айтады, $M(x; f(x))$ нүктелер жиыны.

Функциялардың графиктері көбінесе қисық сызықтар немесе түзулер болады.

2.2Функцияның берілу тәсілдері.

Функцияның берілуінің бірнеше тәсілдері бар. Солардың негізгілері – аналитикалық, таблица түрінде, графикпен және сөзбен берілу тәсілдері.

Айнымалылар арасындағы сәйкестік формуламен берілсе, онда функция аналитикалық түрде берілді дейді.

Мысалы, $y = 10x$, $\quad y = tg\dfrac{x}{2}$, $\quad y = x + \lg(\cos x)$.

Аналитикалық тәсілмен берілген функцияның ықшамдығы оның зерттеулерде қолданылуының қолайлығын арттырады және берілген функцияны зерттегенде математиканың аппаратымен пайдалануға өте жақсы бейімделген.

Функцияның таблицалық әдіспен берілу тәсілі эксперименттік жұмыстарда қолданылады. Мұның артықшылығы аргументтің әрбір мәніне сәйкес функцияның мәні тікелей табылатындығында. Сонымен бірге аргументтің өзгеруіне байланысты функцияның өзгеру заңдылығы таблицадан байқалмайды және математикалық амалдар қолдануға өте ыңғайсыз.

Функцияның графикпен берілу тәсілі көп тараған әдіс. Оның басқалардан артықшылығы – оның көрнектілігінде. өйткені аргументтің өзгеруіне байланысты функцияның өзгеруінің бағыттарын тыңғылықты байқап отыруға болады.

2.3Функциялардың классификациясы.

Негізгі элементар функциялар деп келесі функцияларды айтады: тұрақты функция $y = c, c = const$, дәрежелік функция $y = x^a$ (a - кез келген сан), көрсеткіштік функция $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, логарифмдік функция $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометриялық функциялар: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$ және кері тригонометриялық функциялар: $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$.

Алгебралық амалдарды, тиісті композицияларды қолданып жоғарыда аталған негізгі элементар функциялар тобынан құрылған күрделі функцияларды **элементар функциялар** деп атайды. Мысалы, $y = tg(\ln x),\quad y = ctg\sqrt{1-x^2},\quad y = \log_3 \sin x + x^2$.

Барлық элементар функциялар **алгебралық** және **трансценденттік** функциялар болып екі класқа бөлінеді. Алгебралық функцияларға бүтін-рационал, бөлшек-рационал, иррационал функциялар жатады.

Кез келген иррационал емес функция трансценденттік функция болып табылады. Мысалы, $y = \sin x,\ y = \sin x + x$ және т.с.с.

Мысалы, $y = \frac{3ax^3 - \sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}+5}$ - алгебралық, ал $y = 2^x$, $y = \log_5 x$, $y = \sin x$, $y = \arg tgx$ т.б,– трансценденттік функциялар.

Айқындалған және айқындалмаған функциялар.

$y = f(x)$ түрінде берілген функция айқындалған деп аталады. Мысалы, $y = \sqrt[3]{x^2-1}$, $y = \ln\cos x$, $y = x$ – айқындалған функциялар. $F(x,y)$ түрінде берілген функция айқындылмаған деп аталады, мысалы, $x^2 + y^2 = 1$, $xy - y^2 - 15 = 0$– айқындалмаған функциялар.

Бір мәнді және көп мәнді функциялар. $y = 1-3x$, $y = \sin x$, $y = 5^x$,– бір мәнді, ал $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $y = \arg\sin x$, $y = \arg tgx$ – көп мәнді функциялар.

Кері функция. Берілген функцияға кері функцияның болу шарты:

Егер $y = f(x)$ функциясы $\langle a;b \rangle$ аралығында бірсарынды және бір мәнді болып, осы аралықта $\langle c;d \rangle$ аралығында бейнелесе, онда кері функция $x = j\,(y)$, бар болады және $(c;d)$ аралығында бір мәнді және бірсарынды функция болады.

Мысалы $y = 2x+4$, сандар өсінде анықталған және осы аралықта өспелі функция. Сондықтан $(-\infty;+\infty)$ аралығында анықталған $x = \frac{y-4}{2}$ кері функция бір мәнді және бірсарынды. Осы функциядағы аргументі мен функцияның әдеттегідей x, y деп белгілесек, бұл функция, $y=\frac{x-4}{2}$ түрінде жазылады. Демек, $y=2x+4$ пен $y=\frac{x-4}{2}$ - функциялары өзара кері болады.

Дәл сол сияқты $y=a^x$ және $y=\log_a x,$ функциялары өзара кері.

Күрделі функция.

$z=\varphi(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында анықталып өзгеру облысы $(c;d)$ болсын және $(c;d)$ аралығында $y=f(z)$ функциясы анықталсын. Соңғы теңдіктегі z - ті оның мәнімен ауыстырып, $y=f(\varphi(x))$ функциясына келеміз. Бұл жаңа функция $(a;b)$ аралығында анықталған. Осы функцияны функциядан функция алу әдісімен анықталған *күрделі функция* деп атайды. (Функциялар суперпозициясы).

Мысалы: $z=x^2+1,$ $y=\sqrt{2z+3},$ деп алып, $y=\sqrt{2(x^2+1)+3}$ - күрделі функциясын құрамыз.

3. Тізбек және тізбектің шегі

Натурал сандар жиынында анықталған f функциясының мәндерін сан тізбегі немесе тізбек деп атайды.

Егер $f(n)=a_n$ тізбегі берілсе, оны $\{a_n\}$ символымен белгілейді немесе былай жазады: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

Анықтама 1. Егер кез келген n үшін $a_{n+1}\geq a_n$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін өспелі дейді.

Анықтама 2. егер кез келген n үшін $a_{n+1}\leq a_n$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін кемімелі дейді.

Анықтама 3. егер кез келген n үшін $(a_n)\leq M$ теңсіздігін қанағаттандыратындай оң M саны табылса, онда $\{a_n\}$ тізбегін шектелген деп атайды.

Анықтама. Егер әрбір алдын ала берілген $e>0$ санына сәйкес N натурал саны табылса және кез келген $n>N$ нөмірлері үшін $|a_n-a|<e$ теңсіздігі орындалса, онда a санын $\{a_n\}$ тізбегінің шегі деп атайды. Жазылуы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ немесе $n\to\infty$ ұмтылғанда $a_n\to a$ деп жазады.

Мысалы, $\frac{5}{7};\frac{7}{10};\frac{9}{13};\frac{11}{16};...\frac{2n+3}{3n+4};...$ тізбектің шегін табу керек.

Шешімі. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}=\frac{2}{3}$ болады.

Анықтама. Шегі бар тізбекті жинақты деп, шегі жоқ тізбекті жинақсыз деп атайды. Егер тізбектің шегі бар болса, онда тізбек шектелген болады. Жинақты тізбектің бір ғана шегі бар. Жоғары (төменгі) жағынан шектелген өспелі (кемімелі) тізбектің шегі бар.

Анықтама. Егер тізбектің шегі нөльге тең болса, онда мұндай тізбекті шексіз аз деп атайды.

Теорема 1. Екі шексіз аз тізбектердің қосындысы шексіз аз болады.

Теорема 2. Шектелген тізбектің шексіз аз тізбекке көбейтіндісі шексіз аз тізбек болады.

Анықтама. Егер кез келген $A > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $(a_n) > A$ теңсіздігі орындалса, онда $\{a_n\}$ тізбегін шексіз үлкен шама дейді және былай жазады: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Теорема 3. Егер $\{a_n\}$ тізбегі, $a_n \neq 0$ шексіз үлкен болса, онда $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ тізбегі шексіз аз және керісінше $\{a_n\}$ тізбегі шексіз аз болса, онда $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ тізбегі шексіз үлкен.

Теорема 4. Егер $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ тізбектері жинақты болса, онда

1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$;

2) $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$;

3) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (\lim b_n \neq 0)$;

4) $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n$.

Егер $a_n \leq b_n$, онда $\lim a_n \leq \lim b_n$

Анықталмаған өрнектер. Ақырлы шегі бар шамаларға арифметикалық амалдар қолдану нәтижесінде шекке көшкенде ешбір мазмұны жоқ, анықталмаған өрнекте деп аталатын, өрнектер шығуы мүмкін. Ондай жағдайларда айнымалы шаманың шектік мәнін табуға көшпес бұрын шыққан өрнектерді түрлендіру керек.

1) берілген айнымалылар x_n мен y_n үшін $\lim x_n = 0$ және $\lim y_n = 0 \quad (y_n \neq 0)$ болсын. Онда олардың қатынасының $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ шегі $\left(\lim \frac{x_n}{y_n}\right)$ $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болады. Себебі бұл екі айнымалының өзгеру заңына байланысты, бұл шек неше түрлі мәнге ие болуы мүмкін немесе шектің болмауы да мүмкін.

Мысалы, егер $x_n = \frac{1}{n^3}$, $y_n = \frac{1}{n}$ болса, олардың қатынасының $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ шегін табу керек. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$ яғни $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады. Бірақ, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^3} : \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Ақырсыз аз шамаларды салыстыру. Ақырсыз аз $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ шамалары берілсін $(a_n \to 0, b_n \to 0)$. Осы шамаларды салыстыру денеміз $\frac{a_n}{b_n}$

қатнасының шегін табу. Бұл қатынас $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық деп аталады.

Анықтама 5 Егер ақырсыз $\{a_n\}$ және $\{b_n\}$ шамалары үшін:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ болса, онда $\{a_n\}$ шамасы b_n-мен салыстырғанда **жоғарғы ретті ақырсыз аз шама** деп аталады, ал b_n шамасы a_n-мен салыстырғанда **төменгі ретті ақырсыз аз шама** деп аталады.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A, \quad A\neq 0$ болса, онда a_n мен b_n **бір ретті ақырсыз аз шамалар** деп аталады.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ болса, онда a_n мен b_n **эквивалентті** ақырсыз аз шамалар деп аталады.

Жиі қолданылатын шектер

$\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n}=1$ – бірінші тамаша шек.

$\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$ – екінші тамаша шек.

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n=1,2,...,$ тізбегі үшін $2<a_n<3$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\{a_n\}$ жоғарыдан шенелген өспелі тізбек.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

шегі бар болады. e санының жуық мәні $e\approx 2{,}72$ болатыны дәлелденген. Бұл сан Непер саны деп аталады.

4. Функцияның шегі.

$y=f(x)$ **функциясы** $x=x_0$ **нүктесінің манайында (мүмкін сол нүктенің өзінен басқа) анықталсын.**

Анықтама Егер кішкене $e>0$ саны үшін, осы саннан тәуелді $d=d(e)$ санын $|x-x_0|<d$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x нүктелерінде $|f(x)-A|<e$ теңсіздігі орындалатындай етіп табуға болса, онда A саны $f(x)$-тің x_0 нүктесіндегі шегі деп аталадыда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ деп белгілінеді. Аталған шек $f(x)\to A, \quad x\to x_0$ түрінде де жазылады.

Мысалы, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=7$ екенін дәлелдейік. Кез келген $e>0$ саны үшін $|(2x+5)-7|<e$ деп алып, $|x-1|<\frac{e}{2}$, болатынын көреміз. Демек, $d=\frac{e}{2}$. Яғни, $|x-1|<d,$ болса, $|(2x+5)-7|<e$ болады.

Анықтама Бізге E жиынындағы сандардан құралған кез келген $\{x_n\}$ тізбегі, яғни $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ берілсін. Ол тізбек x_0 нүктесіне жинақталатын (шегі бар) тізбек болсын, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ($x_n \neq x_0$, n - кез келген натурал сан). Сонда, егер осы $\{x_n\}$ тізбегінің мәндеріне сәйкес берілген функция мәндерінің тізбегі $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n),...$ әрқашан да бір А санына жинақталатын болса, онда $f(x)$ функциясы А санына ұмтылады дейді де, А санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі $(x_n \to x_0)$ шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$\lim\limits_{x_n \to x_0} f(x_n) = A$.

Бұл екі анықтама эквивалентті анықтамалар.

Шектер туралы теоремалар және оларды шешу тәсілдері :

Теорема 1 $\lim(y+z) = \lim y + \lim z$. Қосындының шегі шектердің қосындысына тең.

Теорема 2 $\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$. Көбейтіндінің шегі шектердің көбейтіндісіне тең.

Теорема 3 $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$, $\lim y \neq 0$. Егер $\lim y \neq 0$ болса, онда бөлшектің шегі алымының шегін бөлімнің шегіне бөлгенге тең.

Теорема 4 $\lim C = C$. Тұрақты шаманың шегі сол шаманың өзіне тең.

Теорема 5 $\lim Cy = C \lim y$. Тұрақты шаманы шектің сыртына шығаруға болады.

Шектерді есептеу мысалдар:

Мысал 1 Шек астындағы бөлшекті (x-2)-ге қысқартып

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3x-10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7}$$

Мысал 2

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3-4)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Мысал 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$$

Мұндағы $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$ (бірінші тамаша шек)

Мысал 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Бесінші және алтыншы мысалдардағы шектер бізге белгілі $\lim\limits_{z\to\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$ немесе $\lim\limits_{a\to 0} (1+a)^{\frac{1}{a}} = e$ (екінші тамаша шек) теңсіздіктерін қолдану арқылы есептеледі.

Мысал 5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k=e^k$$

Мысал 6

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}(1+(1-x))^{\frac{1}{1-x}}=e$$

Ескерту: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ шегі $\dfrac{0}{0}$ анықталмағандығын, ал $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ және $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ шектері 1^{∞} анықталмағандығын айқындайды.

Анықтама $y=f(x)$ функциясының $x<x_0$ болып x-тің x_0-ге ұмтылғандағы A_1-ге тең шегі осы функцияның **сол жақты шегі** деп аталады да $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A_1$ деп белгіленеді, ал $x>x_0$ болып x-тің x_0-ге ұмтылғандығы A_2-ге тең шегі функцияның ***оң жақты шегі*** деп аталады да, $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A_2$ деп белгіленеді.

Егер $y=f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде және осы нүктенің маңайында анықталып, $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $x=x_0$ нүктесінде үзіліссіз болады.

Егер осы екі теңдіктің ең кемінде біреуі орындалмаса, онда $x=x_0$ үзіліс нүктесі деп аталады. Үзілістің екі түрі бар:

1. Секірме үзіліс, егер $A_2\neq A_1$ болып $f(x_0)\neq A_1$, $f(x_0)=A_2$ немесе $f(x_0)\neq A_2$, $f(x_0)=A_1$ немесе x_0 нүктесінде $y=f(x)$ анықталмаса.

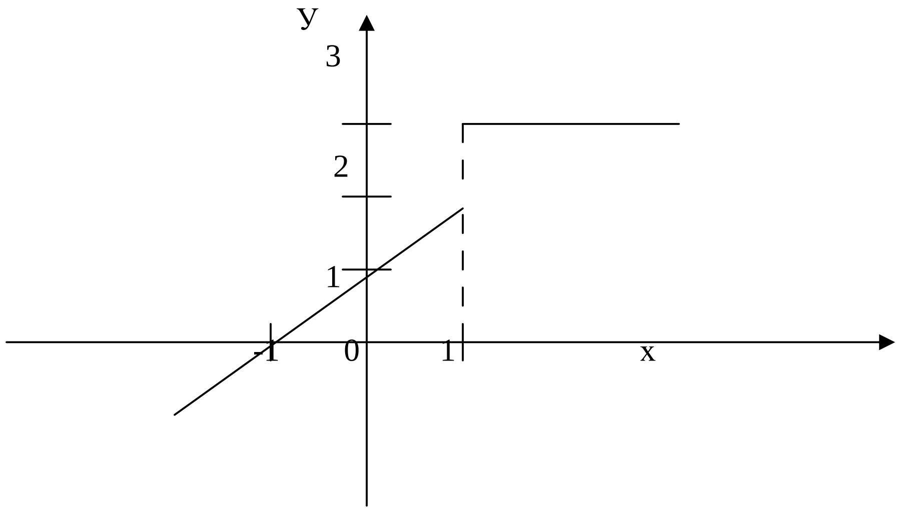
2. Шексіз үзіліс.

Мысал 1

$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 3, & x>1\end{cases}$ функциясы үшін

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2\quad \lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}3=3$$

теңдіктері орындалады, демек $x=1$ - секірме үзіліс нүктесі; секіріс $3-2=1$-ге тең.



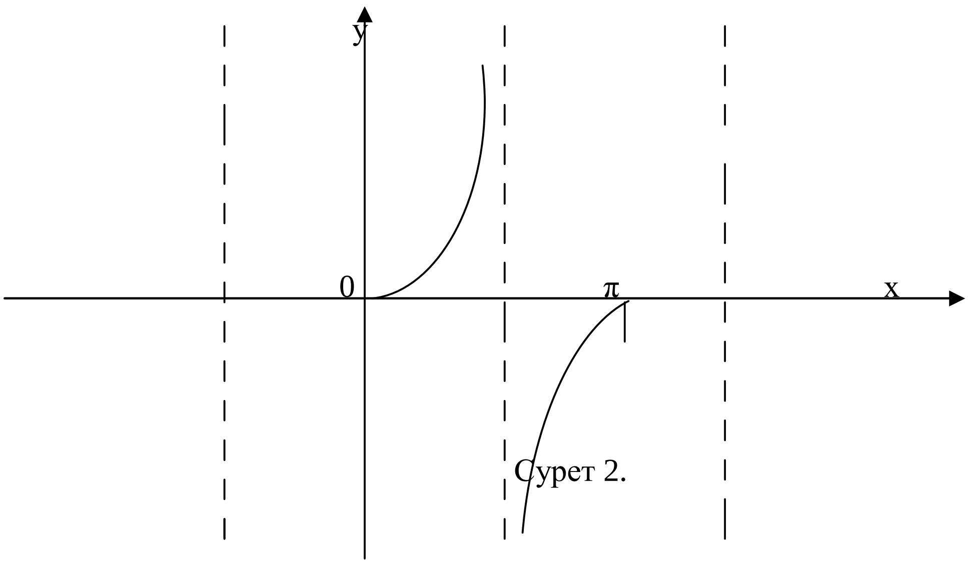
Сурет 1.

Мысал 2

$f(x) = tgx, \quad x \in [0; p],$ функциясын $x = \frac{p}{2}$ нүктесінде функцияны үзіліссіздікке зерттейік.

$$\lim_{x \to \frac{p}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{p}{3} - 0} tgx = \infty \quad \lim_{x \to \frac{p}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{p}{3} + 0} tgx = -\infty$$

теңдіктері орындалады, демек $x = \frac{p}{2}$ шексіз үзіліс нүктесі. (Сурет-2)



Сурет 2.

Тақырып 3. Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі

Жоспар:

1. Туындының анықтамасы. Туындының механикалық мағынасы

2. Туындының геометриялық мағынасы

3. Функцияның дифференциалдануы

4. Функцияның дифференциалы

5. Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Лейбниц формуласы

6. Дифференциалданатын функциялардың негізгі теоремалары

7. Туынды арқылы функцияның зерттеу

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

1 Туындының анықтамасы. Туындының механикалық мағынасы.

Түзу сызықты қозғалыстың жылдамдығын қарастырайық. Дене түзу сызық бойымен және t уақыт ішінде s жолын жүрсін, яғни s қашықтық t уақыттың функциясы берілсін: $s = f(t)$. Бұл қозғалыс теңдеуі.

Дене қозғалысын уақыттың t_0 мезгілінен $t_0 + \Delta t$ мезгіліне дейін, яғни Δt интервалында қарастырамыз. Дене Δt уақытта $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ жол жүреді.

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ қатынасын дене қозғалысының Δt уақыты ішіндегі **орта жылдамдығы** деп аталады және белгілеуі: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{орта}$.

Шекке көшеміз: $\lim v_{орта} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = v$.

Анықтама. Жол өсімшесінің уақыт өсімшесіне қатынасының уақыт өсімшесі нөльге ұмтылғандағы шегі: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$ теңдігімен анықталатын v шамасын дене қозғалысының $t = t_0$ мезгіліндегі **лездік жылдамдығы** деп аталады.

Айталық, X аралығында $y = f(x)$ функциясы анықталсын. Бұл аралықтан x_0 нүктесін алып, оған Δx өсімшесін берейік. Сонда $y = f(x)$ функциясы да өсімше қабылдайды: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, мұнда $x_0 + \Delta x \in X$.

Анықтама. Егер Δx нөльге ұмтылғанда функция өсімшесі мен аргумент өсімшесі қатынасының шегі бар болса, онда бұл шек берілген функцияның x_0 нүктесіндегі **туындысы** деп аталады: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Туындыны табу амалын функцияны дифференциалдау деп атайды. Жоғарыда қарастырылған физикалық есепте айнымалы жылдамдық жүрген жолдың туындысына тең: $v = f'(t)$. Бұл есеп туындының механикалық мағынасын анықтайды.

2 Туындының геометриялық мағынасы

L қисық сызықтың бойынан екі нүкте M және N алайық және сол нүктелер арқылы қиюшы жүргізейік. M нүктесін қозғалмайды деп есептеп, N нүктесін L қисығы бойымен M нүктесіне дейін жүргізейік. Егер $MN \to 0$, онда MN түзуі MP -ға ұмтылады.

Анықтама. M нүктесі N нүктесіне ұмтылғанда қиюшы MN мен түзу MP арасындағы j бұрыш нөльге ұмтылса, онда MP түзуін L қисық сызықтың M нүктесіндегі **жанамасы** деп атайды.

Айталық, $f(x)$ -тың $x = x_0$ нүктесіндегі туындысы $f'(x_0)$. Қиюшы MN Ox осімен b бұрыш жасайды. Сонда $tgb = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ немесе $b = arctg \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Егер $\Delta x \to 0$, онда

1) $N \to M$;
2) $MN \to MP$;
3) $b \to a$, онда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} arctg \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = arctg \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = arctg\, f'(x_0)$.

$\lim b = arctg\, f'(x_0)$, онда $\lim b = a \;\; \Rightarrow \;\; arctg\, f'(x_0) = a \;\; \Rightarrow \;\; f'(x_0) = tga$.

Сонымен, туынды $f'(x)$ $y = f(x)$ функцияның $M(x, y)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен Ox осінің оң бағытының арасындағы бұрыштың тангенсін кескіндейді.

Онда жанаманың теңдеуі: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Осы нүктедегі жанамаға перпендикуляр түзуді **нормаль түзу** деп атайды; оның теңдеуі: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

3 Функцияның дифференциалдануы

Функцияның туындысын табу амалын дифференциалдау деп, ал туындысы бар функцияны дифференциалданатын функция деп атайды.

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = f(x)$ функциясы осы нүктеде үздіксіз болады, ал үзіліс функцияның x_0 нүктеде туындысы болмайды.

Арифметикалық амалдардың дифференциалдау ережелері: Айталық,, u және v үздіксіз функциялары берілсін. Екі функцияның алгебралық қосындысының, көбейтіндісінің және қатынасының туындылары бар болады да мына формулалар бойынша табылады:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$$

Егер көбейтіндіде көбейткіштің біреуі тұрақты шама болса, онда $(C \cdot u)' = C'u + Cu' = Cu'$, өйткені тұрақты шаманың туындысы нөльге тең.

Күрделі функцияның дифференциалдануы: Егер $u = j(x)$ функциясының x нүктесінде, ал $y = f(u)$функциясының сол x-ке сәйкес $u = j(x)$ нүктесінде туындылары бар болса, онда сол x нүктесінде күрделі $y = f(j(x))$ функциясының да туындысы бар болады және мынаған тең: $y'_x = [f(j(x))]' = f'_u(j(x)) \cdot j'(x) = f'_u \cdot j'_x$.

Мысалы: $y = (2x^2 - 1)^3, \quad y' = ?$

$u = 2x^2 - 1 \Rightarrow y = u^3$

$y' = (u^3)'u' = (u^3)'(2x^2 - 1)' = 3u^2 \cdot 4x = 3(2x^2 - 1) \cdot 4x = 48x^5 - 48x^3 + 12x$.

Кері функцияның дифференциалдануы: Егер $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөльге тең емес $f'(x)$ туындысы бар болса, онда сол x-ке сәйкес $y_0 = f(x_0)$ нүктесінде оған кері $x = j(y)$ функциясының туындысы бар болады және $x'_y = j'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Мысалы: $y = \sqrt[3]{x}$. Осы функцияға кері функция: $x = y^3$ және $x'_y = 3y^2$. Олай болса, $y'_x = \dfrac{1}{3y^2}$.

Дәрежелік функцияның туындысы: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Тригонометриялық функциялардың туындысы:

$(\sin x)' = \cos x$; $\quad (\cos x)' = -\sin x$; $\quad (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Кері тригонометриялық функциялардың туындысы:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad (arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Логарифмдік және көрсеткіштік функциялардың туындылары:

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(a^x)' = a^x \ln a$; $(e^x)' = e^x$

Логарифмдік дифференциалдау тәсілі: $y = [u(x)]^{v(x)}$ көрсеткішті-дәрежелік функцияның туындысын анықтайық. Ол үшін берілген функцияны логарифмдеп, содан кейін логарифмдеу нәтижесінде шыққан функцияға дифференциалдау ережелерін қолданамыз.

Сонымен $y = u^v$ функциясын логарифмдесек $\ln y = v \ln u$ болады. Осы өрнектен күрделі функцияның туындысының формуласы бойынша:

$(\ln y)' = (v \ln u)'$; $\dfrac{1}{y} y' = v' \ln u + v \dfrac{1}{u} u'$; $y' = u^v [v' \ln u + v \dfrac{1}{u} u']$;

Мысалы: $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ функциясының туындысын табу керек.

$\ln y = \dfrac{1}{x} \ln \cos x$, $(\ln y)' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \ln \cos x + \dfrac{1}{x} \cdot (\ln \cos x)' \cdot (\cos x)'$

$\dfrac{1}{y} y' = -\dfrac{1}{x^2} \ln \cos x - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \cdot \sin x$, $y' = y[-\dfrac{1}{x^2} \ln \cos x - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}]$

$y' = (\cos x)^{\frac{1}{x}} \cdot [-\dfrac{1}{x^2} \ln \cos x - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}]$.

Айқындалмаған функциялардың туындылары: Айталық, y x-тің айқындалмаған функциясы, яғни x тәуелсіз айнымалыны y функциясымен байланыстыратын, y-ке қатысты шешілмейтін, қандай да бір теңдеу арқылы беріледі. Онда y функциясы x-тен тәуелді екенін есепке ала тұра, бұл теңдеуді x бойынша дифференциалдаймыз.

Мысалы: $x^2 + y^2 = 1$ теңдеуімен берілген y функциясының туындысын табу керек.

$(x^2 + y^2)' = (1)'$, $2x + 2yy' = 0$, $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Параметр арқылы берілген функцияның туындысы: Айталық, функция y-тің аргументі x-тен тәуелділігі параметр t арқылы берілсін: $\begin{cases} x = j(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $t \in (a,b)$ және $j(t)$, $f(t)$ функциялардың туындылары бар болсын. Бұл тәуелділікті былай түсінуге болады: егер $x = j(t)$ функцияның кері функциясы $t = j^{-1}(x)$ бар болса және $(j^{-1}(x))' = t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, онда бір формуладан тұратын теңдікке келуге болады: $y = f(j^{-1}(x))$. Енді күрделі функцияны дифференциалдау ережесін пайдаланамыз: $y'_x = f'(t) \cdot t'_x$. Осыдан $y'_x = \dfrac{f'(t)}{j'(t)} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Екінші ретті туынды: $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ және үшінші ретті туынды: $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$.

4 Функцияның дифференциалы

Айталық, $f(x)$ функциясының шектелген туындысы бар болсын, онда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}= f'(x)$, демек $\frac{\Delta y}{\Delta x}= f'(x)+a(\Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}a(\Delta x)=0$, a - шексіз аз шама.
Онда функцияның өсімшесі: $\Delta y= f'(x)\Delta x+a(\Delta x)\cdot\Delta x$. Осы теңдікте екінші қосылғыш жоғары ретті шексіз аз шама болғандықтан, бірінші қосылғыш функция өсімшесіне эквивалентті болады.

Анықтама. Функцияның туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісі **дифференциал** деп аталады және мына түрде жазады: $dy = f'(x)\Delta x$.

Онда жоғарыда берілген теңдіктің бірінші қосылғышы дифференциал болады. Дербес жағдайда, егер $y=x$ болса, онда $dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x$, яғни $dx=\Delta x$ және осыны пайдаланып дифференциалдың формуласын келесі түрде жазуға болады: $dy= f'(x)dx$.

Осыдан $f'(x)=\frac{dy}{dx}$, яғни туынды функция дифференциалының аргумент дифференциалына бөлінген мәніне тең.

Дифференциалдың қасиеттері:

Негізігі элементар функциялардың туындыларын біле тұрып, біз еш қиындықсыз осы функциялардың дифференциалдарының кестесін құрастыра аламыз.

Айталық, $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, $d(a^x)=a^x\ln a dx$, т.с.с.

Арифметикалық амалдар нәтижелерінің дифференциалдары:

$d(u+v+...+w)=du+dv+...+dw$;

$d(uv)=vdu+udv$;

$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$.

Күрделі функцияның дифференциалы:

Айталық, $y= f(u)$ және $u=j(x)$ - үзіліссіз функциялар және олардың туынддылары: $f'(u)$, $j'(x)$. Егер $F(x)= f[j(x)]$ белгілесек, онда $y'=F'(x)= f'(u)j'(x)$. Екі жағын dx-ке көбейтеміз: $dy= f'(u)j'(x)dx$, ал $j'(x)dx=du$, олай болса, $dy= f'(u)du$.

Функцияның дифференциалдануы.

Анықтама. $f(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданады, егер оның осы нүктеде дифференциалы болса.

Егер $f(x)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда ол міндетті түрде үзіліссіз болады.

Дифференциалды жуықтап есептеулерге пайдалану.

$\Delta y= f'(x)\Delta x+a(\Delta x)\cdot\Delta x$

$f(x+\Delta x)- f(x)\approx f'(x)\Delta x=dy$

$f(x+\Delta x)- f(x)\approx f'(x)\Delta x$. Соңғы жуықталған теңдік ең алдымен тәжірибелік тұрғыдан қарағанда келесі есепті шешу үшін қолданады: $f(x_0)$, $f'(x_0)$, Δx мәндері белгілі; $f(x_0+\Delta x)$-тің жуық мәнін есептеу керек. Сонда төменгі формула анықталады: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+ f'(x_0)\Delta x$.

Мысалы: $\sqrt[3]{8,001}$ мәнін табу керек: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8$, $\Delta x=0.001$, демек $f(x_0)=2$. Ал $f'(x)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(x_0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$. Сонда $f(8.001)=\sqrt[3]{8.001}\approx 2+\frac{1}{12}\cdot 0.001\approx 2.0002$.

5 Жоғары ретті туындылар мен дифференциалдар. Лейбниц формуласы.

Егер $y=f(x)$ функциясының туындысы бар болса, онда оны $f'(x)$ деп белгілеп, бірінші ретті туынды деп атаймыз. Осы 1-ші ретті туындыны бөлек функция деп қарастырайық, онда оның туындысы бар болуы мүмкін және $f''(x)$ екінші ретті туынды деп аталады. Сол сияқты функцияның n-ші ретті туындысын жазуға болады: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$ немесе $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Мысалдар:

$(e^x)^{(n)}=e^x$

$(a^x)^{(n)}=a^x\ln a$

$(x^m)^{(n)}=m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n}$

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{np}{2})$

$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{np}{2})$.

Егер u және v дифференциалданатын функциялар болса, онда сызықты комбинация үшін келесі формула орынды: $(c_1u+c_2v)^{(n)}=c_1u^{(n)}+c_2v^{(n)}$, $(c_1,c_2-const)$, ал олардың көбейтіндісі үшін:

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot u^{(n-2)}\cdot v''+...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\cdot u^{(n-k)}\cdot v^k+...$$

$$+u\cdot v^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m u^{(n-m)}v^{(m)}$$

Бұл формула **Лейбниц формуласы** деп аталады.

Мұнда $u^{(0)}=u,\quad v^{(0)}=v$; $C_n^m=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - бином коэффициенттері.

Жоғары ретті дифференциалдар

Функцияның бірінші ретті дифференциалы келесі формуламен анықталады: $dy=f'(x)dx$, ал екінші ретті дифференциалы: $d^2y=f''(x)dx^2$, $d^2y=d(dy)$.

Сол сияқты n-ші ретті дифференциал мына формуламен анықталады: $d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)dx^n$. Бұл формуладан: $y_x^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ n-ші ретті туынды шығады.

6 Дифференциалданатын функциялардың негізгі теоремалары.

Ферма теоремасы. Айталық, $y = f(x)$ функциясы қандайда бір аралықта анықталсын.Осы аралықтың ішкі x_0 нүктесінде ең үлкен немесе ең кіші мәндерін қабылдайтын болса, онда бұл нүктедегі туындысы нөльге тең болады: $f'(x_0) = 0$.

Ферма теоремасының геометриялық мағынасы: функцияның графигіне жүргізілген жанама оның ең үлкен немесе ең кіші нүктесінде абсцисса осіне параллель болып орналасады.

Ролль теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндіде үзіліссіз және осы интервалдың ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, $f(a) = f(b)$ теңдігі орындалса, онда $[a;b]$-да ең болмағанда бір x_0 нүктесі табылып, сол нүктеде $f'(x_0) = 0$ болады.

Лагранж теоремасы. Егер $[a;b]$ сегментінде $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз, $(a;b)$ аралығында дифференциалданса, онда сол аралықта кем дегенде бір x_0 нүктесі табылып, келесі теңдік орындалады: $f(a) - f(b) = f'(x_0) \cdot (b - a)$.

Коши теоремасы. Айталық, $[a;b]$ сегментінде $f(x)$ және $g(x)$ функциялары анықталсын, сол кесіндіде үзіліссіз және оның ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда бір x_0 нүктесі табылып, сол нүктеде төмендегі теңдік орындалады: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Лопиталь ережесі. $u(x)$ және $v(x)$ функциялары $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын және $x = c$ нүктесінде нөльге айналатын болсын. Сонда егер тиісті шектер бар болса: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$, $v(x) \neq 0, \quad v'(x) \neq 0$, онда осы өрнектер бойынша табылған шектерді анықталмағандықтың түрін айқындаудың Лопиталь ережесі деп аталады.

7 Туынды арқылы функцияның зерттеу.

Дифференциалдық есептеудің ең маңыздысы – оны функцияның зерттеуіне қолдану, әсіресе бірінші ретті туындыны қолдану.

Функцияның монотондылығы. Айталық, $[a;b]$ кесіндіде $f(x)$ функциясы анықталсын және кесіндінің ішінде дифференциалданатын болсын, онда

1) $f(x)$ функциясы $[a;b]$-да кемімейтін (өспейтін) функция болу үшін $\forall x \in (a;b)$, $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) теңсіздіктердің орындалуы қажетті және жеткілікті.

2) $f(x)$ функциясы $[a;b]$-да өспелі (кемімелі) болуы үшін $\forall x \in (a;b)$, $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) теңсіздіктердің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама. $f(x)$ функциясының туындысын нөльге айналдыратын нүктелерді **кризистік нүктелер** деп атайды.

Кризистік нүктелерді табу үшін $f'(x) = 0$ теңдеуін шешу керек.

Функцияның монотондылық аралықтарын табу үшін:

1) берілген функцияның анықталу облысын табамыз;
2) берілген функцияның кризистік нүктелерін табамыз;
3) кризистік нүктелер функцияның анықталу облысын интервалдарға бөледібұл интервалдардың әрқайсынды туынды тұрақты таңбаларын сақтайды;

4) $f'(x) > 0$ болатын интервалда функция қатал өседі, ал $f'(x) < 0$ болатын интервалда қатал кемиді.

Функцияның экстремум нүктелері.

Анықтама. Бір аралықта анықталған және үзіліссіз болатын $y = f(x)$ функциясы берілсін. x_0 осы аралықта ішкі нүктесі. Егер x_0 нүктесінің $(x_0 - d; x_0 + d)$ аймағының ішінде жатқан барлық x-тер үшін $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде **максимумы (минимумы)** бар деп айтады.

Функцияның минимум және максимум нүктелерін экстремум нүктелер, ал осы нүктедегі функция мәндерін функцияның экстремумы деп атайды.

$[a;b]$ сегменттің a мен b нүктелерінде функцияның экстремумы бола алмайды.

Егер x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының экстремум нүктесі болса, онда бұл нүктеде функцияның туындысы болады және нөльге тең.

Айталық, $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және оның аймағында туындысы болса, онда

1) егер функция x_0-ден өткенде $f'(x)$ өзінің таңбасын плюстен минуске өзгертсе, x_0 - функцияның максимум нүктесі болады;
2) егер функция x_0-ден өткенде $f'(x)$ өзінің таңбасын минустен плюске өзгертсе, x_0 - функцияның минимум нүктесі болады.

Сонымен, функцияның экстремумын табу үшін:

1) функцияның туындысын табамыз;
2) туындыны нөльге теңстіріп, кризистік нүктелерді табамыз;
3) туындының кризистік нүкте аймағында таңбаларын зерттеп, экстремумын анықтаймыз.

Функцияның экстремумын екінші ретті туындыны пайдаланып іздестіруге болады.

Ол үшін:

1) бірінші ретті туындыны табамыз;
2) кризистік нүктелерін анықтаймыз;
3) егер кризистік нүктелер болса,екінші ретті туындыны табамыз;
4) егер $f''(x_0) > 0$, онда осы нүктеде минимум анықталады, ал $f''(x_0) < 0$, онда максимум болады.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері.

Анықтама. $[a;b]$ сегментінде үзіліссіз $f(x)$ функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні деп осы функцияның экстремумдерінің және $f(a)$ мен $f(b)$ сандарының ішіндегі ең үлкенін (ең кішісін) айтады.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін:

1) кризистік нүктелерін табамыз;
2) функцияның максимум және минимум мәндерін, сондай-ақ $f(a)$ мен $f(b)$ мәндерін есептейміз;
3) есептелген мәндердің ішінен ең үлкенін және ең кішісін аламыз.

Қисықтың ойыстығы мен дөңестігі. Иілу нүктелері.

Егер $(a;b)$ интервалында $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ болса, онда осы интервалда $f(x)$ қисығы **дөңес (ойыс)** болады, яғни қисық сызық жанаманың астында (үстінде) орналасқан.
Егер $f''(x_0) = 0$ немесе болмаса, бірақ $f'(x_0)$ бар болса және 2-ші ретті туындының x_0 нүктесінің маңайында таңбасы өзгеретін болса, онда $(x_0; f(x_0))$ нүктесі $f(x)$ қисығының **иілу нүктесі** деп аталады.

Асимптоталар.

Анықтама. Түзу сызық $y = f(x)$ қисығының **асимптотасы** деп аталады, егер де қисық бойында жатқан нүктенің қисықтың қандай да тармағы бойымен шексіздікке қозғалысында, сол нүктенің түзу сызықтан қашықтығы нөльге ұмтылатын болса.
Асимптотаның үштүрі болады: вертикаль, горизонталь, көлбеу.
Егер мына шектердің $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ біреуі плюс немесе минус шексіздікке тең болса, онда $x = a$ түзуін $y = f(x)$ функцияның **вертикаль асимптотасы** деп атайды.
$y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ сызығының **көлбеу асимптотасы** болады, егер $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[y - kx]$.
Егер $k = 0$ болса, онда $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, яғни $y = b$ түзуі **горизонталь асимптота** болып табылады.

Тақырып 4 Анықталмаған және анықталған интеграл

Жоспар:

1. Комплекс сандар

2. Анықталмаған интеграл

3. Анықталған интеграл

4. Анықталған интегралдың қолданулары

5. Меншіксіз интегралдар

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Комплекс сандар. Көпмүшеліктер.

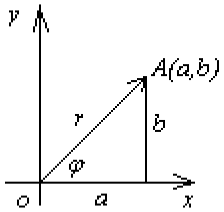
Нақты сандарды қарастырғанда нақты сандар жиынында квадраты (-1)-ге тең санды табу мүмкін еместігі айтылған болатын. Осы тәрізді есептердің шешімін табу мақсатымен сандар ұғымы комплекс сандарды еңгізумен кеңейтіледі.

Комплекс сан ұғымы.

$a + bi$ өрнегі комплекс сан деп аталады, мұндағы a және b - нақты сандар, i - $i = \sqrt{-1}$ немесе $i^2 = -1$теңдіктерімен анықталатын, жорамал бірлік;
a - комплекс санның нақты бөлігі, ал bi - комплекс санның жорамал бөлігі деп аталады. Жорамал бөліктерінің таңбалары ғана әр түрлі болатын екі $a + bi$ және $a - bi$ комплекс санды түйіндес сандар деп атайды.
Егер $a = 0$ болса, онда $0 + bi = bi$ таза жорамал сан, егер $b = 0$ болса, онда нақты сан шығады: $a + 0 \cdot i = a$.
Екі негізгі келісім қабылданады:
1) $a_1 + b_1 i$ және $a_2 + b_2 i$ екі комплекс сан тең болады, егер $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.
2) $a + bi = 0$ болады сонда және тек қана сонда, қашан $a = 0, b = 0$ болса.

Комплекс сандардың геометриялық интерпретациясы

Кез келген $a+bi$ комплекс санды Oxy жазықтығында координаталары a және b болатын $A(a,b)$ нүктесі түрінде кескіндеуге болады.



Және керісінше, Oxy жазықтығының кез келген $M(a,b)$ нүктесін $a+bi$ комплекс санның геометриялық бейнесі ретінде қарастыруға болады. Ox осінде жатқан нүктелерге нақты сандар сәйкес келеді. Oy осінде жатқан нүктелерге жорамал сандар сәйкес келеді. Сондықтан, жазықтықта комплекс сандарды кескіндегенде Oy осін жорамал сандар осі, ал Ox осін – нақты ось деп атайды. $A(a,b)$ нүктесін координаттар басымен қосқанда $\overrightarrow{OA}$ векторын аламыз. Кейбір жағдайда $a+bi$ комплекс санның геометриялық бейнесі ретінде $\overrightarrow{OA}$ векторын санайды.

Комплекс санның тригонометриялық формасы.

$A(a,b)$ нүктенің полярлық координаталарын j және r $(r \geq 0)$ арқылы белгілейік. Координаттар басын полюс деп санаймыз, ал Ox осінің оң бағытын – полярлық ось дейміз. Онда келесі қатыстар орын алады: $a = r\cos j$, $b = r\sin j$, олай болса комплекс санды төмендегі түрде келтіруге болады: $a+bi = r(\cos j + i\sin j)$. Оң жақтағы тұрған өрнек $a+bi$ комплекс санның тригонометриялық формасы деп аталады. Мұндағы j және r шамалары $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $j = Arctg\dfrac{b}{a}$ формулаларымен өрнектеледі және r - модуль, j - аргумент деп аталады.

Комплекс сандарға қолданатын негізгі амалдар.

Комплекс сандардың **қосындысы**. a_1+b_1i және a_2+b_2i екі комплекс санның қосындысы деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

Комплекс сандардың қосындысы векторларды қосу ережесі бойынша орындалатынын байқаймыз.

Комплекс сандардың **айырымы**. a_1+b_1i және a_2+b_2i екі комплекс санның айырымы деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$$

Екі комплекс санның айырымының модулі екі нүктенің арасындағы қашықтыққа тең екенін көре аламыз.

Комплекс сандардың **көбейтіндісі**. a_1+b_1i және a_2+b_2i екі комплекс санның көбейтіндісі деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i.$$

Егер комплекс сандар тригонометриялық түрде берілсе, онда

$$r_1(\cos j_1 + i\sin j_1)\cdot r_2(\cos j_2 + i\sin j_2) = r_1r_2[\cos(j_1+j_2)+i\sin(j_1+j_2)].$$

Салдар: $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$.

Комплекс сандардың **бөліндісі**. Осы амал көбейтуге кері амал болып табылады. Тәжірибе жүзінде комплекс сандардың бөлінуі келесі түрде анықталады: a_1+b_1i санын a_2+b_2i санына бөлу үшін бөлінгіш пен бөлгішті бөлгіштің түйіндесіне көбейтеміз, яғни a_2-b_2i. Сонда бөлгіш нақты сан болады. Сонымен бөлінді:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a^2+b^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a^2+b^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a^2+b^2}i.$$

Тригонометриялық формадағы комплекс сандардың бөліндісі:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Дәрежеге шығару.

Егер n - бүтін оң сан болса, онда $[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Бұл формула Муавр формуласы деп аталады. Ол дегеніміз, комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығарғанда, модульды осы дәрежеге шығарады, ал аргумент дәреженің көрсеткішіне көбейтіледі.

Муавр формуласының тағы бір қосымшасын қарастырайық. Осы формулада $r=1$ болсын, сонда $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Сол жағын Ньютон биномы бойынша жіктеп, нақты және жорамал бөліктерін теңстіріп, $\sin n\varphi$ және $\cos n\varphi$ - ді $\sin\varphi$ және $\cos\varphi$ -дің дәрежелері арқылы өрнектей аламыз. Мысалы, $n=3$ болған жағдайда: $\cos^3\varphi+i3\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi=\cos3\varphi+i\sin3\varphi$; екі комплекс санның теңдігінің шартын қолданғанда:

$$\cos3\varphi=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin3\varphi=-\sin^3\varphi+3\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Түбір алу.

Комплекс саннан n-ші дәреженің түбірі деп түбір астындағы санға тең болатын n-ші дәрежелі комплекс санды айтады, яғни $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=r(\cos\psi+i\sin\psi)$, егер де $r^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Өзара тең комплекс сандардың модульдері тең болғандықтан, ал аргументтері 2π -ге еселі санға айырмашылығы бар, онда $r^n=r$, $n\psi=\varphi+2k\pi$. Осыдан: $r=\sqrt[n]{r}$, $\psi=\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}$, мұндағы k - кез келген бүтін сан, $\sqrt[n]{r}$ - бүтін оң r санынан алынған түбірдің арифметикалық мәні. Олай болса, $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n})$.

k -ға $0,1,2,...,n-1$ мәндерін беріп, түбірдің n түрлі мәнін алуға болады.

Комплекс санның көрсеткіштік формасы

Эйлер формулаларымен қолданайық:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Мұнда келесіні көруге болады

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + i\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = e^{i\varphi}.$$

Онда тригонометриялық формадан көрсеткіштік формаға ауысуға болады.

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$$

Комплекс санның көрсеткішті формасы.

Барлық амалдар тригонометриялық формаға көшкеннен кейін орындалады

Алғашқы функция, анықталмаған интеграл ұғымы: Егер бір X аралығының әрбір нүктесінде *F(x)* функциясы үшін $F'(x) = f(x)$ немесе $dF(x) = f(x)dx$ теңдігі орындалса, онда *F(x)* функциясы осы аралықта f(x) үшін *алғашқы функция* болады.

Мысалы $F(x) = \sin x$ функциясы $f(x) = \cos x$ функциясының алғашқы функциясы болады.

Теорема Егер $F(x)$ функциясы X аралығында $f(x)$ үшін алғашқы функциясы болса, онда $F(x)+C$ функциясы да (С-кез келген тұрақты) $f(x)$ үшін осы аралықта алғашқы функция болады.

Анықтама Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$-тің алғашқы функциясы болса, онда оның барлық алғашқы функцияларының жиынын, яғни $F(x)+C$ өрнегін $f(x)$-тің *анықталмаған интегралы* деп атайды және былай белгілейді:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Бұл өрнектегі $f(x)dx$ -интеграл астындағы өрнек, ал *x-интегралдау айнымалысы* деп аталады. $\int$ -интеграл белгісі.

Интегралдаудың негізгі ережелері:

1 Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $\int f(x)dx = F(x)+C$, мұндағы $C = Const$

2 $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, демек тұрақты шаманы интеграл сыртына шығаруға болады.

3 $\int[f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

4 Егер $\int f(x)dx = F(x)+C$ және $u = \varphi(x)$ болса, онда $\int f(u)du = F(u)+C$ болады.

Демек анықталмаған интеграл пішіні интегралдау айнымалысынан тәуелсіз.

Мысалы, $u = ax+b$ деп алсақ

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \quad a \neq 0$$

Жиі қолданылатын интегралдар кестесі:

1 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

2 $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4 $\int \cos x dx = \sin x + C$

5 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

7 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

8 $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C, \qquad (a \neq 0)$

9 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \qquad (a > 0)$

10 $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \mathbf{l}n \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \qquad (a \neq 0)$

11 $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \mathbf{l}n \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \qquad (a \neq 0)$

12 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mathbf{l}n \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \qquad (a \neq 0)$

13 $\int tgxdx = -\mathbf{l}n|\cos x| + C$

14 $\int ctgxdx = \mathbf{l}n|\sin x| + C$

15 $\int \frac{dx}{\sin x} = \mathbf{l}n \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$

16 $\int \frac{dx}{\cos x} = \mathbf{l}n \left| tg(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}) \right| + C$

17 $\int shdx = chx + C$

18 $\int chxdx = shx + C$

19 $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

20 $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Интеграл астындағы функцияны ықшамдау арқылы кейбір анықталмаған интегралдар 1-18 кестелік интегралды қолданып есептеледі.

Дифференциал белгісінің астына кіргізу арқылы интегралдау:

4 ереже бойынша

$\int f(j(x)) j'(x)dx = \int f(j(x))dj(x) \int f(u)du = F(u) + C = F(j(x)) + C. \;\; F'(u) = f(u)$

және мұндағы $u = j(x)$. Бұл түрлендіру $j(x)$ функциясын дифференциал белгісінің астына кіргізу деп аталады.

Интегралдаудың негізгі әдістері

Бөліктеп интегралдау әдіс: Бөліктеп интегралдау формуласы деп келесі теңдікті айтамыз.

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Бөліктеп интегралдау формуласы бір интегралды екінші интеграл арқылы өрнектейді. Бұл формула екінші интегралды есептеу мүмкіндігі болған жағдайда қолданылады. Кей жағдайда соңғы нәтижені алу үшін бөліктеп интегралдау әдісін қайталап қолдануға тура келеді.

1) $\int P(x) \cdot f(x)dx$ - түрдегі интеграл

Егер, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathbf{K} + a_1 x + a_0$ -n-дәрежелі көпмүшелік болып, келесі $f(x)$ e^{kx}, $\sin kx, \cos kx$, k=Const, функциялардың бірі болса, онда $u = P(x), dv = f(x)dx$ деп алып, бөліктеп интегралданады. Бұл жағдайда бөліктеп интегралдау n рет қайталанады.

2) $\int P(x)\cdot j(x)dx$ -түріндегі интеграл

Егер $P(x)$ -*n* дәрежелі көпмүшелік, ал $j(x)$ -келесі функциялардың бірі болса $\ln kx,\ \arcsin kx,\ \arccos kx,\ arctgkx,\ arcctgkx,\quad k = Const$, онда $u = j(x),\ dv = P(x)dx$. Деп алып, бөліктеп интегралданады.

3) $\int e^{ax}\cos bxdx,\ \int e^{ax}\sin bxdx$ түріндегі интегралдар, мұндағы , *a,b*- тұрақты сандар.

Бұл интегралдар айналымды интеграл деп аталады және екі рет бөліктеп интегралдау арқылы алғашқы интегралы бар теңдеуге келеміз. Интеграл осы теңдеуді шешу арқылы есептеледі.

Алмастыру тәсілін пайдаланып интегралдау:

Көп жағдайда тәуелсіз x айнымалысын алмастыру арқылы $\int f(x)dx$ интегралын есептеуге болады.

1 Анықталмаған интегралдың айнымалысын екі түрлі тәсілмен алмастыруға болады.

а) $x = j(z),$ мұндағы $j(z)$ -монотонниды үзіліссіз дифференциалданатын функция. Бұл жағдайдағы айнымалыны алмастыру формуласы.

$$\int f(x)dx = \int f(j(z))j'(z)dz = F(j(z)) + C = F(x) + C$$

Тригонометриялық алмастырулар

а) Егер интегралда $\sqrt{a^2 - x^2}$ түріндегі өрнек кездессе, $x = a\sin t\ \ (x = a\cos t)$ деп алынады да, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, болады;

ә) Егер интегралда $\sqrt{x^2 - a^2}$ түріндегі өрнек кездессе, $x = a\sec t = \dfrac{a}{\cos t}$ деп алынады да, $\sqrt{x^2 - a^2} = atgt$, болады;

б) Егер интегралда $\sqrt{x^2 + a^2}$ түріндегі өрнек кездессе, $x = atgt$ деп алынады да, $\sqrt{x^2 + a^2} = \dfrac{a}{\cos t} = \sec t$, болады;

Бөлшек-рационал функцияларды интегралдау

Екі көпмүшеліктің қатынасы ретінде өрнектелетін R(x) функциясын *рационал функция* деп атайды.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x + a_1x^{n-1} + \mathbf{K} + a_n}{b_0x + b_1x^{m-1} + \mathbf{K} + b_m} \qquad (1)$$

мұндағы m, n –теріс емес бүтін сандар.

Егер n<m болса, онда R(x) *дұрыс бөлшек* деп, ал $n \ge m$ болса, *бұрыс бөлшек* деп аталады.

Келесі төрт түрде берілген бөлшектерді жай бөлшектер деп атайды.

$$1\ \frac{A}{x-a};\qquad 2\ \frac{A}{(x-a)^k};\qquad 3\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\qquad 4\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

мұндағы a, A, N, M, p, q тұрақты, ал *k*- бүтін сан, $k \ge 2,\ p^2 - 4q < 0$.

Рационал функцияларды интегралдағанда оларды дұрыс бөлшекке келтіріп, дұрыс бөлшекті жай бөлшектердің қосынды түрінде жазамыз.

Жоғары алгебра пәнінде, коэффициенттері нақты сан болатын *m* дәрежелі көпмүшелік төмендегі канондық түрде жіктелетіні дәлелденген

$$Q_m(x)=b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{e_r} \qquad (2)$$

Мұндағы $k_1+k_2+\ldots+k_s+2(e_1+\ldots+e_r)=m$ және $p_i^2-4q_i<0,\ \ i=1,2,\ldots,e_r$.

Егер $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ бұрыс рационал бөлшек болса $(n\geq m)$, онда оны, көпмүшелікті көпмүшелікке бөлу арқылы бөлщектің бүтін бөлімін анықтап,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L(x)+\frac{P_e(x)}{Q_m(x)}$$

түріне келтіреміз. Мұндағы $e<m$, демек $\dfrac{P_e(x)}{Q_m(x)}$ дұрыс бөлшек. Ал кез келген дұрыс бөлшек жай бөлшектердің қосындысына төмендегі түрде жіктеледі:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_{k_s}}{(x-x_s)^{k}}+$$
$$\frac{B_1x+c_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{e_1}}+\frac{B_2x+c_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{e_1-1}}+\ldots \qquad (4)$$
$$\ldots+\frac{B_{e_1}x+c_{e_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots$$

Бұл тепе- теңдік. Сондықтан анықталмаған $A_1, A_2,...,A_{k1}, B_1,C_1,B_2,C_2,\ldots,B_{e1},C_{e1},\ldots$ коэффициентерді, бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп алымдарын теңестіру арқылы есептеледі.

Иррационал функцияларды интегралдау

1 $\int R(x,x^{m/n},\ldots x^{r/s})dx$ түріндегі интеграл. Мұндағы, R-рационал функция, m,n,r,s –бүтін сандар. Егер $\dfrac{m}{n},\ldots\dfrac{r}{s}$; бөлшектерінің ортақ бөлімі к болса, онда $x=z^k$ алмастыру арқылы интеграл астындағы функция z –тен тәуелді рационал функцияға келтіріледі: $\int R(z)dz$. Мұндағы R(z) рационал функция.

2 $\int R\left[x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right]$ түрдегі интеграл, m-натурал сан, a,b,c,d-тұрақты сандар және ad-cb≠0.

$R\left[x,\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right]$ бөлшек-сызықтық иррационал функция деп аталады.

Бұл функция $z=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\Rightarrow z^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\dfrac{b-dz^m}{cz^m-a}$

алмастыруы арқылы бұл интеграл рационал функциядан алынатын интегарға келтіріледі

3 $\int R(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C})dx$ - түрдегі интеграл, мұндағы

$R(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C})$ квадраттық иррационал функция деп аталады. A,B,C=тұрақты шамалар. Егер $Ax^2+Bx+C=0$ теңдеуінің шешімдері нақты сандар болса, онда бұл интеграл 2 пункттегі иррационал функцияға келтіріледі.

Егер $Ax^2+Bx+C=0$ теңдеуінің нақты шешімі болмаса, онда $z=x+\dfrac{B}{2A}$ алмастыруы арқылы келесі интегралдардың біріне келеді. $\int R(z,\sqrt{a^2-z^2})dz$, $\int R(z,\sqrt{a^2+z^2})dz$, $\int R(z,\sqrt{z^2-a^2})dz$. Мұндағы бірінші интеграл

$z = aS\,\text{int}$, екіншісі интеграл $z = atgt$, үшінші интеграл $z = a\sec t = \frac{a}{\cos t}$ алмастыруы арқылы рационал функциядан алынатын интегралға келтіріледі.

4 Эйлер алмастыруы

а) Егер А>0 болса, онда ,$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z - x\sqrt{A}$ алмастыруы ал А<0 болып С>0 болса $\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = zx - \sqrt{c}$ алмастыруы орындалады. Бұл алмастырулар Эйлердің бірінші және екінші алмастырулары деп аталады.

Тригонометриялық функцияларды интегралдау: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m,n бүтін (нақты) сандар. Интеграл астындағы функция мына жағдайларда рационалданады:

а) Егер $m = 2k + 1 > 0$ болса, t=cosx алмастыруы, ал $n = 2l + 1 > 0$ болса t=sinx алмастыруы арқылы:

ә) m, n-жұп және нөлден үлкен немесе нөлге тең болса, онда дәреже төмендететін келесі формулалар пайдаланылады:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x);$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

б) Егер m мен n-сандары жұп болып,және біреуі теріс немесе *m*+*n* нөлден кіші жұп болса, онда келесі алмастырулар қолданылады.

$$z = tgx \quad (z = ctgx) \Rightarrow x = arctgz; dx = \frac{dz}{1 + z^2}; \ \sin^2 x = \frac{z^2}{1 + z^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2}.$$

2 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түріндегі интеграл, мұндағы R-интеграл астындағы рационал функция. Бұл функция

$z = tg\frac{x}{2} \quad (-p < x < p)$ алмастыруы арқылы рационалданады. Бұл алмастыру

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \ \frac{x}{2} = arctgz \Rightarrow x = 2arctgz, \ \ dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

формулалары арқылы sinx пен cosx –тен тәуелді рационал функцияны *z*-тен тәуелді рационал функцияға келтіреді. Осы мағынада бұл алмастыру универсал алмастыру деп аталады.

Ескерту: Кей жағдайда $z = tg\frac{x}{2}$ орнына $z = ctg\frac{x}{2}$ $(0 < x < 2p)$ алмастыруы пайдаланылуы мүмкін.

3 $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ -түріндегі интегралдар.

$$1) \ \sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$2) \sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$3) \cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

формулалар арқылы есептеледі.

Гиперболалық функцияларды интегралдау:

Негізгі формулалар:

$$1\ ch^2x - sh^2x = 1$$

$$2\ sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1)$$

$$3\ ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1)$$

$$4\ shx \cdot chx = \frac{1}{2}sh2x$$

Анықталған интеграл

1. Анықталған интегралды құру алгоритмі: Бізге $[a,b]$ сегментінде анықталған $y = f(x)$ функциясы берілсін.

1) $[a,b]$ сегментін $a = x_0 < x_1 < x_2 < \mathbf{K}\, x_{n-1} < x_n = b$ нүктелері арқылы кез келген n- бөлікке бөлшектеп $\lambda = \max\limits_{1\le t\le n} \max(x_i - x_{i-1})$ деп алынады.

2) Әрбір $[x_i, x_{i+1}]$ аралығынан ξ_i нүктесі таңдап алынады, $i = 1,2,3,\mathbf{K}, n$; $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, да $f(x_i)\Delta x_i$ дифференциалды өрнегі құрылады.

3) Осы өрнектерден жасалған қосынды

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \mathbf{K} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$ интегралдық қосынды деп аталады.

4) Егер интегралдық қосындының l нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса және бұл шек $[a,b]$ сегментін бөлшектеу тәсілі мен ξ_i нүктелерін таңдап алу әдісінен тәуелсіз болса, онда осы шек $f(x)$ функциясынан $[a,b]$ аралығында алынған интеграл деп аталады да, $\int\limits_a^b f(x)dx$ деп белгіленеді. Демек,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{i\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Ескерту: 1) Анықталған интегралдың сандық мәні табаны $[a,b]$ кесіндісі болатын $x = a, x = b$ түзулері және жоғары жағынан $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданына тең.

2) Интегралдау шегінің орнын ауыстыру интегралдың таңбасын керіге өзгертеді.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Анықталған интегралдың негізгі қасиеттері:

1 $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx; \qquad k = Const$

2 $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx$

3 Кез келген a, в, c сандары үшін, төмендегі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ мына теңдік орындалады.

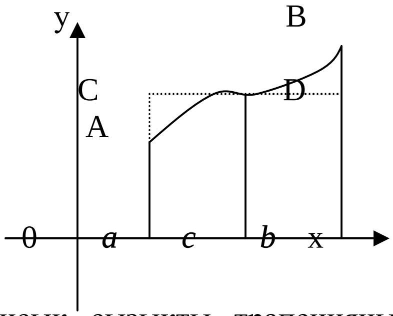
4 Егер $[a,b]$ сегментінде $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$ болады.

5 Егер $[a,b]$ сегментінде $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$ болады.

6 Орта мән туралы теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

теңдігін қанағаттандыратын осы аралықта орналасқан c нүктесі бар болады. $f(c)$ -ны $f(x)$ функциясының $[a,b]$ аралығындағы орта мәні дейді.

Геометриялық мағынасы:



ABCD- қисық сызықты трапецияның ауданына тең табаны $[a,b]$ кесіндісі болатын биіктігі $f(c)$-ға тең тіктөртбұрыш табылады.

3. Ньютон-Лейбниц формуласы:

1 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ -деп анықталған функция үшін айнымалы жоғарғы шегінен тәуелді интеграл деп аталады. Бұл функция $[a,b]$ сегментінің барлық нүктелерінде $F'(x) = f(x)$ теңдігін қанағаттандырады. Демек, $F(x)$ $f(x)$ -тің алғашқы функциясы. Егер $\Phi(x)$ $f(x)$ -тің кез келген басқа алғашқы функциясы болса, онда $F(x) = \Phi(x) + C$ болады. Олай болса, $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C$. Енді

$x = a$ деп алсақ, $\int_a^a f(t)dt = \Phi(a) + C$ болады. Бұл теңдіктен $C = -\Phi(a)$. С-ның осы мәнін ескеріп $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a)$ теңдеуіне келеміз. Енді $x = b$ деп алсақ,

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) \text{ болады.}$$

Бұл формула Ньютон-Лейбниц формуласы деп аталады

4. Анықталған интегралдарды бөліктеп интегралдау:

Бөліктеп интегралдау формуласы

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

мұндағы $u = u(x); v = v(x)$ функциялары $[a, b]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын функциялар.

5. Анықталған интегралдарды айнымалыны ауыстыру арқылы есептеу:

Анықталған интегралды айнымалыны ауыстыру арқылы есептегенде мына формула пайдаланылады.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt,$$

мұндағы $x = \varphi(t)$ функциясы өзінің туындысы мен бірге $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз монотонды және $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(b)$, сонымен қатар $f[\varphi(t)]$ күрделі функция $[\alpha, \beta]$ аралығында үзіліссіз.

Кей жағдайда алмастыру формуласы төмендегі түрде қолданылады:

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

6. Арнайы түрдегі интегралдар:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$$

Бұл интегралдар бірінші жағдайда $x = a\sin t$; екінші жағдайда $x = a\mathrm{tg}t$; үшінші жағдайда $x = \dfrac{a}{\cos t}$ алмастырулары арқылы есептеледі.

7. Тригонометриялық функцияларды интегралдау: $\int \sin^n x \cos^m dx$ түріндегі интеграл осы типтес анықталмаған интегралды есептегенде қолданылатын алмастырулар арқылы есептеледі. Интегралды есептегенде қолданылатын теңбе-теңдіктер.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x);\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

8. Анықталған интегралдардың қолданылуы

8.1. Жазық фигураның ауданын есептеу:

1.1 $y = f(x)$ қисығымен $x = a,\ \ x = b$ түзулері және Ox өсінің $[a,b]$ кесіндімен шенелген қисық сызықты трапецияның ауданы мына формула бойынша есептеледі:

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

1.2 $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x)$ қисықтары $(f_1(x) \le f_2(x))$ және $x = a,\ \ x = b$ түзулерімен шенелген фигураның ауданы мына формула бойынша табылады.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (2)$$

1.3 Егер қисық параметрлік теңдеулермен $x = x(t), y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$ берілсе, онда қисық сызықты трапецияның ауданы мына формула арқылы өрнектеледі.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt \qquad (3)$$

Егер $y = f(x),\ x \in [a,b]$, **функциясы үзіліссіз дифференциалданатын монотонды** $x = x(t),\ t \in [t_1, t_2]$, **функциясы арқылы параметрлік түрге келтірілсе:** $x = x(t),\ y = f(x(t))$, **онда интегралдау шектері** $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$ **теңдіктерінен анықталады. да, аудан**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \cdot x'(t)dt$$

формуласы бойынша есептеледі.

1.4 Полярлық координаттарда $\rho = \rho(\varphi)$ теңдеуімен берілген қисықпен және екі $\varphi = \alpha, \varphi = \beta\ (\alpha < \beta)$ полярлық радиустармен шектелген қисық сызықты сектордың ауданы мына формуламен өрнектеледі:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\varphi))^2 d\varphi \qquad (4)$$

8.2. Жазық қисық доғасының ұзындығын есептеу: Егер қисық $y = f(x)$ $[a,b]$ кесіндісінде тегіс (яғни туындысы $y' = f'(x)$-үзіліссіз функция) болса, онда ол қисықтың ұзындығы мына формула бойынша есептеледі:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx,\ x\in[a,b] \qquad (5)$$

$x=x(t), y=y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, ($x(t), y(t)$-үзіліссіз дифференциалданатын функциялар) параметрлік түрде берілген қисық доғасының ұзындығы мына формуламен есептеледі:

$$L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (6)$$

Егер тегіс қисық полярлық жүйеде $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$ теңдеуімен берілсе, онда қисықтың ұзындығы

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho y^2(\varphi)}d\varphi \qquad (7)$$

формуласы арқылы есептеледі.

8.3. Дененің көлемін есептеу: үзіліссіз қисығы, абсциссалар өсімен және $x=a,\ x=b\ (a<b)$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның Ox өсін айналғанда пайда болған дененің көлемі

$$V_x=\pi\int_a^b (f(x))^2 dx \qquad (8)$$

формуласы бойынша есептеледі.

Сол сияқты $x=\varphi(y)$ үзіліссіз қисығы, ординаталар өсімен және $y=c,\ y=d\ \ (c<d)$ түзулерімен шектелген қисық сызықты трапецияның Oy өсін айналғанда пайда болған дененің көлемі

$$V_y=\pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy \qquad (9)$$

формуласы бойынша есептеледі.

Егер дене $y_1=f(x)$ және $y_2=f(x)$ қисықтарымен $(0\le f_1(x)\le f_2(x))$ және $x=a,\ x=b$ түзулерімен шектелген фигураның айналуынан пайда болса, онда көлем

$$V_x=\pi\int_a^b \left\{[f_2(x)]^2-[f_1(x)]^2\right\}dx \qquad (10)$$

формуласы бойынша табылады.

9. Меншіксіз интегралдар

$f(x)$ -тен $\langle a,b\rangle$ аралығында құрылған анықталған интеграл **интегралдау аралығы** $\langle a,b\rangle$ шенелген және осы аралықта шектеулі $f(x)$ функциясы үшін қарастырылады. Осы шарттардың ең кемінде біреуі орындалмаса, онда интеграл **меншіксіз** деп аталады.

Интегралдау аралығы шенелмеген интегралдар: Айталық, $f(x)$ жартылай шенелмеген $[a,\infty)$ аралығында үзіліссіз болсын. А-дан үлкен кез келген ζ саны үшін $[a,\zeta]$ аралығында анықталған

$$J(\zeta)=\int_a^{\zeta} f(x)dx$$

интегралын қарастырайық. Бұл интеграл ζ-ның $a<\zeta<+\infty$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндерінде бар болады.

Анықтама 1 $f(x)$-тен $[a,\infty)$ аралығында анықталған меншіксіз интеграл деп $J(\zeta)=\int_a^{\zeta} f(x)dx$ интегралының ζ шексіздікке ұмтылғандағы шегін айтамыз да,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{\zeta\to\infty}\int_a^{\zeta} f(x)dx \qquad (1)$$

деп жазамыз.

Егер осы шек бар болса, онда (1) меншіксіз интегралы **жинақты**, ал бұл шек болмаса **жинақсыз** деп аталады.

Меншіксіз интегралдың жинақтылық белгісі: Салыстыру белгісі; Егер $[a,+\infty)$ аралығының барлық нүктелерінде

$$0\le f(x)\le \varphi(x)$$

теңсіздігі орындалса, онда: 1) егер $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ интегралы жинақты болса, онда $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралы да жинақты болады;

2) егер $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралы жинақсыз болса, онда $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ интегралы да жинақсыз болады.

Егер $\int_a^{\infty}\left|f(x)\right|dx$ интегралы жинақты болса, онда $\int_a^{\infty} f(x)dx$ интегралы **абсолют жинақты** деп аталады.

Шенелмеген функциядан алынған интегралдар: Айталық, $f(x)$ функциясы $[a,в)$ аралығында үзіліссіз, ал $в$ нүктесінде шексіз үзілісті болсын: $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Кез келген кішкене $\varepsilon>0$ санын алып

$$J(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

интегралын қарастырайық. Бұл интеграл ε-нің $0<\varepsilon<b-a$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндерінде бар болады.

Анықтама 2 $[a,в)$ аралығында үзіліссіз және x в-ға ұмтылғанда шексіздікке ұмтылатын $f(x)$-тен алынған **меншіксіз интеграл** деп $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ интегралының ε нөлге ұмтылғандағы шегі айтылады да,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (4)$$

деп жазылады.

Егер осы шек бар болса, онда меншіксіз интеграл **жинақты**, ал болмаса **жинақсыз** делінеді.

Егер $f(x)$ $(a,b]$ аралығында үзіліссіз болып, x a-ға ұмтылғанда шексіздікке ұмтылса, онда осы функциядан алынған **меншіксіз интеграл**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

теңдігі арқылы анықталады.

Егер $f(x)$ $[a,b]$ сегментінің ішкі с нүктесінде шексіз үзілісті болса, онда меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

теңдігі арқылы анықталады.

Тақырып 5. Жай дифференциалдық теңдеулер

1 Дифференциалдық теңдеу деп құрамында тәуелсіз айнымалы x, белгісіз функция y және оның туындалары $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ болатын теңдеуді айтады. Оны жалпы түрде былай жазуға болады:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Туындысы арқылы шешілген бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің түрі:

$$y' = f(x;y) \text{ немесе } \frac{dy}{dx} = f(x;y) \qquad (2)$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі деп C тұрақтысының кез келген мәнінде берілген теңдеудің шешімі болатын дифференциалданатын $y = j(x, C)$ функциясын айтады. Жалпы шешімден C тұрақтысының белгілі бір мәнінде алынатын шешімі дербес шешімі деп аталады.

Теңдеудің $x = x_0$ болғанда $y = y_0$ немесе $y(x_0) = y_0$ алғашқы шартын қанағаттандыратын шешімін табу есебі Коши есебі деп аталады.

Берілген дифференциалдық теңдеудің кез келген $y = j(x)$ шешуінің графигі осы теңдеудің интегралдық қисығы деп аталады.

2 Мына $y' + p(x)y = q(x)$ түрінде берілген теңдеу бірінші ретті сызықтық теңдеу деп аталады. Егер $q(x) = 0$ болса, онда теңдеу біртекті, егер $q(x) \neq 0$ болса, онда біртексіз (біртекті емес) теңдеу деп аталады.

Біртекті теңдеудің жалпы шешімін айнымалыларын бөлу арқылы алынады. Біртексіз теңдеудің жалпы шешімі оған сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімін интегралдау тұрақтысы C - ны вариациялау арқылы алынады.
Біртексіз теңдеудің шешімін $y = u(x) \cdot v(x)$ ауыстыруын қолданып та табуға болады. Мұндағы $u(x)$ және $v(x)$ үздіксіз дифференциалданатын кез келген функциялар.
3 Туындысы арқылы шешілген n - ші ретті дифференциалдық теңдеуді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n+1)}\right) \qquad (3)$$

түрінде жазуға болады. Алғашқы $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n+1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ шарттарын қанағаттандыратын $y = j\,(x)$ шешімін табу есебі Коши есебі деп аталады.
Коши есебінің жалғыз ғана шешуінің бар болуы туралы теорема. Егер $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n+1)}\right)$ теңдеуде $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n+1)}\right)$ функциясы а) қандай да бір D өзгеру облысында барлық $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ аргументтері бойынша үздіксіз; б) осы D облысында $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ аргументтері бойынша шектелген $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}}$ дербес туындылары бар болса, онда $y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ шарттарын қанағаттандыратын және $x_0 - h < x < x_0 + h$ интервалында анықталған жалғыз ғана $y = \varphi(x)$ шешімі бар болады.
4 Коэффициенттері тұрақты екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді былай жазуға болады:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (4)$$

Егер $f(x) = 0$ болса, теңдеу біртекті, ал $f(x) \neq 0$ - біртексіз теңдеу деп аталады.
5 Екінші ретті коэффициенттері тұрақты біртекті $y'' + py' + qy = 0$ теңдеуінің сипаттауыш теңдеуі:

$$k^2 + px + q = 0 \qquad (5)$$

түрінде жазылады. Егер осы квадрат теңдеудің түбірлері k_1 және k_2 нақты және әртүрлі болса, онда біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Егер сипаттамалық теңдеудің түбірлері тең болса, яғни $k_1 = k_2 = k$, онда жалпы шешімі:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$$

Егер сипаттамалық теңдеудің түбірлері $a \pm bi$ кешен – түйіндес болса, онда жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$$

6 Екінші ретті коэффициенттері тұрақты біртексіз сызықты теңдеудің шешімі туралы мынадай теорема орын алады. Егер $y'' + py' + qy = f(x)$ теңдеуінің $y_д$

дербес шешімі, ал y_0 - оған сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі болса, онда біртексіз теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = y_0 + y_д$$

қосындысынан тұрады. Біртекті теңдеудің y_0 жалпы шешімін әрқашанда табуға болады. Ал $y_д$ дербес шешімі анықталмаған коэффициенттер әдісімен табылады.
Егер теңдеудің оң жағы:

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ түрінде берілсе, онда: а) егер нөл сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, онда дербес шешуді $y_д = Ax^2 + Bx + C$ түрінде; б) егер нөл сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, онда дербес шешуді
$y_д = (Ax^2 + Bx + C)x^k$, $k = 1,2,....$ түрінде іздеу керек.

2) Егер $f(x) = be^{ax}$ түрінде берілсе, онда дербес шешуді: а) егер a саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, $y_д = Ae^{ax}$ түрінде; б) егер a саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, $y_д = Ae^{ax}x^k$, $k = 1,2,$ түрінде іздеу керек.

3) Егер $f(x) = e^{ax}[P\cos bx + Q\sin bx]$ түрінде берілсе, онда: а) $a + bi$ саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болмаса, дербес шешуді:
$y_д = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ түрінде; б) егер $a + bi$ саны сипаттамалық теңдеудің түбірі болса, онда дербес шешуді: $y_д = xe^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$ түрінде іздеу керек.

Тақырып 6. Көп айнымалы функциялар

1 Көп айнымалылар функциясы

Көп айнымалылар функциясының анықтамасы. Анықталу облысы. Екі айнымалының функциясы. Негізгі анықтамалар. Дербес туынды және дербес дифференциал.Толық өсімше. Толық дифференциал. Жоғарғы ретті дербес туындылар. Функцияның экстремумы, оның бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары.

1) Егер берілген D облысының әрбір (x, y) қос мәніне белгілі бір z мәні сәйкес келсе, онда z айнымалысы x және y екі айнымалысының функциясы деп аталады. Белгілеуі: $z = f(x, y)$ немесе $z = z(x, y)$ және т.с.с.

2) Аргумент өсімшелерін Δx және Δy деп белгілейтін болсақ, онда $M(x, y)$ нүктесіне оған жақын $M_0(x + \Delta x, y + \Delta y)$ сәйкес келеді. Екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясының M нүктесіндегі толық өсімшесі деп
$\Delta z = f(M_0) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ айырымын айтады.

3) Егер Δz өсімшесін $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + e$, (1)
мұндағы e - реті жоғары шексіз аз шама, деп өрнектеуге болатын болса, онда z фунциясы M нүктесінде дифференциалданатын функция деп айтады да, оның басты сызықты бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталады.
Ол мына формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (2)$$

мұндағы $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ - дербес туындылар.

4) Функция өсімшесі Δz пен оның толық дифференциалы dz арасында мынадай байланыс бар: $\Delta z = dz + \varepsilon$
Егер реті жоғары шексіз аз ε - шамасын ескермесек, онда жуықтап есептеу формуласын алуға болады:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (3)$$

5) Егер y функциясы $F(x,y)=0$ түріндегі теңдеумен берілсе, онда ол x - тің айқындалмаған (жабық) функциясы деп аталады.Оның туындысы мына формула арқылы есептеледі: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{/}(x,y)}{F_y^{/}(x,y)}$

(4)
6) Экстремумның қажетті шарты.

$$\begin{cases} f_x^{/}(x,y)=0 \\ f_y^{/}(x,y)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Осы жүйенің шешулері экстремум нүктелерін береді. Бірақ барлық стационар нүктелер экстремум нүктесі бола бермейді. Ол үшін экстремумның жеткілікті шартын пайдалану қажет.
7) Мынадай белгілеулер енгізейік: $M_0(x_0, y_0)$ кризистік нүктесі болсын және

$A = f_{x\,x}^{//}(x_0,y_0), \quad B_{xy}^{//}(x_0,y_0), \quad C = f_{y\,y}^{//}(x_0,y_0) \quad \Delta = AC - B^2$

(6)
болсын. Егер $M_0(x_0, y_0)$ кризистік нүктесінде:

1) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 минимум нүктесі;
$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 максимум нүктесі.
2) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум жоқ.
3) $\Delta = 0$ болса қосымша зерттеулер қажет.

Тақырып 7. Сан қатарлары

1 Сандық қатар деп

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

түріндегі өрнекті айтады. Егер сандық қатардың $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ дербес қосындысының шегі бар болса, яғни $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ болса, онда қатар жинақталады, ал S саны қатардың қосындысы деп аталады.
2 Жинақтылықтың қажетті шарты. Егер қатар жинақталса, онда оның a_n жалпы мүшесі нөлге ұмтылады:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (2)$$

3 Мүшелері оң қатарлар үшін жинақтылықтың жеткілікті шарттары:

а) **Қатарларды салыстыру белгісі**. Егер мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарлары берілсе және $a_n \leq b_n$ шарты орындалса, онда 2 – қатар жинақталса 1 – қатар да жинақталады. Ал 1 – қатар жинақталмаса, онда 2 – қатар да жинақталмайды. Әдетте салыстыру қатарлары үшін мына қатарларды алады:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ қатары $a > 1$ болса жинақталады; $a \leq 1$ болса жинақталмайды;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ қатары $|q| < 1$ болса жинақталады, $|q| \geq 1$ болса жинақталмайды;

б) **Даламбер белгісі**. Егер

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \qquad (3)$$

шегі бар болып, $l < 1$ болса қатар жинақталады. Егер $l > 1$ болса қатар жинақталмайды. Егер $l = 1$ болса, онда қосымша зерттеулер қажет.

в) **Коши белгісі.** Мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \qquad (4)$$

шегі бар болса, онда $l < 1$ болса қатар жинақталады, $l > 1$ болса жинақталмайды. Егер $l = 1$ болса, онда қосымша зерттеулер қажет.

г) **Жинақтылықтың интегралдық белгісі.** Егер $f(x)$ функциясы үздіксіз, оң кемімелі және $a_n = f(n)$ болса, онда қатар $\int_a^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралымен бірдей жинақталады, не жинақталмайды.

4 Лейбниц белгісі. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының мүшелері мына шарттарды қанағаттандырса: 1) $\mathrm{a_n} \cdot \mathrm{a_{n+1}} < 0$, яғни қатар ауыспалы таңбасы; 2) $|a_1| > |a_2| > ... > |a_n| > ...$; 3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ қанағаттандырса, онда қатар жинақталады.

Лейбниц қатарының қалдық қатарының $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + ...$ таңбасы бірінші мүшесінің таңбасымен бірдей және абсолют шамасы бойынша одан кіші, яғни $|r_n| < a_{n+1}$. Бұл теңдікті жуықтап есептеулерде пайдаланады.

5 Мүшелерінің таңбасы әртүрлі. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақталып, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатары жинақталмаса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ шартты жинақталатын қатар деп, ал $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатары жинақталса абсолютті жинақталатын қатар деп аталады.

6 Дәрежелік қатар деп

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$$

(5)

түріндегі қатарды айтады. Егер $a = 0$ болса, онда дәрежелік қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (6)$$

түрінде жазылады. Бұл қатар $x = 0$ нүктесінде әрқашанда жинақталады. Егер $x \neq 0$ нүктесінде жинақталса, онда $R > 0$ саны табылып, $|x| > R$ болса қатар жинақталады, ал $|x| < R$ болса – жинақталмайды. Осындай R саны **жинақталу радиусы** деп, ал $(-R;R)$ жинақталу интервалы деп аталады. Жинақталу радиусы $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ формуласымен анықталады. Дәрежелік қатарды жинақталу интервалының ішінде мүшелеп дифференциалдауға және интегралдауға болады.

7 Тейлор қатары

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{/}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \qquad (7)$$

Егер $a = 0$ болса, Маклорен қатары алынады:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n + ... \qquad (8)$$

Функциялардың қатарға жіктелуі

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad (|x| < \infty) \qquad (9)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \qquad (|x| < \infty) \qquad (10)$$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad (|x| < \infty)$$

(11)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... \qquad (|x| < 1) \qquad (12)$$

$$(1+m)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n =$$

(13)

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... \qquad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^4}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \quad (-1 < x \le 1) \quad (14)$$

$$arctgx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... \qquad (|x| \le 1) \qquad (16)$$

7. Тәжірибелік сабақтардың мазмұны, сағаттағы көлемі

Тақырып 1. Сызықты алгебра және аналитикалық геометрия элементтері

Жоспар:

Матрицалар, анықтауыштар

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі

Векторлар, оларға қолданылатын амалдар

Жазықтықтағы түзу

Тапсырмалар:

1. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$**;** c) $\begin{vmatrix} \sin j & \cos j \\ \cos j & \sin j \end{vmatrix}$**;** d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$**;** e) $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$**;** f) $\begin{vmatrix} tga & -1 \\ 1 & tga \end{vmatrix}$**;** g) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$**;** h) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$**;** i) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$**;** j) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

3. Амалдарды орында

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4. Берілген матрицаға кері матрицаны тап:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5. Теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шеш:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$.

6. Теңдеулер жүйесін Крамер әдісімен шеш:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

1. $A(2;-3;4)$ және $B(3;-1;-2)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторларын анықта.

2. $A(2;1;-2)$ нүктесінен шығатын $\overrightarrow{AB}=\{-3;2;4\}$ векторының соңғы *B* нүктесінің координаттарын тап.

3. $A(-1;3;2)$ нүктесінде аяқталатын $\overrightarrow{AB}=\{-1;2;3\}$ векторының бас *A* нүктесінің координаттарын тап.

4. $\vec{a}=\{-6;2;-3\}$ векторының модулін тап.

5. Модулі 2-ге тең $\vec{a}$ векторы координат өстерімен $a=45^{0}$, $\beta=60^{0}$, $\gamma=120^{0}$ бұрыштарын құрады. Осы вектордың координат остеріндегі проекцияларын тап.

6. $\vec{a}=\{12;-15;-16\}$ векторының бағыттауышы косинустарын тап.

7. Вектор координат өстерімен төменде берілген бұрыштарды: 1) $\alpha=45^{0}$, $\beta=60^{0}$, $\gamma=120^{0}$; 2) $\alpha=45^{0}$, $\beta=135^{0}$, $\gamma=60^{0}$; 3) $\alpha=90^{0}$, $\beta=150^{0}$, $\gamma=60^{0}$ жасай алама?

8. Ox өсімен $\alpha=120^{0}$, Oz өсімен $\gamma=45^{0}$ бұрыш жасайтын вектор Oy осімен қандай бұрыш жасайды?

9. $\vec{a}$ векторы *Ox* өсімен $\alpha=60^{0}$, *Oy* өсімен $\beta=120^{0}$ бұрыштарын жасайды және $|\vec{a}|=2$. Осы вектордың координаттарын тап.

10. Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бойынша $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{b}-\vec{a}$ және $-\vec{a}-\vec{b}$ векторларын сал.

11. $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ және $|\vec{a}+\vec{b}|=24$ екені белгілі. $|\vec{a}-\vec{b}|$-ны тап.

12. $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$ болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр. $|\vec{a}+\vec{b}|$ мен $|\vec{a}-\vec{b}|$ -ны тап.

13. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары $\varphi=120^{0}$ бұрыш жасайды. $|\vec{a}+\vec{b}|$ мен $|\vec{a}-\vec{b}|$ -ны анықта.

14. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ қандай шарттарды қанағаттандырғанда:
1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a} \quad \vec{b}|$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a} \quad \vec{b}|$ қатынастары орындалады.

15. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бойынша: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$;

4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ векторларын салыңыздар.

16. $\vec{a} = \{3;-2;6\}$ және $\vec{b} = \{-2;1;0\}$ векторлары берілген. 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$ векторларының координат өстеріндегі проекцияларын тап.

17. $\vec{a} = \{6;-2;-3\}$ және $\vec{b} = \{3;4;-12\}$ векторларын анықтайтын орттарды тап.

18. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ деп алып: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ мәндерін есептеңіздер.

19. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр, $\vec{c}$ векторы осы векторындың әрқайсысымен $\frac{\pi}{3}$-ке тең бұрыш жасайды. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ деп алып :1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$ мәндерін есептеңіздер.

20. Модульдері бірге тең және $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары берілген. $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ мәнін тап.

21. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ екені белгілі. a санының қандай мәндерінде $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ векторы $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ векторына перпендикуляр болады?

22. $\vec{a} + \vec{b}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$ векторына перпендикуляр болуы үшін $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары қандай шарттары қанағаттандыруы керек?

23. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{\pi}{6}$ және $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты тап.

24. $\vec{a} = \{4;-2;-4\}$ және $\vec{b} = \{6;-3;2\}$ векторлары берілген. Төмендегі өрнектердің мәнін есепте: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

25. $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ және $C(0;1;-5)$ нүктелері берілген. Төмендегі өрнектердің мәнін есепте:

1) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

4) $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$ векторларының координаттарын тап.

26. a санының қандай мәнінде $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ мен $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ векторлары өзара перпендикуляр болады?

27. $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ және $\vec{b}=\{-3;2;6\}$ векторларының арасындағы бұрышты есепте.

28. ABC үшбұрышының $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ және $C(3;-2;1)$ төбелері берілген. Осы үшұрыштың B төбесіндегі ішкі және сыртқы бұрыштарын тап.

29. $\vec{a}=\{5;2;5\}$ векторының $\vec{b}=\{2;-1;2\}$ векторы жатқан өстегі проекциясын тап.

30. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ және $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ векторлары берілген. $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ және $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$ -ны есепте.

31. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ және $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=6$. $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының модулін тап.

32. $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{b}\right|=2$ және $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының модулін тап.

33. $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=26$ және $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=72$. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың скаляр көбейтіндісін тап.

34. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$. $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$ деп алып: 1) $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]^2$; 2) $\left[\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\right]^2$; 3) $\left[\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\right]^2$ өрнектерінің мәндерін есепте.

Нұсқау: Мұндағы $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]^2$ - $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының скалярлық квадраты.

35. $\vec{a}+\vec{b}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$ векторына коллинеар болуы үшін $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?

36. $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ векторлары берілген. $\vec{a}=\vec{p}\times\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{g}\times\vec{n}$, $\vec{c}=\vec{r}\times\vec{n}$ векторлары компланарлы болатынын дәлелде.

37. $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$ және $\vec{b}=\{1;2;-1\}$ векторлары берілген. Төмендегі векторлық көбейтінділерді анықта: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$; 3) $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

38. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ және $C(3;2;1)$ нүктелері берілген. 1) $\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{CB}\right]$ векторларын анықта.

39. $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$ және $\vec{c}=\{1;2;3\}$ векторлары берілген. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ және $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ векторларын тап.

40. Оң үштік жасаушы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары үшін $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left|\vec{c}\right|=3$. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

41. $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына перпендикуляр, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi=30^{\mathbf{0}}$. $\left|\vec{a}\right|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{c}\right|=3$екені белгілі. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

42. $\vec{a}=\{1;-1;3\}$, $\vec{b}=\{-2;2;1\}$ және $\vec{c}=\{3;-2;5\}$ векторлары берілген. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

43. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ нүктелерінің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

Түзудің жалпы теңдеуі:

1 $2x-3y-12=0$ түзудің координат өстерімен қиылысу нүктелерін тауып, осы түзуді декарт жазықтығында сал.

2 $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$ түзулерінің қиылысу нүктесін тап. Осы түзулердің координат өстерімен қиылысу нүктелерін тауып, оларды декарт жазықтығында сыз. Тапқан нүктеңіз сызылған түзулердің қиылысқан жерінде орналасатынына көңіл аудар.

3 ABC үшбұрышының AB қабырғасы $4x+3y-5=0$, BC қабырғасы $x-3y+10=0$, AC қабырғасы $x-2=0$ теңдеулері арқылы берілген. Осы үшбұрыш төбелерінің координаттарын тауып, осы үшбұрышты декарт жазықтығында сал.

4 Параллелограмның екі қабырғасы өздерінің $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ теңдеулері арқылы берілген, ал бір диагоналының теңдеуі: $3x+2y+3=0$. Осы параллелограмның төбелерінің координаттарын анықта.

5 Үшбұрыштың қабырғалары $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$ түзулерінің бойында жатыр. Осы үшбұрыштың ауданын тап.

6 Төбелері $A(1;-2)$ және $B(2;3)$ нүктелерінде жатқан үшбұрыштың үшінші C төбесі $2x+y-12=0$ түзуінің бойында жатыр. Осы үшбұрыштың ауданын 8 кв. бірлігіне тең деп алып *C* төбесінің координаттарын тап.

7 Ауданы 8 кв. бірлігіне тең үшбұрыштың екі төбесі $A(2;-3)$ және $B(3;-2)$ нүктелерінде, ал тартылу центрі $3x-y-8=0$ түзуінің бойында орналасқан. Үшінші *C* төбесінің координаттарын анықта.

Бұрыштық коэффициенті мен ордината өсінен қиып өтетін кесіндісі арқылы анықталған түзудің теңдеуі:

8 Бұрыштық коэффициенті k мен Оу өсінен қиып өтетін b кесіндісі бойынша түзудің теңдеуін жаз:1) k=2, b=3 ; 2) k=-1,5; b=2; 3) k=0, b=-2

9 Берілген түзулердің бұрыштық коэффициенттері мен Оу өсінен қиып өтетін кесінділерін тауып, түзудің теңдеуін осы элементтері арқылы жаз:1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$;
3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $y - 3 = 0$.

10 $Ax + By + C = 0, B \neq 0$, жалпы теңдеуі арқылы берілген түзудің бұрыштық коэффициенті $k = -\frac{A}{B}$, ал Оу өсінен қиып өтетін кесінді $b = -\frac{C}{B}$ болатынын дәлелде.

11 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түзулері $(A_2 \neq 0, B_2 \neq 0)$:**1)** өзара параллель болуы үшін $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$;**2)** өзара перпендикуляр болу үшін $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$;**3)** беттесуі үшін $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ шарттарының орындалуы, қажетті және жеткілікті екнін дәлелде; **4)** осы түзулердің арасындағы бұрышты $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ формула арқылы анықтауға болатынын дәлелде.

12 $5x + 3y - 3 = 0$ түзуі берілген. 1) Осы түзуге параллель болатын түзудің бұрыштық коэффициентін анықта; 2) Осы түзуге перпендикуляр болатын түзудің бұрыштық коэффициентін анықта.

13 $2x + 3y + 4 = 0$ түзуі мен $M_0(2;1)$нүктесі берілген. Осы нүкте арқылы өтіп берілген түзуге: 1) параллель болатын түзудің ;
2) перпендикуляр болатын түзудің теңдеулерін анықта.

14 $A(3;7)$ және $B(8;-3)$нүктелері арқылы өтетін түзудің бұрыштық коэффициентін тап;

15 $P(2;3)$ және $Q(-1;0)$ нүктелері берілген. Q нүктесі арқылы өтіп $\overrightarrow{PQ}$ кесіндісіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін тап.

16 Координат басынан түзуге түсірілген перпендикулярдың табаны $P(2;3)$ нүктесі болатын түзудің теңдеуін тап.

17 Үшбұрыштың $A(2;1), B(-1;-1)$ және $C(3;2)$ төбелері берілген. Осы үшбұрыштың биіктіктерінің теңдеулерін анықта және олардың қиылысу нүктесін тап.

18 Берілген екі түзудің арасындағы φ бұрышын тап: 1) $5x - y + 7 = 0$; $3x + 2y = 0$; 2) $3x - 2y + 7 = 0$; $2x + 3y - 3 = 0$

3) $3x - y + 5 = 0$; $2x + y - 7 = 0$; 4) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y - 5 = 0$; 5) $\left(3 + \sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)y + 7 = 0$

19 Тіктөртбұрыштың $2x - 3y + 5 = 0$ және $3x + 2y - 7 = 0$ қабырғалары мен $A(2;-3)$ төбесі берілген. Қалған екі қабырғасының теңдеуін анықта;

20 Тіктөртбұрыштың $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ қабырғалары мен $7x + y - 15 = 0$ диагоналі берілген. Тіктөртбұрыштың төбелерін тап.

21 $P(-6;4)$ нүктесінің $4x - 5y + 3 = 0$ түзуіндегі проекциясын тап;

22 $2x - 3y - 3 = 0$ түзуіне қатысты $P(-5;13)$ нүктесіне симметриялы болатынын Q нүктесін тап;

23 Үшбұрыш қабырғаларының $M(2;1), N(5;3), P(3;-4)$ орта нүктелері берілген. Қабырғаларының теңдеулерін анықта.

24 Егер $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ теңдігі орындалса, онда $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ нүктелері бір түзудің бойында жататынын дәлелде.

25 $A(x_1, y_1)$ жәнек $B(x_2, y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ түріне келтіруге болатынын дәлелде.

26 АВС үшбұрышының $A(3;-1)$ және $B(5;7)$ төбелері мен осы үшбұрыштың биіктіктерінің қиылысу нүктесі $N(4;-1)$ берілген. Қабырғаларының теңдеулерін тап.

27 АВС үшбұрышының $A(1;3)$ төбесі мен екі медианасы $x - 2y + 1 = 0$ және $y - 1 = 0$ берілген. Қабырғаларының теңдеулерін тап.

Түзудің толық емес теңдеулері мен кесіндідегі теңдеулері:

28 *а* параметрінің қандай мәндерінде $(a + 2)x + \left(a^2 - 9\right)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$ түзуі: 1) абсцисса өсіне параллель; 2) ордината өсіне параллель болатынын; 3) координат басынан өтетінін анықтап, сәйкес теңдеулерін жаз;

29 m және n параметрілерінің қандай мәндерінде $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ түзуі абсцисса өсіне параллель болып, ордината өсінен сан шамасы -3-ке тең болатын (координат басынан есептегенде) кесіндіні қиып өтетінін анықта, теңдеуін жаз.

30 m және n параметрілерінің қандай мәндерінде

$(2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0$ түзуі ординат өсіне параллель болып, абсцисса өсінен сан шамасы +5-ке тең болатын (координат басынан есептегенде) кесіндіні қиып өтетінін анықта, теңдеуін жаз.

31 $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ түзулерінің бірнүктеде қиылысып немесе параллель болуы үшін $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$ шарты орындалуының қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеңіздер.

32 *a* параметрінің қандай мәнінде $2x-3y+3=0$, $x+y+3=0$, $ax+y-13=0$ түзулері бір нүктеде қиылысады?

33 Берілген түзулердің кесіндідегі теңдеулерін жаз:

1) $2x+3y-6=0$; **2)** $4x-3y+24=0$; **3)** $2x+3y-9=0$; **4)** $3x-5y-2=0$. Осы түзулердің координат өстерінен қиып өтетін кесінділерінің шамасына көңіл аудар.

34 $M(3;-7)$ нүктесі арқылы өтіп, координат өстерінен шамалары бірдей кесінділерді қиып өтетін түзудің теңдеуін жаз;

35 $P(2;3)$ нүктесі арқылы өтіп, координат өстерінен ұзындықтары тең кесінділерді қиып өтетін түзудің теңдеуін жаз;

Түзудің нормаль теңдеуі. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

36 Түзулердің жалпы теңдеуін нормаль түріне келтір:

1) $4x-3y-10=0$; 2) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$; 3) $12x-5y+13=0$;

4) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$;

37 Координат басынан берілген түзуге түсірілген нормальдің полярлық бұрышы α мен ұзындығы р-ны анықта:1) $x-2=0$;

2) $x+2=0$; 3) $y-3=0$; 4) $y+3=0$; 5) $\sqrt{3}x+y-6=0$;

6) $x-y+2=0$; 7) $x+\sqrt{3}y+2=0$; 8) $x\cos\beta-y\sin\beta-q=0; q>0; \beta-$ сүйір бұрыш; 9)) $x\cos\beta+y\sin\beta+q=0; q>0; \beta-$сүйір бұрыш;

38 Берілген нүктенің берілген түзуден ауытқуы δ мен қашықтығы ***d***-ны анықта: 1) $A(2;-1)$, $4x+3y+10=0$;

2) $B(0;3)$, $5x-12y-23=0$; 3) $P(-2;3)$, $3x-4y-2=0$;

4) $Q(1;-2)$, $x-2y-5=0$;

39 $M(1;-3)$ нүктесі мен координат басының берілген түзуге қатысты қалай орналасатынын анықта және олардың орналасу тәртібі түзудің нормаль теңдеуіндегі бос мүшесінің таңбасына тәуелді болатынына көңіл аудар: 1) $2x-y+5=0$; 2) $x-3y-5=0$; 3) $3x+2y-1=0$; 4) $x-3y+2=0$;

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 1 Анықтауыштың мәнін есепте: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot4-1\cdot3=5$

Мысал 2 Анықтауыштың мәнін есепте

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 2 = -10$$

Мысал 3 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Мысал 4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Мысал 5 Кері матрицаны тап:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 + 0 + 2 - 3 - 0 = -6 .$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Мысал 7 Кері матрица көмегімен $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесінің шешімін табу керек.

Шешуі Бұл жағдайда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

Жүйенің матрицасының анықтаушы нөлге тең емес, $|A| = 1$. Сондықтан А матрицасына кері матрицаны табуға болады. Кері A^{-1} матрицасын табу үшін А матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Енді кері матрицаны:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

формуласы бойынша есептейміз:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Кері матрицаның дұрыс есептелгенін тексеруге болады:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Жүйенің шешуін (8) формула бойынша табамыз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -3 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Осыдан $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$ шешулерін аламыз.

Мысал 9 табыңдар: $|\vec{в} - \vec{a}|$, егер $\vec{a} = (3{,}1), \vec{в} = (2{,}4)$

Шешуі: $\vec{в} - \vec{a} = (2-3;4-1) = (-1;3)$. Онда $|\vec{в} - \vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Мысал 10 $\vec{a} = (2{,}3{,}1), \vec{в} = (3{,}1{,}0)$. Табу керек: $\vec{a}\vec{в}$.

Шешуі: $\vec{a} \cdot \vec{в} = 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 = 9$

Мысал 11 $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.

Шешуі: $\cos j = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{9}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+0^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{140}}$

Мысал 12 $\vec{в}$ вектордың $\vec{a}$ векторға проекциясын табу керек.

Шешуі: $\vec{в}$ вектордың $\vec{a}$ векторға проекциясы $np_{\vec{a}}\vec{в} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|} = \dfrac{9}{\sqrt{14}}$. формуласы арқылы табылады. Егер $\vec{a} \perp \vec{в}$, онда олардың арасындағы бұрыш $j = 90^0, \cos j = 0$. Онда $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, яғни $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - екі вектордың перпендикуляр болу шарты.

Мысал 13 m -нің қандай мәнінде $\vec{a} = (2{,}3,m)$ және $\vec{b} = (3{,}4{,}2)$ векторлары перпендикуляр болады?

Шешуі: $2\cdot 3 + 3\cdot 4 + m\cdot 2 = 0, \quad 2m = -18$, $m = -9$.

Мысал 14 $\vec{a} = (1{,}2{,}3), \vec{в} = (2,-1{,}1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін және оның модулін табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} = (5{,}5,-5)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{75}$$

Мысал 18 Түзулердің бұрыштық коэффициентін табу керек: y=3x+5;4y+2x-1=0 , k=3; y=-2\4x+1\4, осыдан k=-2\4=-1\2

Мысал 19 Берілген $A_1 = (2;-3;1)$ және $A_3 = (-1;-4;2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі Кеңістіктегі екі $M_0(x_0, y_0, z_0)$ және $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Осы формула көмегімен іздеп отырған түзудің теңдеуін жазамыз:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+3}{-4+3} = \frac{z-1}{2-1}, \qquad \frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

Бұл түзу $M(2;-3;1)$ нүктесі арқылы және $\vec{S}\{-3;-1;1\}$ векторына параллель өтеді.

Тақырып 2. Математикалық талдауға кіріспе

Жоспар:

Тізбектің шегі

Функцияның шегі

Функцияның үзәләссәздігі

Тапсырмалар:

1 Тізбекті есепте

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^2 - 3n + 1}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4}{n^3+1}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 + (n-2)^2}{(n+3)^2}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$

2 Берілген функциялардың анықталу обласын тап

1. $y = \frac{x^2}{1+x};$
2. $y = \sqrt{3x - x^2};$
3. $y = \log_3(x^2 - 4);$
4. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x};$
5. $y = \arccos\frac{x}{5};$
6. $y = \frac{x^2}{1+x};$
7. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6};$
8. $y = \frac{1}{x - x^2};$
9. $y = \frac{1}{x^2+1};$
10. $y = \sqrt{-ax};$

3 Шектерді есепте

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$;

2. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$;

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+3x-27}{x^2-6x-27}$;

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2}{x+5}$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^x$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{2\sin x}$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

4 функцияларды үзіліссіздікке зерттеу керек

1. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0 \\ x+1, & 0\le x<4 \\ 3+x, & x>4. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>2. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2+x, & x>1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x^2+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 1 $y=\sqrt{1-2x}$ функциясының анықталу обласы $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$, ал өзгеру обласы $[0;+\infty)$.

Мысал 2 $y=\log_a(x+1)$ $a>0,\ \ a\ne 1$ функциясының анықталу обласы $(-1;+\infty)$, ал өзгеру обласы $(-\infty;+\infty)$

Мысал 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+2)(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+\sqrt{x})}{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Мысал 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0$$

М±ндағы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ (бірінші тамаша шек)

Мысал 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$

Бесінші және алтыншы мысалдардағы шектер бізге белгілі $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^{z}=e$ немесе $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ теңсіздіктерін ќолдану арќылы есептеледі.

Мысал 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{k}=e^{k}$

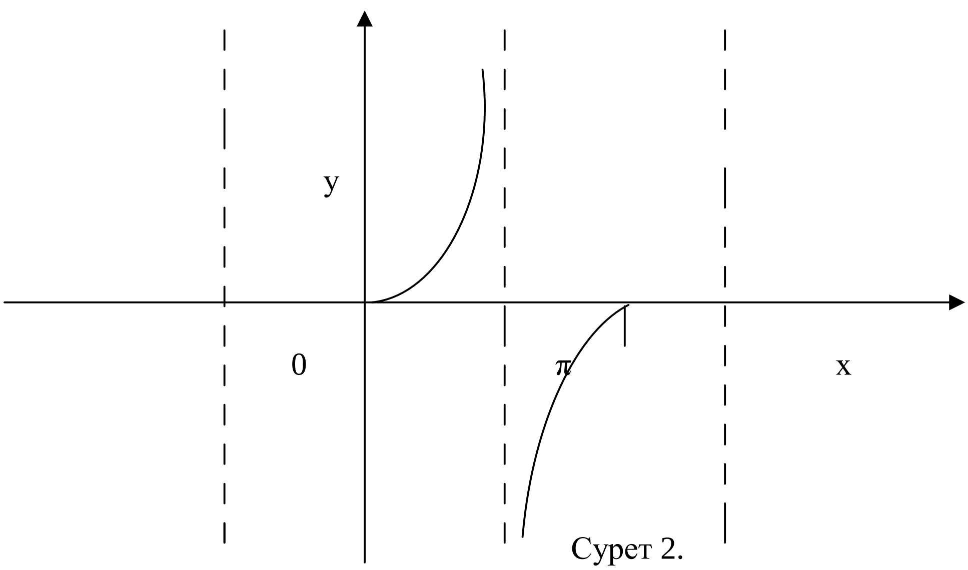
Мысал 6 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}(1+(1-x))^{\frac{1}{1-x}}=e$

Ескерту: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ шегі $\dfrac{0}{0}$ анықталмағандығын, ал $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ және $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ шектері 1^{∞} анықталмағандығын айқындайды.

Мысал 2 $f(x)=tgx,\quad x\in[0;\pi],$ функциясын $x=\dfrac{\pi}{2}$ нүктесінде функцияны үзіліссіздікке зерттейік.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}-0} tgx=\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}+0} tgx=-\infty$$

теңдіктері орындалады, демек $x=\dfrac{\pi}{2}$ шексіз үзіліс нүктесі. (Сурет-2)



Сурет 2.

Тақырып 3. Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі
Жоспар:
Функцияның туындысы
Туындының қолданулары
Тапсырмалар:
А. 01 Мына функциялардың туындысын тап

1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$
2. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$
3. $y = x^4 - 3x^2 + 17$
4. $y = x^3(x^2 - 1)^2$
5. $y = \frac{x}{1 + x^2}$
6. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$
7. $y = \sqrt[3]{x}$
8. $y = \frac{x - 1}{x + 1}$
9. $y = \frac{3x - 1}{x^5}$
10. $y = \sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$
12. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$

А.02 Функциялардың y'_x туындысын тап.

1. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$

А.03 Функцияларды дифференциалда

1. $y = (\ln x)^{3^x}$
2. $y = x^{e^{\cos x}}$
3. $y = x^{e^x} \cdot x^9$
4. $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$
5. $y = x^{\sin x^2}$
6. $y = (\mathrm{tg} x)^{\ln \mathrm{tg}\frac{x}{4}}$
7. $y = x^{e^{\mathrm{tg} x}}$
8. $y = (\arcsin x)^{e^x}$
9. $y = (\cos x)^{e^{5x}}$
10. $y = (\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

А.04 Жуықтап есепте.

1. $\arcsin 0{,}05$ 2. $\mathrm{arctg} 1{,}04$ 3. $\ln 1{,}2$ 4. $\sqrt[3]{25}$

5. $f(x) = e^{x^2 - x}$; $f(1;2)$ табу керек.

А.05 Функцияның экстремумдарын тап:

1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$
2) $y = \frac{1}{\ln\left(x^4 + 4x^3 + 30\right)}$
3) $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1 - x}}$
4) $y = (x - 2)^2\sqrt[3]{(x + 1)^2}$

5) $y = x - \ln(1+x)$ 6) $y = x\mathrm{Sin}x + \mathrm{Cos}x - \frac{1}{4}x^2$

А.06 Функцияның сегменттегі ең үлкен және ең кіші мәндерін тап:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5;$ $[-2,2]$

2) $y = \frac{x-1}{x+1};$ $(0 \le x \le 1)$

3) $y = \sqrt{100 - x^2};$ $(-6 \le x \le 8)$

4) $y = \mathrm{Sin}2x - x;$ $\left(-\pi/2 \le x \le \pi/2\right)$

А.07 Функцияның ойыстық, дөңестікк интервалдарын және ирең нүктелерін тап.

1) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ 2) $y = (x+1)^4 + e^x$

3) $y = (x+1)^4 + e^x$ 4) $y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$ $(a > 0)$

5) $y = x^4(12\ln x - 7)$ 6) $y = e^{\mathrm{arctg}x}$

А.09 Берілген функцияны толық зертте:

1) $y = \frac{x}{1+x^2}$ 2) $y = \frac{1}{1-x^2}$ 3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ 4) $y = \frac{x}{e^x}$ 5) $y = x + \mathrm{Sin}x$

Лопиталь Ережесін пайдаланып шектерді есептеңдер

А.10

1 $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$; 2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$; 4 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$

5 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \mathrm{arctg}x}{x^3}$; 6 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал $y = \sin^2 x$ функцияның туындысын табу керек.

Шешуі $\sin x = z$ десек, $y = z^2$ болады. Формула бойынша

$$y' = 2z \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x .$$

Параметрлік түрде берілген функцияны алайық, яғни $y = y(x)$ функциясы мына түрде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ берілсін. Бұл функцияның туындысы $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ формуласы бойынша анықталады.

Мысал $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ функцияның туындысын табу керек.

Шешуі $y'_x = \dfrac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t} = \dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t} = -tgt$

Енді төмендегі айқындалмаған функцияның туындысын табайық. $x^2 + y^2 = b$, $2x + 2yy' = 0$, осыдан $y' = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$ шығады.

13 − мысал Берілген $y = x^2 - 6x + 3$ қисығының абсциссасы $x_0 = 2$ болатын нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдың теңдеулерін жазу керек.

Шешуі Жанасу нүктесінің ординатасын табайық: $y_0 = x_0^2 - 6x_0 + 3 = -5.$ Қисыққа жанаманың бұрыштық коэффиценті туындының x_0 нүктесіндегі мәніне тең: $k = y'(x_0) = \left(x^2 - 6x + 3\right)' x_0 = (2x - 6)_{x_0=2} = -2.$ Енді $x_{0/} y_{0/}$ және y'_0 мәндерін жанаманың теңдеуіне қоямыз:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{28}$$

$$y + 5 = -2(x - 2), \quad 2x + y + 1 = 0 \ \ (\text{жанама})$$

Осы сияқты $x_{0/} y_0$ және y'_0 мәндерін нормальдың теңдеуіне қоямыз:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \tag{29}$$

$$y + 5 = -\frac{1}{-2}(x - 2), x - 2y - 12 = 0 \ \ (\text{нормаль})$$

14 − мысал Лопиталь ережесін пайдаланып, мына функциялардың шегін есептеу керек:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(4 + x^2\right)}{x^2}$.

Шешуі 1) Аргументтің шектік мәні x=-1-ді орнына қойсақ $\dfrac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады. Оны ашу үшін Лопиталь ережесін қолданайық:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{30}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = \lim\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^3 + 4x^2 + 5x + 2\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{3x^2 + 8x + 5}.$$

Лопиталь ережесін бірінші рет қолданудан анықталмағандық ашылған жоқ. Сондықтан ол ережені тағы да қолданамыз:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{3x^2+8x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)'}{(3x^2+8x+5)'}=\lim_{x\to -1}\frac{2}{6x+8}=1.$$

2) Анықталмағандық $\frac{\infty}{\infty}$ түрінде екендігіне көз жеткізгеннен кейін Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(4+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(4+x^2)]'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{(4+x^2)\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4+x^2}=0.$$

15 − мысал Мына функцияны зерттеп графигін салу керек: $y=\frac{x^2}{x-1}$.

Шешуі 1) Функцияның анықталу облысы. $x\neq 1$, $x = 1$ функцияның үзіліс нүктесі.

2) Функция симметриялы да, периодты да емес.

3) Функцияның монотонды өсу және кему аралықтары, экстремум нүктелері. Функцияның бірінші туындысын табамыз: $y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Бірінші туындыны нөлге теңестіріп экстремум беретін нүктелерін іздейміз: $y'=0, x(x-2)=0, x_1=0, x_2=2.$ Ал $y'\to\infty$ шартынан $y_3=1$ нүктесі алынады. Туындының осы нүктелердің әрқайсысының оң және сол жақтарындағы таңбаларын зерттейміз. Көрнекті бөлу үшін нәтижелерді кестеге толтырайық:

x	$(-\infty,0)$	0	(0;1)	1	(1;2)	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y	$\nearrow$	max 0	$\swarrow$	анықталмаған	$\swarrow$	min 4	$\nearrow$

Сонымен, функцияның максимум нүктесі: $x_{max}=0$, $y_{max}=0$, немесе (0;0), ал минимум нүктесі: $x_{min} = 2$, $y_{min} = 4$ немесе (2;4). Функция $x=1$ нүктесінде анықталмағандықтан ол нүктеде экстремум жоқ.

4) Функцияның грфигінің ойыс, дөңестігі, иілу нүктелері. Екінші туындыны табайық: $y''=\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]'=\frac{2}{(x-1)^3}$. Екінші туынды ешқандай нүктеде нөлге айналмайды, ал $x=1$ нүктесінде шексіздікке ұмтылады. Сол $x=1$ нүктесі арќылы өткенде екінші туынды таңбасын өзгертеді. Бірақ ол иілу нүктесі болмайды, өйткені ол нүктеде функция анықталмаған.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	-	∞	+
y	$\cap$		$\cup$

5) Асимптоталары. Тік асимптотасы жоғарыда табылды: $x=1$ түзуі. Енді көлбеу асимптоталарын іздейміз:

$$y = kx + b, \quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] \qquad (31)$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x-1} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Сондықтан көлбеу асимптотаның теңдеуі $y = x + 1$ түрінде болады.

6) Функцияның шектік мәндерін зерттейік:

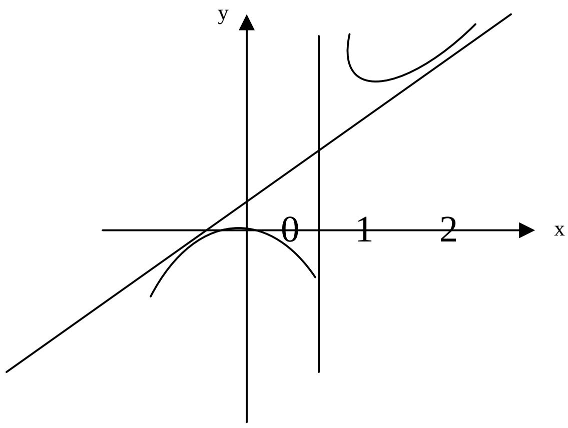
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to1\pm0} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

Функцияның графигі координаталар өсіне (0;0) нүктесінде қиып өтеді.

7) Осы нәтижелерді пайдаланып $y = \frac{x^2}{x-1}$ фунйциясының графигін саламыз.



Сурет 30

Тақырып 4 Анықталмаған және анықталған интеграл

Жоспар:

Анықталмаған интеграл

Анықталған интеграл

Тапсырмалар:

A.01 Есептеңіздер: $i^2, i^3, i^4, i^{231}, i^{318}, \frac{1}{i^3}, i^{-3}, i^{-231}, i^n.$

A.02 Берілген кешен сандардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісінің геометриялык бейнесін табыңыздар

1) $\alpha = 1; \beta = 1 + i;$ 2) $\alpha = 3 - i; \beta = 1 + 2i;$ 3) $\alpha = -2 + i; \beta = 2 + i;$

4) $\alpha = 1 + i; \beta = 1 - i;$ 5) $\alpha = a + bi; \beta = c + di$

A.03 Амалдарды орындаңыздар

$1.\frac{1}{i}$; $2.\frac{1-i}{1+i}$; $3.\frac{2}{1-3i}$; $4.\frac{a+bi}{c+di}$.;

A.04 Кешен сандардың нақты және жорамал бөлімдерін, модулі мен аргументтерін табыңыздар. Оларды тригонометриялық
және көрсеткіштік түрінде жазыңыздар

1. $3i$; 2. -2; 3. $1+i$; 4. $-1-i$; 5. $2+5i$; 6. $2-5i$; 7. $2+5i$; 8. $-2-5i$; 9. $bi, (b \neq 0)$.

A.01 Интегралдарды есептеңдер

1 $\int \sqrt{x}dx$ 2 $\int \frac{dx}{x^2}$ 3 $\int 10^x dx$ 4 $\int (x^3-3x^2+5)dx$ 5 $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)}dx$

6 $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$ 7 $\int ctg^2xdx$ 8 $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$ 9 $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$

10 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx$

A.02 Толық квадратты бөлу және жіктеу тәсілін пайдаланып интегралдарды тап.

1 $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; 2 $\int \frac{dx}{x(x+1)}$; 3 $\int \frac{dx}{4x^2-9}$;

4 $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$; 5 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

A.03 Тригонометриялық формулалар арасындағы тепе-теңдікті
пайдаланып интегралдарды тап.

1 $\int \cos^2 xdx$ 2 $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

3 $\int \cos 2x\cos 3xdx$ 4 $\int \sin 2x\sin 5xdx$

5 $\int \cos 2x\sin 3xdx$ 6 $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}$

7 $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ 8 $\int \cos^3 xdx$

9 $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$ 10 $\int tg^4xdx$

A.01 Интегралдарды есептеңдер

1 $\int x\sin 2xdx$; 2 $\int xe^{-x}dx$; 3 $\int x3^x dx$;

4 $\int (x+2)e^{3x}dx$; 5 $\int x\cos 3xdx$

A.02

1 $\int xarctgxdx$; 2 $\int \arccos xdx$; 3 $\int \ln xdx$;

4 $\int x^2 \ln x dx$; 5 $\int \arcsin x dx$; 6 $\int \sqrt{x} \ln x dx$

A.03

1 $\int \ln^2 x dx$; 2 $\int \arcsin^2 x dx$; 3 $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$;

4 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$; 5 $\int \ln(x^2 + 1) dx$

A.04

1 $\int x^2 e^{-x} dx$ 2 $\int x^2 e^{3x} dx$

3 $\int x tg^2 x dx$ 4 $\int x \cos x dx$

5 $\int x^2 \ln(1 + x) dx$ 6 $\int x^2 \cos^2 x dx$

7 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ 8 $x(arctgx)^2 dx$

9 $\int e^x \sin x dx$ 10 $\int (\arcsin x)^2 dx$

11 $\int \sin \ln x dx$ 12 $\int \cos \ln x dx$

13 $\int e^{3x} (\sin 2x - \cos 2x) dx$ 14 $\int \sin \ln(\cos x) dx$

A.05

1 $\int x^2 e^{-x^3} dx$ $(t = -x^3)$ 2 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}$ $(t = \sqrt{x+3})$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ $(x = t^4)$ 4 $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$

5 $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 6 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

7 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ 8 $\int \frac{dx}{x \ln^5 x}$

9 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ 10 $\int \sqrt[3]{arctgx} \frac{dx}{1+x^2}$

11 $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$ 12 $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

13 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $(x = \frac{1}{z})$ 14 $\int e^x \sin(e^x) dx$

15 $\int e^x \cos(3e^x + 1) dx$ 16 $\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}$

17 $\int e^{x^2+x+1}(2x+1) dx$ 18 $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - e^{2x}}}$

19 $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx$ 20 $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

А.06 Тригонометриялық алмастыруларды пайдаланып интегралдарды табу керек.

1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$

3 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 4 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}dx}{x}$

5 $\int \sqrt{1-x^2}dx$ 6 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}dx}{x}$

7 $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ 8 $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

9 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$ 10 $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

А.01 Интегралдады есептеңдер

1 $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$ 2 $\int \frac{x^2}{x^2+3}dx$

3 $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-1)}dx$ 4 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+21)(x+3)}$

А.02

1 $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$ 2 $\int \frac{4dx}{x(x^2+4)}$

3 $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ 4 $\int \frac{8xdx}{(x^2+6x+5)(x+3)}$

А.03

1 $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ 2 $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

3 $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$ 4 $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$

А.04

1 $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2}dx$ 2 $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

3 $\int \frac{x^3-x+2}{x^4+x^2}dx$ 4 $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$

А.01 Интегралды Ньютон-Лейбниц формуласын пайдаланып есептеңдер.

1 $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$ 2 $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)^4}}$

3 $\int_0^1 (e^x-1)e^x dx$ 4 $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

5 $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$ 6 $\int_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

7 $\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ 8 $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

9 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$ 10 $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x-1}$

11 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} ctg^4 x dx$ 12 $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

13 $\int_0^1 chxdx$ 14 $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$

15 $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ 16 $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

17 $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin\frac{1}{x}dx}{x^2}$ 18 $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$

19 $\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}dx$ 20 $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx$

А.02 Бөліктеп интегралдау әдісін пайдаланып интегралдарды есептеңдер.

1 $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ 2 $\int_1^2 (3x+2)\ln x dx$

3 $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ 4 $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx$

5 $\int_1^0 (\arcsin x)^2 dx$ 6 $\int_0^{\sqrt{3}} xarctgxdx$

А.03 Айнымалыны ауыстыру әдісін пайдаланып интегралдарды есептеңдер.

1 $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ 2 $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

3 $\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ 4 $\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$

5 $\int_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^3}}dx$ 6 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

7 $\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ 8 $\int_{1}^{2}\frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$

9 $\int_{0}^{p/2}\frac{dx}{2+\cos x}$ 10 $\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

А.01 Берілген сызықтармен шенелген фигураның ауданын есепте.

1 $y^2=2x+1$ және $x-y-1=0$.

2 $y=e^{-2x},\ x=-0{,}5,\ x=1,\ y=0$

3 $y=-\frac{2}{x}, x=1, x=5, y=0$; 4 $y=\sin x,\ -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}, y=0$

5 $y=\ln x,\ \frac{1}{e}\le x\le e,\ y=0$, 6 $y=\sin x,\ y=\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}$

А.02 **Мына есептерде қисықтың ұзындығын табу керек**

1 $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \qquad 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

2 $\rho=a(1+\cos\varphi)$, 3 $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

4 $\begin{cases} x=\frac{t^3}{3}-t \\ y=t^2+2 \qquad 0\le t\le 3, \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x=8\cos t \\ y=8\sin t \qquad 0\le t\le\pi, \end{cases}$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

18 – мысал а) $\int\sqrt[4]{(5x-3)^3}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі $\int\sqrt[4]{u^3}du=\int u^{\frac{3}{4}}du=\frac{u^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+C=\frac{4}{7}\sqrt[4]{u^7}+C$ болғандықтан (33)

формулаларды пайдаланып мынадай нәтиже аламыз:

$$\int\sqrt[4]{(5x-3)^3}dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}\sqrt[4]{(5x-3)^7}+C=\frac{4}{35}\sqrt[4]{(5x-3)^7}+C.$$

б) $\int \mathrm{arctg}x\,dx$ интегралын табу керек.

Шешуі Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз:

$$\int \operatorname{arctg}x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}x, & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dx = dv, & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\operatorname{arctg}x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\operatorname{arctg}x dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = = x\operatorname{arctg}x -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ интегралын есептеу керек.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{ll} x = \frac{1}{t}, & \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2}, & \sqrt{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{t^2 \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1+t^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+t^2} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

19 – мысал $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & \sin x - \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}t, \\ x = 2\operatorname{arctg}t, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{1}{2}t^2+2t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

20 – мысал $\int \frac{2x^2-5x+8}{(x^2+2)(x+1)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі Интеграл астындағы дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектерге жіктейміз: $\frac{2x^2-5x+8}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$.

Теңдіктің екі жағын да $(x^2+2)(x+1)$ - ге көбейтіп, алымдарын теңестіріп,белгісіз коэффициенттері A, B және C - ны анықтау үшін тепе – теңдік аламыз:

$$2x^2-5x+8=A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)$$

Теңдіктің екі жағындағы бірдей дәрежелі x - тердің коэффициенттерін салыстырып, сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$x^2 : 2=A+B,$

$x :-5=B+C,$

$x^0 :8=2A+C.$

Бұл жүйенің шешуі: $A=5,\ B=-3,\ C=-2.$ Осы мәндерді орындарына қойып, интегралды есептейміз:

$$\int \frac{2x^2-5x+8}{(x^2+2)(x+1)}=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3x+2}{x^2+2}\right)dx=5\int\frac{dx}{x+1}-3\int\frac{xdx}{x^2+2}-2\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=5\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

22 – мысал Мына меншіксіз интегралдарды есептеу керек.

1) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x-1}$.

Шешуі 1) Бірінші интеграл жоғарғы интегралдау шегі шексіздікке тең меншіксіз интеграл. Оны есептеу үшін (37) анықтаманы пайдаланамыз:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

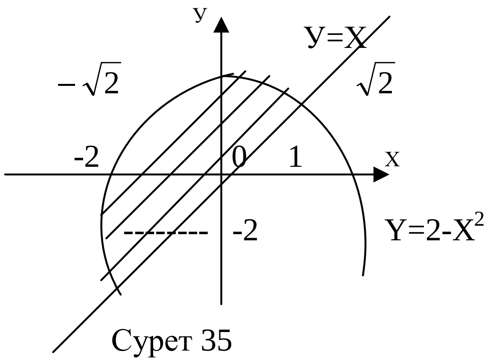
Сонымен, берілген меншіксіз интеграл жинақталады.

2) Екінші интеграл астындағы функция $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x=1$ мәнінде шексіздікке айналады. Сондықтан, (38) анықтаманы пайдаланамыз.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\ln|x-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1 - \ln[\varepsilon]\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon| = \infty$$

яғни берілген интеграл жинақталмайды.

23 – мысал Берілген $y = x$ түзуімен және $y = 2 - x^2$ параболасымен шектелген фигураның ауданын табу керек.



Сурет 35

Шешуі Парабола мен түздің қиылысу нүктелерінің абсциссасын анықтайық: $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$. Бұл жүйенің шешуі: $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Ауданды $S = \int_a^b f(x)dx$ формуласы бойынша есептейміз:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

Тақырып 5. Жай дифференциалдық теңдеулер

Тапсырмалар:

Айнымалылары бөлінетін дифференциалдық теңдеулер

45.

1) $xy' - y = 0$; **2)** $xy' + y = 0$;

3) $yy' + x = 0$; **4)** $y' = y$.

46.

1) $x^2y' + y = 0$; **2)** $y' = \frac{x}{y}$;

3) $y^2y' + x^2 = 1$; **4)** $xy' = 2y$.

47.

1) $(x+1)y' + xy = 0$; **2)** $y'\sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$;

3) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$; **4)** $xyy' = 1 - x^2$.

48.

1) $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$; **2)** $xy' + y = y^2$;

3) $y - xy' = 1 + x^2y'$; **4)** $(1 + 2y)xdx + \left(1 + x^2\right)dy = 0$

49.

1) $xy\left(1 + x^2\right)y' = 1 + y$; **2)** $e^y\left(1 + x^2\right)dy - 2x\left(1 + e^y\right)dx = 0$;

3) $y' = 10^{x+y}$ **;** **4)** $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ **.**

Біртекті теңдеулер

50.

1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$; **2)** $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

3) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; 4) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

51.

1) $y^2 + x^2 y' = xyy'$; **2)** $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$;

3) $(x-y)dx + xdy = 0$; **4)** $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

52.

1) $x^2 dy = \left(y^2 - xy + x^2\right)dx$; **2)** $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$;

3) $y' = e^{\frac{x}{y}} + \dfrac{x}{y}$; **4)** $2x^2 y' = x^2 + y^2$.

53.

1) $y' - \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1} = \dfrac{y+2}{x+1}$; **2)** $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$;

3) $(x+y)dx + (x - y - 2)dy = 0$; **4)** $2x + 3y - 5 + (3x + 2y - 5)y' = 0$

54.

1) $8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$; **2)** $(x+y)dx + (x + y - 1)dy = 0$;

3) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}, y(1) = 1$; 4) $\left(\sqrt{xy} - x\right)dy + ydx = 0,\ y(1) = 1.$

Бірінші ретті сызықтық теңдеулер

55.

1) $y' + x^2 y = x^2$; **2)** $xy' + y = e^x$;

3) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$; **4)** $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

56.

1) $y' = \dfrac{3y}{x} + x$; **2)** $y' + y\operatorname{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$;

3) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$; **4)** $xy' + y = \ln x + 1$.

57.

1) $\left(1 + x^2\right)y' = 2xy + \left(1 + x^2\right)^2$; **2)** $y' + 2y = e^{2x}$;

3) $y' + y\cos x = \sin 2x$;   **4)** $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$;

58.

1) $y'x + y = -xy^2$;   **2)** $y' = x^3y^3 - xy$;

3) $xy' + y = y^2 \ln x$;   **4)** $xy' + 2y = x^5y^2$.

59.

1) $y' + 2y = 4x$;   **2)** $y' + y = \cos x$;

3) $y' = \frac{1}{2x - y^2}$;   **4)** $y' + \frac{4}{x} = 2\ln x + 1$.

Толық дифференциалды теңдеу

60.

1) $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xydy = 0$;

2) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dx = 0$;

3) $e^{-y}dx + \left(1 - xe^{-y}\right)dy = 0$;

4) $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0$;

61.

1) $e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$;

2) $yx^{y-1}dx + x^y \ln xdy = 0$;

3) $(x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2ydy = 0$;

4) $(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

62.

1) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2ydy}{x^3}$;   **2)** $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$;

3) $\frac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}dy + \sin ydy = 0$;

4) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)ydy = 0$;

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

52 – мысал Берілген $xy' - y = x^2\cos x$ теңдеуінің $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ алғашқы шартын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Осы теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуін табайық:

$$xy' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Екі жағын да интегралдап $\ln y = \ln x + \ln C, \; y = Cx$ шешуін аламыз. Тұрақтыны вариациялау әдісін қолданайық. Ол үшін тұрақтыны $C = C(x)$ деп алайық. Сонда $y = C(x)x$ функциясын біртексіз теңдеудің шешуі түрінде іздейміз. Бұл теңдіктен $y' = C'(x)x + C$ тауып, y пен y' - ті берілген теңдеуге қоямыз. Сонда

$$x\left[C'(x)x + C\right] - C(x)x = x^2 \cos x$$

немесе

$$x^2\left[C'(x)x - \cos x\right] = 0$$

теңдігі алынады. Мұнда $x \neq 0$, өйткені егер $x = 0$ болса, онда $y = 0$. Ал алғашқы шарт бойынша $x = \frac{\pi}{2}$ болғанда $y = 0$ болу керек. Сондықтан

$$C'(x) - \cos x = 0, \quad \frac{dC(x)}{dx} = \cos x, \; dC(x) = \cos x dx, \; C(x) = \sin x + C$$

Осыны жалпы шешуі $y = C(x)x$ формуласына қойып, берілген біртексіз теңдеудің жалпы шешуін аламыз:

$$y = (\sin x + C)x$$

Дербес шешуін табу үшін $x = \frac{\pi}{2}, \; y = 0$ мәндерін соңғы теңдікке қоямыз:

$$0 = \left(\sin\frac{p}{2} + C\right)\frac{p}{2}$$

Осыдан $C = -1$. Сонда берілген теңдеудің дербес шешуі:

$$y = (\sin x - 1)x$$

түрінде алынады.

53 – мысал Берілген $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$ теңдеуінің $y(0) = 1, \; y'(0) = 3$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Берілген екінші ретті дифференциалдық теңдеу құрамында y айнымалысы жоқ.

Енді $y' = p$ деп белгілейік. Мұндағы, p кез келген x - тің функциясы. Егер $y' = p$ болса, онда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}$. Берілген теңдеуге осы туындыларды қойып:

$$(x^2 + 1)\frac{dp}{dx} = 2xp$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешуі

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2 + 1}, \quad \int\frac{dp}{p} = \int\frac{2xdx}{x^2 + 1}, \quad \ln p = \ln(x^2 + 1) + \ln C_1$$

Осыдан $p = C_1(x^2 + 1)$ немесе $y' = C_1(x^2 + 1)$ табылады. Алғашқы шарттарды пайдаланайық:

$$3 = C_1(0 + 1), \text{ яғни } C_1 = 3$$

Енді бірінші ретті $y' = 3(x^2+1)$ теңдеуінің шешуін табайық:

$$dy = 3(x^2+1)dx, \quad y = 3\int(x^2+1)dx = x^3 + 3x + C_2$$

Алғашқы шартты пайдаланып C_2 мәнін табамыз:

$$1 = 0 + 0 + C_2, \quad C_2 = 1$$

Сонымен $y = x^3 + 3x + 1$ берілген теңдеудің алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешуі.

54 – мысал Берілген $yy'' - y'^2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі Теңдеу құрамында y белгісізі жоқ. Сондықтан $y' = p(y)$ деп алып.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

теңдігін жазамыз. Сонда теңдеуге қойып:

$$y\cdot p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

осы теңдеудің шешуін $p = C_1 y$ түрінде аламыз. Сондықтан,

$$y' = C_1 y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx, \ \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|, \ \ y = C_2 e^{C_1 x}$$

шешуі табылады. Теңдеуді шешкенде оны y пен p - ға бөлдік. Соның салдарынан $y = 0$ және $p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C$ шешулерін жоғалтуымыз мүмкін. Бірақ бұл шешулер жалпы шешу $y = C_2 e^{C_1 x}$ құрамында C_1 және C_2 мәндері нөл мәнін қабылдаған жағдайда алынады.

55 – мысал Берідген $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$ теңдеуінің жалпы шешуі мен алғашқы $y(0) = \frac{1}{12}, \quad y' = -\frac{1}{8}$ шарттарын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеуді қарастырайық. Оның сипаттамалық теңдеуі $k^2 + 3k - 10 = 0$. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері $k_1 = -5, \ k_2 = 2$ болғандықтан, біртекті теңдеудің жалпы шешуін $y_0 = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$ түрінде жазуға болады. Бұл жағдайда $\alpha = -2$. Ондай сипаттамалық теңдеудің түбірі жоқ. Сондықтан x көбейткіші болмайды. Туындыларды есептейміз:

$$y'_д = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x} = e^{-2x}(A - 2A - 2B)$$

$$y'_д = e^{-2x}(-2A + 4Ax + 4B - 2A) = e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A)$$

Осыларды біртекті теңдеуге қоямыз:

$$e^{-2x}(4Ax + 4B - 4A) + 3e^{-2x}(A - 2Ax - 2B) - 10e^{-2x}(Ax + B) = xe^{-2x}$$

Ал $e^{-2x} \neq 0$ болғандықтын, қысқартып мынадай өрнек аламыз:

$$4Ax + 4B - 4A + 3A - 6Ax - 6Ax - 6B - 10Ax - 10B = x$$

немесе

$$-12Ax - A - 12B = x\,.$$

Осыдан

$$-12A=1,\ A=-\frac{1}{12},\ -A-12B=0,\quad B=-\frac{1}{12}A=\frac{1}{144}.$$

Сонда біртексіз теңдеудің дербес шешуі

$$y_д=\left(-\frac{1}{12}x+\frac{1}{144}\right)e^{-2x}=\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}$$

түрінде жазылады. Берілген теңдеудің жалпы шешуі:

$$y=y_0+y_д=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}$$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешуін іздейік.

$$\frac{1}{12}=C_1+C_2+\frac{1}{144},\quad y'=-5C_1e^{-5x}+2C_2e^{2x}+\frac{1}{144}e^{-2x}(24x-14)$$

$$-\frac{1}{8}=-5C_1+2C_2-\frac{14}{144},\quad \begin{cases}C_1+C_2=\frac{11}{144},\\ -5C_1+2C_2=-\frac{4}{144}\end{cases}$$

Осыдан $C_1=\frac{13}{504},\quad C_2=\frac{17}{336}$. Енді дербес шешуді мына түрде жазамыз:

$$y=\frac{13}{504}e^{-5x}+\frac{17}{336}e^{2x}+\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}.$$

Тақырып 6. Көп айнымалы функциялар

Жоспар:

Тапсырмалар:

2. Функциялардың анықталу облыстарын тап:

1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; 2) $z=1+\sqrt{-(x-y)^2}$;

3) $z=\ln(x^2+y)$; 4) $z=x+\arccos y$;

5) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$; 6) $z=\arcsin\frac{y}{x}$;

7) $z=\sqrt{x^2-y}+\sqrt{4-y^2}$; 8) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

9) $u=\ln(xyz)$.

9. Функцияның дербес туындыларын тап:

1) $z=x^3+8y^3-6xy$; 2) $z=100+15x-2x^2-xy-2y^2$;

3) $z=2x^3+2y^3-6xy+3$; 4) $z=4(x-y-1)-x^2-y^2$;

5) $z=(x-1)^2+2y^2+1$; 6) $z=x\sqrt{y}-x^2+y+6x$;

7) $\ln(x^2+y^2)$; 8) $z=\sin(xy)$;

9) $z=\frac{y^2}{x-1}$; 10) $z=\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x}$.

10. Функцияның толық дифференциалын табу керек.

1) $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 5$; 2) $z = 6(x - y - 1) - 3x^2 - 3y^2$;

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 20$; 4) $z = 2x^3 + (y + 1)^2 + 2$;

5) $z = 2xy - x^2 - 4y^3 + 1$; 6) $z = \sqrt{xy}$;

7) $z = \ln(x + y^2)$; 8) $z = (x + y^2)^3$; 9) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

11. Бетке M нүктесінже жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

1) $z = \ln(1 - xy),\ M(0,2,0)$; 2) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y}},\ M(0,1,1)$;

3) $z = \sqrt{x + y^2 + 2},\ M(-2,-1,1)$; 4) $z = \sqrt{xy} - 1,\ M(2,2,1)$;

5) $z = \dfrac{y - 2}{x - y},\ M(2,1,-1)$; 6) $z = \dfrac{x^2 + 1}{y},\ M(1,-1,-2)$.

12. Функциясының екінші ретті дербес туындыларын табу керек.

1) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 2$; 2) $z = 2xy - 5x^3 - 3y^2 + 3$;

3) $z = \cos(x^2 + y)$; 4) $z = tg(x + y)$;

5) $z = \ln(1 - xy)$; 6) $z = \dfrac{y^2}{x - 1}$;

7) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; 8) $z = e^{x^2 - y^2}$.

13. $\dfrac{dz}{dt}$ -ны тап, егер

1) $z = e^{x+2y},\ x = \cos t,\ y = t^2$ 2) $z = \dfrac{x}{y},\ x = e^t,\ y = \ln t$

14. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ теңдігін тексер, егер $z = x^y$

15. $d^2 z$ тап, егер 1) $z = e^{xy}$. 2) $z = e^x \cdot \cos y$

16.

1) $u = x + \dfrac{x - y}{y - z}$ болса, онда $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$ орындалатынын көрсет.

2) $u = (x - y) + (y - x)(z - x)$ болса, онда $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ орындалатынын көрсет.

3) $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ болса, онда $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ орындалатынын көрсет.

17. $f'_x(x,1)$ тап, егер $f(x,y) = x + (y-1)\cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$

18. Екінші ретті дербес туындыларын тап.

1) $u = xy + \frac{x}{y}$ 2) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

27. Функцияны экстремумға зертте.

1) $z = 4(x - y - 1) - x^2 - y^2$ 2) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 20$

3) $z = 2x^2 + (y+1)^2 + 2$ 4) $z = x^3 + y^3 - 3xy + 2$

5) $z = xy(6 - x - y)$ 6) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

34. Функцияның экстремумын тап:

1) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ 2) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$

3) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$

35. Шартты экстремум нүктелерін тап.

1) $u = x^2 + y^2 + z^2$ егер $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a > b > c > 0)$

2) $u = x - 2y + 2z$ егер $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

27 – мысал Мына функциялардың анықталу облыстарын табу керек.

а) $z = \frac{1}{x+y}$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$; в) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$;

г) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$; d) $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

Шешуі а) $y \neq -x$ $x + y = 0$ түзуінің нүктелерінен басқа жазықтық нүктелері;

б) $x^2 + y^2 \geq 4$ – центрі бас нүктеде, радиусы 2 – ге тең шеңбердің нүктелері және ол шеңберден тыс жатқан нүктелер;

в) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ – $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипсінде және оның ішінде жатқан нүктелер;

г) $\begin{cases} y^2 \leq 4x \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$ – $y^2 = 4x$ параболасының ішкі жағындағы парабола мен $x^2 + y^2 = 1$ арасындағы жазықтық бөлігі. Параболаның доғасы анықталу облысына жатады, ал шеңбердің доғасы жатпайды.

d) $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ - бірінші октант .

28 – мысал Мына функциялардың дербес туындылары мен толық дифференциалын табу керек.

а) $z = x^2y - xy^2 + 3$; б) $z = \frac{x}{y}e^{xy}$;

в) $z = (\sin x)^{\cos y}$; г) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Шешуі а) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy$;

б) $dz = e^{xy}\left[\left(\frac{1}{y} + x\right)dx + \frac{x}{y}\left(x - \frac{1}{y}\right)dy\right]$;

в) $dz = (\sin x)^{\cos y}\left[\cos y\,\mathrm{ctg}x\,dx - \sin y\ln\sin x\,dy\right]$;

г) $dz = \frac{1}{x^2 + y^2}(xdx + ydy)$.

29 – мысал Айқындалмаған түрде берілген $xe^y + ye^x = 2$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^/(x, y)}{F_y^/(x, y)};$$

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0;$$

$$F_x^/ = e^y + ye^x, \quad F_y^/ = xe^y + e^x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - ye^x}{xe^y + e^x}.$$

30 – мысал Мына $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ функциясын экстремумға зерттеу керек.

Шешуі Экстремумның қажетті шарттарын қанағаттандыратын нүктелерді іздейміз. Ол үшін берілген функцияның дербес туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіріп жүйенің шешуін табамыз:

$$\begin{cases} z_x^/ = 2x + y - 2, \\ z_y^/ = x + 2y - 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Жүйенің шешуі: $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Сонымен $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ - кризистік нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарттарын тексереміз:

$$A = z_{xx}^{//} = 2, \; B = z_{xy}^{//} = 1, \; C = z_{yy}^{//} = 2,$$

$\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$ және $A > 0$.

Сондықтан, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – минимум нүктесі.

Тақырып 7. Сан қатарлары

Жоспар:

Тапсырмалар:

Сандық қатарлардың жинақталуы:

1. Берілген қатарлардың: 1) алғашқы n мүшесінің қосындысын тап (n-ші дербес қосынды S_n); 2) анықтама бойынша қатардың жинақтылығын дәлелде; 3) қатардың қосындысын тап.

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$

2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$

3) $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots;$

4) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots.$

2. Берілген қатарлардың: 1) n-ші дербес қосындысын тап; 2) анықтама бойынша қатардың жинақтылығын дәлелде; 3) қатардың қосындысын тап.

1) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots;$

2) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots..$

Мүшелері оң сан болатын қатарлар:

3. Салыстыру белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\ldots;$

2) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots;$

3) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots;$

4) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}+\ldots.$

4. Салыстыру белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right);$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right).$

5. Даламбер белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}};$

4) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots.$

6. Коши белгісін пайдаланып, берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\frac{1}{n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$

7. Кошидің интегралдық белгісін пайдаланып, берілген қатардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2;$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}.$

8. Берілген қатарлардың жинақты немесе жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$

Таңбалары ауыспалы қатарлар. Абсолют жинақтылық

9. Берілген қатарлардың қайсысы абсолют, қайсысы шартты жинақты болатынын, қайсысы жинақсыз болатынын анықта.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1};$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)};$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\alpha}{n^2},\quad \alpha>0;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n};$ $\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n-\ln n}.$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

43 – мысал Берілген қатардың қосындысын табу керек.

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Шешуі Қатардың жалпы мүшесін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып жай бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$

Осыдан

$$4=A(2n+1)+B(2n-1),\quad 2A+2B=0,\quad A-B=4,\quad A=2,\quad B=-2.$$

Сонымен, $\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$. Енді берілген қатардың әрбір мүшесін екі қосылғыш түрінде жазып, n - ші дербес қосынды үшін мынадай өрнек аламыз:

$$S_n=\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)-\ldots$$

$$-\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}.$$

Бірінші мен соңғы қосылғыштардан басқасының барлығы өзара жойылады. Сондықтан қатардың қосындысын $n\to\infty$ шекке көшіп аламыз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2n+1}\right) = 2, \text{ яғни } S = 2.$$

44 – мысал Мына қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

Шешуі а) Даламбер белгісін пайдаланайық. Мұнда $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, $l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\leftarrow\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$, яғни қатар жинақталады.

б) Берілген қатардың жалпы мүшесін $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ қатарымен салыстырамыз. Бұл геометриялық қатардың еселігі $q = \frac{1}{3} < 1$ және барлық n үшін $\frac{n}{(n+1)3^n} < \frac{1}{3^n}$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан салыстыру теоремалары бойынша берілген қатар жинақталады.

в) Қатардың жалпы мүшесі өрнектің n - ші дәрежесін сипаттайды. Сондықтан бұл жағдайда Коши белгісін пайдаланған қолайлы:

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} < 1, \text{ яғни } \rho < 1$$

болғандықтан қатар жинақталады.

г) Жинақтылықтың қажетті шартын тексеретін болсақ, ол орындалмайды:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ - қатар жинақталмайды.}$$

д) Интегралдық белгіні пайдаланайық:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{3+n^2}dn = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{2dn}{3+n} = 2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{n}{\sqrt{3}}\Bigg|_1^b = \frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[arctg\frac{b}{\sqrt{3}} - arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{p}{2}-\frac{p}{6}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{p}{3} = \frac{2\sqrt{3}p}{9}.$$

Меншіксіз интеграл жинақталады. Сондықтан берілген қатар да жинақталады.

45 – мысал Қатарды абсолютті жинақтылыққа зерттеу керек:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Шешуі Бұл ауыспалы таңбалы қатар. Лейбниц теоремасының шарттарының орындалуын тексереміз. Қатардың мүшелері кемімелі: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ және жалпы мүшесі $n \to \infty$ - де нөлге ұмтылады. Сондықтан, бұл қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Ал қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақталмайды. Осыдан қатар шартты жинақталатындығы туралы қортынды жасалады.

46 – мысал Мына дәрежелік қатарды жинақтылыққа зерттеп оның жинақталу радиусын табу керек:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$$

Шешуі Бұл қатар үшін

$$|U_n(x)|=\frac{|x+1|^n}{2^{nh}(n+1)(n+2)},\quad |U_{n+1}(x)|=\frac{|x+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)}\cdot\frac{2^n(n+1)(n+2)}{|x+1|^n}=\frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+3}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Егер $\frac{|x+1|}{2}<1$ болса, онда Даламбер белгісі бойынша қатар абсолютті жинақталады. Әрі қарай $|x+1|<2$ немесе $-2<x+1<2,\ -3<x<1.$ Сонымен қатардың жинақталу интервалы $(-3;1)$, ал жинақталу радиусы $R=2.$

47 – мысал Берілген $\sum_{n=1}^{\infty}5^{n^2}x^{n^2}$ қатарының жинақталу облысын табу керек.

Шешуі Қатарды ашып жазайық

$$5x+5^4x^4+5^9x^9+\ldots+5^{n^2}x^{n^2}+\ldots$$

Осыдан қатардың шексіз көп коэффициенттері нөлге тең екендігі көрінеді

$$C_0=C_2=C_3=C_5=C_6=C_7=C_8=C_{10}=C_{11}=\ldots=C_m=\ldots=0 \qquad (m\neq n^2).$$

Сондықтан жинақталу радиусының белгілі формулаларын қолдануға болмайды. Сондықтан қатардың жинақталу облысын табу үшін Коши белгісін пайдаланамыз

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|5^{n^2}x^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}|5x|^n=\begin{cases}\infty, & \text{егер } |5x|>1, \text{ немесе } |x|>\frac{1}{5} \text{ болса},\\ 1, & \text{егер } |5x|=1, \text{ немесе } x=\pm\frac{1}{5} \text{ болса},\\ 0, & \text{егер } |5x|<1, \text{ немесе } -\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5} \text{ болса}\end{cases}$$

Осыдан берілген қатар $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}$ аралығында жинақталатындығы шығады. Ал аралықтың $x=\pm\frac{1}{5}$ шекаралық нүктелерінде жинақталмайды. Өйткені жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды.

8. Өздік жұмыс тапсырмалары

1 тақырып. Жазықтықтағы аналиткалық геометрия. Жазықтықтар арасындағы бұрыш. Жазықтықтардың бумасы және будасы. Кеіндіні берілген қатыста бөлу. Қақ бөлу. Екінші ретті қисықтар мен беттердің жалпы теңдеулері зерттеу. Ұсынылатын әдебиет: [4], 67-86 б.

2 тақырып. Анықтауыштар және сызықтық теңдеулер жүйесі

n ретті анықтауыштар. Жалпы сызықтық теңдеулер жүйесін шешу. Сызықты алгебралық жүйесінің фундамендальдық шешімдер жүйесі.

Ұсынылатын әдебиет: [4], 4-38, 115-140 б.

Векторлық алгебра. Базис түрлендіруі. Ортогональ базисті алмастыру. Сызықтық оператор. Кеңістіктегі түрлендірулер.Сызықтық операторлардың меншікті векторлары. Ұсынылатын әдебиет: [4], 43 -65 б.

3 тақырып Математикалық талдауға кіріспе. Бір айнымалы функция.

Функция ұғымы. Функцияның анықталу облысы. Функцияның графигі. Функцияның шегі. Тамаша шектер. Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар. Функцияның үзіліссіздігі. Функцияның үзіліс нүктелері.

Ұсынылатын әдебиет: [4], 105б., 142-165б.

4 тақырып. Көп айнымалының функциясы, анықталған және анықталмаған интегралдар. Көп айнымалылы функциялар. Дербес туындылар. Толық дифференциал. Көп айнымалы функцияның экстремумы.

Ұсынылатын әдебиет: [4], 287-295б., 302-322б.

Анықталмаған интеграл. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл, қасиеттері және негізгі интегралдардың кестесі.Айнымалыны ауыстырып интегралдау. Бөліктеп интегралдау. Рационал, кейбір иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдау тәсілдері.

Ұсынылатын әдебиет: [4], 223-235б., 237-255б.; [3], 91-98б.

Анықталған интеграл. Интегралдау әдістері.Анықталған интегралдың геометриалық және физикалық есептерді шешуге қолданылуы. Меншіксіз интеграл.

Ұсынылатын әдебиет: 4], 260-274б.; [3], 101-108б.

5 тақырып. Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Бастапқы шарт және Коши есебі. Айнымалылары бөлінетін теңдеулер. Біртекті теңдеулер. Сызықтық теңдеулер. Бернулли теңдеуі. Толық дифференциалды теңдеу. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеудің ретін кеміту. Тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер.

Ұсынылатын әдебиет: [1], 400-413б.; [3], 113-122б.,[4], 417-732б.

9. СОӨЖ кеңестер графигі (СОӨЖ СӨЖ-дің 25% құрайды)

№	Сабақтар түрлері	дүйсенбі	сейсенбі	сәрсенбі	бейсенбі	жұма	сенбі
1	Дәріс сабақтары бойынша кеңес	14.45 15.35					
2	Тәжірибелік сабақтар бойынша кеңес		14.45 15.35				
3	СӨЖ бойынша кеңес				14.45 15.35	14.45 15.35	

10. Студенттердің білімін тексеру кестесі

Пән бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру графигі

№	Жұмыс түрлері	Тақырып	Әдебиет	Орындау уақыты	Бақылау түрі	Тап сыру мер зімі

1	2	3	4	5	6	7
1	Жазбаша жұмыс	Сызықты алгебра және аналитикалық геометрия элементтері		Екі апта		4-ші апта
2	Жазбаша жұмыс	Математикалық талдауға кіріспе		Бір апта		6-шы апта
3	Жазбаша жұмыс	Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеуі		Екі апта		7-ші апта
4	Межелік бақылау				тест	8-ші апта
5	Реферат	Анықталмаған және анықталған интеграл		Бір апта		10-ші апта
6	Жазбаша жұмыс	Жай дифференциалдық теңдеулер		Бір апта		12-ші апта
7	Жазбаша жұмыс	Көп айнымалы функциялар		Бір апта		13-ші апта
8	Жазбаша жұмыс	Сан қатарлары		Бір апта		14-ші апта
9	Межелік бақылау				тест	15-ші апта

11. Студенттердің білімін бағалау критерийлері

Пән бойынша емтихан тест түрінде өткізіледі. Емтиханға жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын орындаған студенттер жіберіледі.

Әр тапсырма 0-100 баллмен бағаланады.

Жіберу рейтингі ағымдағы сабақтардағы (дәрістерге қатысу, үй тапсырмалары, СӨЖ бойынша тапсырмалар, тәжірибе тапсырмалары, межелік бақылау) барлық орындалған тапсырмалардың арифметикалық орташасынан қорытылады.

Пән бойынша қорытынды бақылауға (ҚБ) жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын (жұмыстарды және СӨЖ бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру) орындаған және кіру рұқсатының рейтингі 50 баллдан кем емес студенттер жіберіледі.

Студенттің әр пән бойынша (пәннің қорытынды бақылау түрі мемлекеттік емтихан болса да) оқу жетістіктерінің деңгейі қорытынды бағамен (Қ) анықталады. Қорытынды баға ЖР және ҚБ (емтихан, дифференциалды сынақ немесе курстық жұмыс (жоба))салмақтық үлестер негізінде есептеледі (СҮжр және СҮқб).

$$Қ = ЖР*0,6 + ҚБ*0,4$$

Пән бойынша қорытынды баға жіберу рейтингі де, емтихан бағасы да оң бағаланған жағдайда ғана есептеледі. Дәлелсіз себеппен қорытынды бақылауға келмеген жағдайда «қанағаттаннарлықсыз» деген бағаға теңестіріледі.

Қорытынды бағаның есептелуі дұрыс болу үшін межелік бақылау (рейтинг) және қорытынды емтихан 0 ден 100%-ға дейін пайызбен бағаланады.

Межелік бақылау бағасы ағымдағы және межелік бақылаудың бағаларының қосындысы болады.

Бақылаудың барлық түрінде де оқудағы жетістіктер балды-рейтингті жүйесі бойынша бағаланады:

Әріп жүйесі бойынша баға	Балдың цифрлық баламасы	Пайыздық мазмұны	Дәстүрлі жүйедегі баға
A	4,0	95-100	Өте жақсы
A-	3,67	90-94	
B+	3,33	85-89	Жақсы
B	3,0	80-84	
B-	2,67	75-79	
C+	2,33	70-74	Қанағаттанарлық
C	2,0	65-69	
C-	1,67	60-64	
D+	1,33	55-59	
D	1,0	50-54	
F	0	0-49	Қанағаттанарлықсыз

12. Оқытушының талаптары, курс саясаты

Студенттер міндетті түрде сабақтарға қатысу керек. Сабақты босатқан жағдайда деканаттың орнатқан тәртібі бойынша босатқан сабағын тапсырады. Сабаққа екі рет кешігіп келу бір сабақты босатумен теңеледі. Екі сабақтан көп босатқан жағдайда оқытушы студентті сабаққа кіргізбеуге құқылы. Берілген курстың студенттерінің контингенті болмайтын бөгде адамдардың дәрісте отыруына тыйым салынады.

Тапсырмаларды көрсетілген мерзімде тапсыру қажет. Барлық тапсырмаларды тапсырудың соңғы мерзімі – емтихан сессиясының басталуына 3 күн қалғанға дейін.

Барлық тапсырмаларды тапсырмаған студенттер емтиханға жіберілмейді.

Студенттер әр оқу сабағы бойынша тақырыпты қайталауға және өткен тапсырмаларды орындап тапсыруға міндетті. Оқу материалдарын меңгеру деңгейі тест немесе жазбаша жұмыстар арқылы тексеріледі. Студенттерді тестілеу алдын ала ескертусіз өткізілуі мүмкін.

Студенттің оқытушымен өздік жұмысын (СОӨЖ) орындау барысында келесі төрт негізгі функцияларды ескеру керек:

Бірінші – оқу пәні бойынша сабақтар барысында оқытушы студентке берген ақпараттың белсенді қабылдануын болжамдайды.

Екінші – студенттер өздігінен оқытушының нұсқауларын негізге алып, оқу-әдістемелік құралдарды, әдебиеттерді меңгеруді, үй тапсырмаларын, бақылау және курстық жұмыстарды орындауды болжамдайды. Осы кезеңде студенттерден жұмыс әдістерін білуді, өздік ұйымдастырушылықты және тәртіпті талап етеді.

Үшінші – студенттің өзінің қиындық туғыздыратын жағдайларын талдау және жүйелеу, оқу материалын түсіну және меңгеру кезіндегі қиыншылықтардың себептерін анықтау, басқа оқу амалдарын орындау. Студенттер шешілмейтін қиындықтарын оқытушы үшін сұрақтар жүйесіне аударады (реттейді, құрастырады), сол сұрақтарға өз жауаптарын қосады.

Студенттердің төртінші функциясы оқытушыдан сәйкес түсініктеме, кеңес алудан тұрады.

13. Әдебиеттер тізімі

Негізгі:

1. Нұрбеков Б.Ж. Алгебра және геометрия: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2008. – 170б

2. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулык].-Өңделіп, толықтырылған 3-ші басылымы.-Алматы:Қазақ университеті.-2006.-561 б.

3. Өсенбаева Қ. Жоғары математика курсы:оқу құралы.-Алматы:Қарасай.-2007.-328 б.

4. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика:оқу құралы.-Алматы.-2004.-439 б.

5. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы:[жоғары оқу орындарының бейматематика манадықтарының студ. арналған оқу құралы].-Алматы:Дәуір.-2008.-389 б.

6. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулык]. .-Алматы.-2007.-408 б.

Қосымша

7. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-2:оқулық.-Алматы:Бастау.-2008.-466 б.

8. Мұхтаров М.М. Математика:тәжірибелік сабақтарды өткізуге арналған әдістемелік нұсқаулар.-Павлодар:С. Торайғыров атындағы ПМУ.-2007.-135 б.