Пән бойынша оқыту бағдарламасы (Syllabus)

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі

С.Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

5В060200 «- Информатика» мамандығының студенттеріне арналған

AGLA 1203 Аналитикалық геометрия және сызықты алгебра

ПӘН БОЙЫНША ОҚЫТУ БАҒДАРЛАМАСЫ (SYLLABUS)

Павлодар, 2013 ж.

Пәні бойынша оқыту
бағдарламасын (Syllabus)
бекіту парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.4/19

БЕКІТЕМІН
ФМжАТФ-нің деканы
_________ Испулов Н.А.
2013ж. «___»__________

Құрастырушы: ________ аға оқытушы Құдайберген М.Қ.

5В060200 «- Информатика» мамандығының ЖОБ негізіндегі күндізгі оқу нысанының студенттеріне арналған

AGLA 1203 Аналитикалық геометрия және сызықты алгебра

пәні бойынша оқыту бағдарламасы (Syllabus)

Бағдарлама 2013ж. «___» _________бекітілген жұмыс оқу бағдарламасының негізінде әзірленді.

2013ж. «___»__________ кафедра отырысында ұсынылған №__ Хаттама
Кафедра меңгерушісі ______________ Исин М.Е.2013ж. «____» ________

Физика, математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданған 2013ж. «__»__________ №____ Хаттама

ОӘК төрағасы ____________ Искакова А.Б. 20__ж. «_____»___________

1. Оқу пәнінің паспорты

Пәннің атауы Аналитикалық геометрия және сызықты алгебра

Міндетті компонент пәні

Кредит саны және меңгеру мерзімі

Барлығы – 3 кредит

Курс: 1

Семестр: 1

Барлығы аудиториялық сабақтар – 45 сағат

Дәрістер – 15 сағат

Тәжірибелік сабақтар – 30 сағат

СӨЖ – 90 сағат

соның ішінде СОӨЖ – 22,5 сағат

Жалпы еңбек сыйымдылығы – 135 сағат

Бақылау формасы

Емтихан – 1 семестр

Пререквизиттер:

-Математикалық анализ бастамасы

-Алгебра және геометрияның мектеп курсы

Постреквизиттер:

- Мамандықтың математикалық пәндері
- Мамандықтың қолданбалы пәндері

2. Оқытушы туралы мәліметтер және байланысу ақпараттары

Құдайберген Маржан Құдайбергенқызы

Математика кафедрасының аға оқытушысы

«Математика» кафедрасы, А - 410 аудитория

Байланыс телефоны: 67-36-46, ішкі тел. 11-20

E-mail: k.marzhan_k@mail.ru

3 Пәннің мақсаты және міндеттері

Пән туралы мәліметтер

Аналитикалық геометрия және сызықты алгебра қазіргі заманда ғылымның көптеген бөліктерінің теоретикалық негізі болып отыр және оның атқаратын міндеті өсіп отыр. Компьютерлік технологияның дамуы негізінде тиянақты практикалық маңызы бар есептерді шешу мүмкіндіктері пайда болды, ол әрине математиканың қолдану өрісін кеңейте түсті. Пәнді оқытудағы негізгі мақсат – студенттерге оқу процесінде арнайы курстарды оқу барысында және өзбетінше оқу кезінде кезігетін математиканың негізгі ұғымдары мен негізгі математикалық әдістермен таныстыру.

Пәннің мақсаты: Математикалық әдістер ғылым, техника, экономика және басқару мәселелерін шешуде үлкен роль атқарады. Сондықтан математиканы оқытудың алдына келесі мақсаттар қойылады:

- студенттердің математикалық және алгоритмдік ойлауын дамыту;
- студенттердің математикалық есептерді зерттеу және оларды шешу әдістерін игеру;
- студенттердің қолданбалы кәсіптік есептерді шешуде математикалық білімдерін қолдану дағдыларын қалыптастыру;

Пәннің міндеті:

- математикалық ұғымдар мен әдістер мысалында студенттерге ғылыми көзқарастың мәнін түсіндіру;
- математиканың мәнін және оның қолданбалы – кәсіптік есептерді шешудегі ролін түсіндіру;
- студенттерді математикалық әдістерді кәсіптік әрекеттерінде қолдануға бағыттау.

4. Білім, икем, дағдылар және құзырларға қойылатын талаптар

Осы пәнді меңгеру нәтижесінде:

студенттердің түсінігі болуы тиіс:

- фундаменталды ұғымдар, заңдар туралы;
- абстракты ұғымдарды нақты тәжірибелік есептер үшін қолданылуы туралы;

студенттер білуі тиіс:

- негізгі ұғымдарды, формулаларды, анықтамаларды, теоремаларды;
- есептерді шешудің тәсілдері мен әдістерін;

студенттің икемді болуы тиіс:

- бағдарлама бойынша қарастырылатын формулаларда дәлелдеу және қорытып шығару;
- математикалық модельдерді құрастыру;
- математикалық зерттеулерді жүргіздіру;

студент тәжірибелік дағдыларды иемденуі тиіс:

- ұсынылатын әдебиетпен өздігінен жұмыс жасау;
- алдына қойылған мәселе есептерді шешу;
- теоремаларды құрастыру және дәлелдеу;

студент құзырлы болуы тиіс:

- алгебра және геометрия сұрақтарында;
- математикалық анализ сұрақтарында.

5 Пәннің тақырыптық жоспары

Сабақ түрлері бойынша академиялық сағаттардың бөлінуі

№	Тақырыптардың атауы	Сабақ түрлері бойынша ауд/лық сағаттардың саны			СОӨЖ	
		Дәріс тер	Тәжіри белік	Зерт/лық, студ/лық, жеке	Бар лығы	Соның ішінде СОӨЖ
1	Комплекс сандар	1	2		6	1,5
2	Сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері	2	6		18	3
3	Векторлық алгебра	2	6		18	3
4	Өрістердегі көпмүшеліктер, топтар, сақиналар және өрістер	2	2		6	3
5	Сызықты кеңістіктер, евклид және унитарлы кеңістіктер.	2	2		6	3
6	Сызықты кеңістіктегі сызықты оператор	2	2		6	3
7	Жазықтықтағы түзу. Кеңістіктегі жазықтық пен түзу	2	5		15	3
8	Екінші ретті сызықтар мен беттердің жалпы теориясы	2	5		15	3
	Барлығы: 135 (3 кредит)	15	30		90	22,5

6. Дәріс сабақтарының мазмұны

Тақырып 1. Комплекс сандар

Жоспар:

Комплекс сандар. Көпмүшеліктер.

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

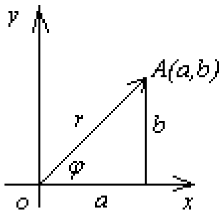
Нақты сандарды қарастырғанда нақты сандар жиынында квадраты (-1)-ге тең санды табу мүмкін еместігі айтылған болатын. Осы тәрізді есептердің шешімін табу мақсатымен сандар ұғымы комплекс сандарды еңгізумен кеңейтіледі.

Комплекс сан ұғымы.

$a+bi$ өрнегі комплекс сан деп аталады, мұндағы a және b - нақты сандар, i - $i=\sqrt{-1}$ немесе $i^2=-1$теңдіктерімен анықталатын, жорамал бірлік;
a - комплекс санның нақты бөлігі, ал bi - комплекс санның жорамал бөлігі деп аталады. Жорамал бөліктерінің таңбалары ғана әр түрлі болатын екі $a+bi$ және $a-bi$ комплекс санды түіндес сандар деп атайды.
Егер $a=0$ болса, онда $0+bi=bi$ таза жорамал сан, егер $b=0$ болса, онда нақты сан шығады: $a+0\cdot i=a$.
Екі негізгі келісім қабылданады:
1) a_1+b_1i және a_2+b_2i екі комплекс сан тең болады, егер $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.
2) $a+bi=0$ болады сонда және тек қана сонда, қашан $a=0, b=0$ болса.

Комплекс сандардың геометриялық интерпретациясы

Кез келген $a+bi$ комплекс санды Oxy жазықтығында координаталары a және b болатын $A(a,b)$ нүктесі түрінде кескіндеуге болады.



Және керісінше, Oxy жазықтығының кез келген $M(a,b)$ нүктесін $a+bi$ комплекс санның геометриялық бейнесі ретінде қарастыруға болады. Ox осінде жатқан нүктелерге нақты сандар сәйкес келеді. Oy осінде жатқан нүктелерге жорамал сандар сәйкес келеді. Сондықтан, жазықтықта комплекс сандарды кескіндегенде Oy осін жорамал сандар осі, ал Ox осін – нақты ось деп атайды. $A(a,b)$ нүктесін координаттар басымен қосқанда $\vec{OA}$ векторын аламыз. Кейбір жағдайда $a+bi$ комплекс санның геометриялық бейнесі ретінде $\vec{OA}$ векторын санайды.

Комплекс санның тригонометриялық формасы.

$A(a,b)$ нүктенің полярлық координаталарын j және r $(r\geq 0)$ арқылы белгілейік. Координаттар басын полюс деп санаймыз, ал Ox осінің оң бағытын – полярлық ось дейміз. Онда келесі қатыстар орын алады: $a=r\cos j$, $b=r\sin j$, олай болса комплекс санды төмендегі түрде келтіруге болады: $a+bi=r(\cos j+i\sin j)$. Оң жақтағы тұрған өрнек $a+bi$ комплекс санның тригонометриялық формасы деп аталады. Мұндағы j және r шамалары $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $j=Arctg\dfrac{b}{a}$ формулаларымен өрнектеледі және r - модуль, j - аргумент деп аталады.

Комплекс сандарға қолданатын негізгі амалдар.

Комплекс сандардың **қосындысы**. a_1+b_1i және a_2+b_2i екі комплекс санның қосындысы деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i .$$

Комплекс сандардың қосындысы векторларды қосу ережесі бойынша орындалатынын байқаймыз.

Комплекс сандардың **айырымы**. $a_1 + b_1 i$ және $a_2 + b_2 i$ екі комплекс санның айырымы деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

Екі комплекс санның айырымының модулі екі нүктенің арасындағы қашықтыққа тең екенін көре аламыз.

Комплекс сандардың **көбейтіндісі**. $a_1 + b_1 i$ және $a_2 + b_2 i$ екі комплекс санның көбейтіндісі деп келесі теңдікпен анықталатын комплекс санды айтады:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i .$$

Егер комплекс сандар тригонометриялық түрде берілсе, онда

$$r_1(\cos j_1 + i \sin j_1) \cdot r_2(\cos j_2 + i \sin j_2) = r_1 r_2 [\cos(j_1 + j_2) + i \sin(j_1 + j_2)] .$$

Салдар: $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

Комплекс сандардың **бөліндісі**. Осы амал көбейтуге кері амал болып табылады. Тәжірибе жүзінде комплекс сандардың бөлінуі келесі түрде анықталады: $a_1 + b_1 i$ санын $a_2 + b_2 i$ санына бөлу үшін бөлінгіш пен бөлгішті бөлгіштің түйіндесіне көбейтеміз, яғни $a_2 - b_2 i$. Сонда бөлгіш нақты сан болады. Сонымен бөлінді:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a^2 + b^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 + b^2} i .$$

Тригонометриялық формадағы комплекс сандардың бөліндісі:

$$\frac{r_1(\cos j_1 + i \sin j_1)}{r_2(\cos j_2 + i \sin j_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(j_1 - j_2) + i \sin(j_1 - j_2)] .$$

Дәрежеге шығару.

Егер n - бүтін оң сан болса, онда $[r(\cos j + i \sin j)]^n = r^n (\cos nj + i \sin nj)$. Бұл формула Муавр формуласы деп аталады. Ол дегеніміз, комплекс санды бүтін оң дәрежеге шығарғанда, модульды осы дәрежеге шығарады, ал аргумент дәреженің көрсеткішіне көбейтіледі.

Муавр формуласының тағы бір қосымшасын қарастырайық. Осы формулада $r = 1$ болсын, сонда $(\cos j + i \sin j)^n = \cos nj + i \sin nj$. Сол жағын Ньютон биномы бойынша жіктеп, нақты және жорамал бөліктерін теңстіріп, $\sin nj$ және $\cos nj$ - ді $\sin j$ және $\cos j$ - дің дәрежелері арқылы өрнектей аламыз. Мысалы, $n = 3$ болған жағдайда: $\cos^3 j + i 3 \cos^2 j \sin j - 3 \cos j \sin^2 j - i \sin^3 j = \cos 3j + i \sin 3j$; екі комплекс санның теңдігінің шартын қолданғанда:

$$\cos 3j = \cos^3 j - 3 \cos j \sin^2 j , \ \sin 3j = -\sin^3 j + 3 \cos^2 j \sin j .$$

Түбір алу.

Комплекс саннан n-ші дәреженің түбірі деп түбір астындағы санға тең болатын n-ші дәрежелі комплекс санды айтады, яғни $\sqrt[n]{r(\cos j + i \sin j)} = r(\cos y + i \sin y)$, егер де $r^n (\cos ny + i \sin ny) = r(\cos j + i \sin j)$.

Өзара тең комплекс сандардың модульдері тең болғандықтан, ал аргументтері $2p$ -ге еселі санға айырмашылығы бар, онда $r^n = r$, $ny = j + 2kp$. Осыдан: $r = \sqrt[n]{r}$, $y = \dfrac{j + 2kp}{n}$,

мұндағы k - кез келген бүтін сан, $\sqrt[n]{r}$ - бүтін оң r санынан алынған түбірдің арифметикалық мәні. Олай болса, $\sqrt[n]{r(\cos j + i \sin j)} = \sqrt[n]{r} (\cos \dfrac{j + 2kp}{n} + i \sin \dfrac{j + 2kp}{n})$.

k -ға $0,1,2,...,n-1$ мәндерін беріп, түбірдің n түрлі мәнін алуға болады.

Комплекс санның көрсеткіштік формасы

Эйлер формулаларымен қолданайық:

$$cos\,j = \frac{e^{ij} + e^{-ij}}{2}, \quad sin\,j = \frac{e^{ij} - e^{-ij}}{2i}$$

Мұнда келесіні көруге болады

$$cos\,j + i\,sin\,j = \frac{e^{ij} + e^{-ij}}{2} + i\frac{e^{ij} - e^{-ij}}{2i} = e^{ij}.$$

Онда тригонометриялық формадан көрсеткіштік формаға ауысуға болады.

$$r(cos\,j + i\,sin\,j) = r \cdot e^{ij}$$

Комплекс санның көрсеткішті формасы.

Барлық амалдар тригонометриялық формаға көшкеннен кейін орындалады

Тақырып 2. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері

Жоспар:

1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар.
2. n-ші ретті анықтауыштар ұғымы.
3. Анықтауыштардың қасиеттері.
4. Минор және алгебралық толықтауыштар.
5. Матрицаға қолданылатың амалдар.
6. Кері матрица.
7. Матрицаның рангісі.
8. Сызықты теңдеулер жүйесі
9. n белгісізі бар n теңдеулер жүйесін шешу әдістері
10. n белгісізі бар m теңдеулер жүйесін зерттеу және үйлесімді болған жағдайда шешімін табу әдісі

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

1. **Анықтама 1 Екінші ретті анықтауыш** деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

санын айтамыз. Бұл сан екі тік

және екі жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}$$

кестесі түрінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады.

Мұндағы $a_{ij}(i = 1,2;\ j = 1,2)$ - анықтауыштың элементтері. a_{ij} элементінің бірінші **i** индексі анықтауыштың жатық жолының, ал екінші **j** индексі тік жолының нөмері. Мысалы a_{12} - 1-жатық 2 – тік жолының қиылысуындағы элемент. Кестенің a_{11} және a_{22} элементтері арқылы өтетін «түзу» анықтауыштың **негізгі диагоналы**, ал a_{12} және a_{21} элементтері арқылы өтетін «түзу» **қосалқы диагоналы** деп аталады.

Анықтама бойынша, екінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кестенің негізгі диагоналындағы элементтерінің көбейтіндісі мен қосалқы диагоналындағы элементтері көбейтіндісінің айырымына тең. Демек,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Анықтама 2 Үшінші ретті анықтауыш деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{21} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

санын айтамыз. Бұл сан үш тік және үш жатық жолдардан тұратын

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

кестесі ретінде белгіленеді және бұл кесте де анықтауыш деп аталады. Мұндағы $a_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ - анықтауыштың элементтері, i – жатық, ал j – тік жолдарының нөмірі.

Үшінші ретті анықтауыш өзін белгілейтін кесте элементтерінен үшбұрыш немесе **Саррюс ережесі** бойынша есептеледі. Бұл ереже бойынша плюс таңбасымен алынған үш қосылғыш төменде келтірілген «+» **сұлба**, ал минус таңбасымен алынған үш қосылғыш **«-» сұлба** бойынша есептеледі:

«+» сұлба

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

«-» сұлба

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2. **n-ретті анықтауыштар және оның қасиеттері**

1-ден n-ге дейінгі натурал сандардың кез келген орналасуы **алмастыру** деп аталады. n натурал саннан $n!$ алмастыру құруға болады. Егер алмастыруда үлкен сан кіші санның алдында тұрса, онда бұл сандар инверсия (ретсіздік) құрайды.

Егер $[j_1, j_2, ..., j_n]$ алмастыру болса, онда осы алмастырудағы инверсия саны $[j_1, j_2, ..., j_n]$ деп белгіленеді. Егер инверсия саны жұп болса алмастыру жұп, ал тақ болса тақ деп аталады.

Анықтама 3. n - ретті анықтауыш деп

$$\Delta = \sum (-1)^{[j_1, j_2, ..., j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$$

қосындыны айтамыз және оны былай белгілейміз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1, j_2, ..., j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n} \qquad (1)$$

Мұндағы қосу белгісі 1,2,3,..., n сандарынан құралған барлық $j_1, j_2, ..., j_n$ алмастырулары бойынша алынады, демек анықтауышта $n!$ қосылғыш бар, олардың жартысы «+», жартысы «-» таңбасымен алынады.

Анықтауышты белгілейтін кесте де **анықтауыш** деп аталады. Бұл кесте n тік және n жатық жолдардан тұрады. Кестенің a_{ij} элементінің бірінші i индексі -жатық, ал екінші j индексі тік жолының номері, a_{ij} - осы жолдардың қиылысуындағы элемент.

Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолының сәйкес элементтері өзара тең болса бұл жолдар тең деп аталады.

Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолдары өзара пропорционал элементтерден тұрса, демек

$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}} = \frac{a_{i2}}{a_{k2}} = ... = \frac{a_{in}}{a_{kn}}, i \neq k, \left(\frac{a_{1j}}{a_{1l}} = \frac{a_{2j}}{a_{2l}} = ... = \frac{a_{nj}}{a_{nl}}, j \neq l \right)$$

теңдігі орындалса, бұл жолдар **пропорционал** деп аталады.

Жатық (тік) жолдың α санына көбейтіндісі деп барлық элементтері α санына көбейтілген осы жолды айтамыз.

Анықтауыштың жатық жолдарын, орналасу ретін сақтап, тік жолдарымен алмастыру анықтауышты транспонирлеу деп аталады. Транспонирленген анықтауыш элементінің бірінші индексі тік, екіншінің индексі жатық жолының нөмерін көрсетеді.

3. **Анықтауыштың қасиеттері:**

1) Анықтауышты транспонирлеу оның мәнін өзгертпейді;

2) Өзара тең екі жатық (тік) жолы бар анықтауыш нөлге тең болады;

3) Егер анықтауыштың қандай да болмасын бір жатық (тік) жолын бір α санына көбейтсе, онда осы санға анықтауышта көбейтіледі;

4) Егер анықтауыштың жатық (тік) жолындағы барлық элементтердің ортақ көбейткіші болса, онда бұл көбейткішті анықтауыштың сыртына шығаруға болады;

5) Егер анықтауыштың екі жатық(тік) жолы пропорционал болса, онда бұл анықтауыш нөлге тең болады;

6) Егер анықтауыштың k нөмірлі жатық (тік) жолының әрбір элементі екі санның қосындысынан тұрса, онда бұл анықтауыш, басқа элементтері өзгерусіз сақталған, k нөмерлі жатық (тік) жолы бірінші анықтауышта қосылғышының бірінші, екінші анықтауышта екінші қосылғышымен алмастырылған, екі анықтауыштың қосындысына тең;

7) Егер анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолын бір санға көбейтіп басқа бір жатық (тік) жолына қоссақ, онда бұл түрлендіру анықтауыштың мәнін өзгертпейді;

8) Егер анықтауыштың екі жатық (тік) жолдары орындарын алмастырса, онда анықтауыш абсолют шамасын сақтап, таңбасын қарама-қарсы өзгертеді.

4. Минорлар мен алгебралық толықтауыштар

Анықтама 4. Берілген n-ретті

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышының a_{ij} **элементінің** M_{ij} **миноры** деп осы анықтауыштың i нөмерлі жатық жолы мен j нөмерлі тік жолын сызып тастағаннан кейінгі қалған $(n-1)$ ретті анықтауышты айтады.

Анықтама 5 *Δ* анықтауышының a_{ij} элементінің **алгебралық толықтауышы** деп $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынғын M_{ij} миноры айтылады да, A_{ij} деп белгіленеді:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Егер *Δ* анықтауышының i нөмерлі жатық (j нөмерлі тік) жолының a_{ij}-ден басқа элементтері нөлге тең болса, онда бұл анықтауыш $a_{ij}A_{ij}$-ге тең:

$$\Delta = a_{ij}A_{ij} \qquad (2)$$

Анықтауыш i нөмерлі жатық жолының элементтері бойынша

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \qquad (3)$$

қосындысы ретінде өрнектеледі.

Анықтауыштың кез келген k нөмерлі жатық (l нөмерлі тік) жолының элементтері мен осы элементтерге сәйкес басқа i нөмерлі жатық (j нөмерлі тік) жолының алгебралық толықтауыштары көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең:

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + ... + a_{kn}A_{in} = 0, k \neq i.$$

Матрицаларға қолданылатын амалдар

1) Матрицаларды қосу*:* Тең ретті

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{және } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицалары берілген. Қысқаша, бұл матрицаларды $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{mn}$ деп белгілейміз. Мұндағы m-матрицаның жатық, n-тік жолдарының саны.

А және В матрицаларының **қосындысы** деп, элементтері $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ формулалары бойынша есептелетін $C = (c_{ij})_{mn}$ матрицаны айтамыз. Сонымен, $C = A + B = (a_{ij})_{mn} + (b_{ij})_{mn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mn} = (c_{ij})_{mn}$

2) Матрицаларды санға көбейту*:* $A = (a_{ij})_{mn}$ матрицасының α санына көбейтіндісі деп, элементтері

$$d_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

формулалары арқылы анықталатын $D = (d_{ij})_{mn}$ матрицасын айтамыз. Сонымен, $D = \alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{mn} = (d_{ij})_{mn}$.

3) Матрицаны матрицаға көбейту:

$m \times n$ *ретті* $A = (a_{ij})_{mn}$ және $n \times l$ *ретті* $B = (b_{jk})_{nl}$ матрицалары берілсін. А матрицасының В матрицасына **көбейтіндісі** деп элементтері

$$c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}$$

формулалары бойынша анықталатын, $m \times l$ ретті $C = (c_{ik})_{ml}$ матрицасын айтамыз. Сонымен,

$$C = AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{ml} = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk})_{ml} = (c_{ik})_{ml}.$$

4) Матрицаны **транспонирлеу**: Матрицаның жатық жолдарын, орналасу ретін сақтап, тік жолдарымен алмастыру матрицаны транспонирлеу деп аталады. Егер

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}$$

болса, онда

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}$$

транспонирленген матрица болады.

Кері матрица

Квадратты матрица. Жатық жолдар саны тік жолдар санына тең $(m = n)$ матрица квадратты деп аталады. $A = (a_{ij})_{nn}$ квадратты матрицасы берілген.

Егер $A = A'$, демек $a_{ij} = a_{ji}$ болса, онда А симметриялы матрица деп аталады.

Квадратты А матрицаның анықтауышын $|A|$ деп белгілейміз. Әлбетте, $|A| = |A'|$. Анықтауышы нөлге тең матрица **өзгеше** деп аталады.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

бірлік матрица деп аталады.

$n \times n$ ретті *A* және *B* матрицалары берілсін. Егер В матрицасы үшін

$$A \cdot B = B \cdot A = E \qquad (4)$$

теңдігі орындалса, онда В матрицасы А-ға кері матрица деп аталады да $B = A^{-1}$ деп белгіленеді. Осы белгі арқылы (4) теңдігі $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ түрінде жазылады.

Егер А өзгеше матрица болмаса, демек $|A| \neq 0$ болса, онда А-ға кері бірден-бір матрица бар болады және кері матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

формуласы бойынша анықталады.

Матрицаның рангісі:

Анықтама 6. m жатық және n тік жолдардан тұратын

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кестесі $m \times n$ **ретті матрица** деп аталады. Әдетте, матрица бір бас әріппен белгіленеді, мысалы **М** деп.

Осы матрицаның кез келген k жатық және k тік жолдарын белгілеп алып, осы жолдардың қиылысуындағы элементтерден, олардың берілген матрицадағы орналасу ретін сақтап құрылған k - ретті анықтауыш k **- ретті минор деп аталады** ($(k \leq \min\{n, m\})$.

Егер M матрицасында нөлге тең емес r ретті минор бар болса, ал реттері r-ден жоғары барлық минорлар нөлге тең болса, онда r саны осы матрицаның рангі деп аталады және $rang\,M$ деп белгіленеді: $r = \operatorname{rang} M$.

Барлық элементтері нөлге тең матрица *нөлдік матрица* деп аталады. Келісім бойынша, нөлдік матрицаның рангі нөлге тең.

$m \times n$ ретті, сәйкес элементтері өзара тең екі матрица **тең матрицалар** деп аталады.

Рангті есептеу әдістері: 1) Көмкерген минорлар әдісі. Берілген матрицаның r-ретті минорының көмкеруі деп осы минор енетін кез келген $(r+1)$ ретті минорын айтады.

Теорема 1 Егер берілген M матрицасының нөлге тең емес r-ретті миноры бар болса және осы минорды көмкеретін барлық $(r+1)$ ретті минорлар нөлге тең болса, онда бұл матрицаның рангі r-ге тең: $\operatorname{rang} M = r$.

2) Рангті берілген матрицаның элементтерін **түрлендіру** арқылы есептеу. Бұл әдіс төмендегі теоремаларға негізделген.

1) Жатық жолдардың орнын алмастыру;

2) Кез келген жатық жолын нөлге тең емес санға көбейту;

3) Кез келген жатық жолына осы матрицаның басқа жатық жолын бір санға көбейтіп қосу;

4) Бірыңғай нөлден тұратын жолын алып тастау, матрицаның рангін өзгертпейді.

Бас диагоналы астындағы элементтері нөлге тең матрица **сатылы** деп аталады. Квадратты матрицаның сатылы түрі **үшбұрышты** деп аталады.

Теорема 3 Сатылы түрге келтірілген матрицаның рангі оның бас диагонолындағы нөлге тең емес элементтерінің санына тең.

Сызықты теңдеулер жүйесі

n белгісізі бар m теңдеулер жүйесі мына түрде беріледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (6)$$

Мұндағы x_j- белгісіз шамалар, a_{ij}-i нөмерлі теңдеудегі j нөмерлі белгісіздің коэффициенті, b_i- i нөмерлі теңдеудің бос мүшесі, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

(6) теңдеулер жүйесінің коэффициентерінен құрылған мына матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{mn} \qquad (7)$$

негізгі матрица деп аталады, ал мына матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (8)$$

осы жүйенің **кеңейтілген** матрицасы делінеді.

Егер (6) теңдеулер жүйесінің барлық бос мүшелері нөлге тең болса, онда бұл жүйе **біртекті** деп аталады.

1.2 пунктінің 2-ші және 3-ші анықтамаларда аталған теңдеулер жүйесінің шешімі үйлесімді, үйлесімсіз, анықталған және анықталмаған теңдеулер жүйесі туралы ұғымдар өздерінің мағыналарын толық сақтайды.
(6) теңдеулер жүйесінің белгісіздері мен бос мүшелерінен

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ және } \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матрицаларын құрып осы жүйені мына матрицалық теңдеу түрінде жазамыз:

$$A\cdot X=B. \qquad (9)$$

***n* белгісізі бар *n* теңдеулер жүйесін шешу әдістері**

1) Крамер әдісі: Біртекті емес n белгісізді n теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \qquad (10)$$

Осы жүйенің негізгі матрицасының анықтауышы

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

нөлге тең болмасын.
Осы анықтауыштың k нөмерлі тік жолының элементтерін (10) жүйесінің сәйкес бос мүшелерімен алмастырғанда шыққан анықтауышты Δ_k деп белгілеік:

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ k=\overline{1,n}$$

Осы анықтауыштар бойынша (10) теңдеулер жүйесінің шешімі Крамер формулалары арқылы анықталады:

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\ k=1,2,\dots,n.$$

2) Гаусс әдісі Гаусс әдісі матрицаның рангін өзгертпейтін элементар түрлендірулерге негізделген. Бұл түрлендірулер теңдеулер жүйелерінің эквиваленттігін сақтайды. Шешімдері бірдей немесе екеуі де үйлесімсіз болатын теңдеулер жүйелері эквивалентті деп аталады.
Гаусс әдісінің сұлбасы: Алдымен (10) теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасы құралады:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Элементар түрлендірулер арқылы бұл матрица үшбұрышты түрге келтіріледі:

$$\begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & \dots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \dots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^*_m \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Элементар түрлендірулердің қасиеті бойынша, (11) теңдеулер жүйесі (10) жүйесіне эквивалентті. (11) жүйесінің ең соңғы теңдеуінен x_n-ді, бір қадам жоғары көтеріліп, келесі теңдеуден x_{n-1}-ді табамыз. Осылай табылған $x_1, x_2, \dots x_n$ белгісіздерінің мәндері (10) жүйесінің шешімі болады.

Ескерту: (10) теңдеулер жүйесіне қойылған негізгі шарт осы жүйенің анықталғандығы, демек жүйенің анықтауышы $D \neq 0$ болуы. Сондықтан, $a^*_{nn} \neq 0, \dots, a^*_{22} \neq 0, a^*_{11} \neq 0$. Бұл шарт матрицалар әдісінде де сақталады.

3) Матрица әдісі. (10) теңдеулер жүйесін матрицалық түрде жазамыз $A \cdot X = B$. (9 теңдеуі)

(5) формуласы бойынша А матрицасына кері A^{-1} матрицасын табамыз. Енді (9) теңдеуін сол жағынан A^{-1}-ге көбейтіп және $A^{-1}A = E$ екенін ескеріп,

$X = A^{-1}B$

түрінде (9) теңдеуінің шешімін табамыз.

n белгісізі бар m теңдеулер жүйесін зерттеу және үйлесімді болған жағдайда шешімін табу әдісі

Кронекер-Капелли теоремасы. Біртекті емес (6) сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болу үшін осы жүйенің негізгі матрицасының рангі оның кеңейтілген матрицасының рангіне тең болуы:

$$\text{rang}A = \text{rang}A^*$$

қажетті және жеткілікті.

Бұл теорема арқылы жүйенің үйлесімді немесе үйлесімсіз болатыны шешіледі.

Жүйе үйлесімді болған жағдайда төмендегі екі жағдай қарастырылады:

1) $\text{rang}A = \text{rang}A^* = r = n$, n - белгісіздер саны, $n \le m$. Бұл жағдайда теңдеулер жүйесі үйлесімді және анықталған. Сондықтан жүйенің шешімі жоғарыда аталған үш әдістің біреуі арқылы анықталады.

2) $\text{rang}A = \text{rang}A^* = r < n$, n - белгісіздер саны, $n \le m$. Бұл жағдайда теңдеулер жүйесі үйлесімді және анықталмаған. А матрицасының кез келген r-ретті нөлге тең емес минорын негізгі деп жариялап, осы минордың элементтері коэффициенттері болатын r белгісізді негізгі белгісіздер деп аламыз. Мысалы, негізгі минор:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \neq 0$$

болса, негізгі белгісіздер $x_1, x_2, \dots x_r$ болады. Қалған $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ белгісіздер еркін параметрлер рөлін атқарып, теңдеулер жүйесі мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r} = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1-} \dots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Бұл жүйеден Крамер, Гаусс, матрица әдістерінің біреуін қолданып $x_1, x_2, \dots x_r$ белгісіздерін табамыз. Белгісіздердің мәні $n-r$ еркін параметрлерден тәуелді болады.
Біртекті теңдеулер жүйесі осыған ұқсас шешіледі. Бұл жүйе әрқашан үйлесімді. Себебі, негізгі матрицаға біріңғай нөлден тұратын тік жолды қосу оның рангін өзгертпейді. Демек,

$$\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}A^* = r$$

Бұл жүйе үшін де төмендегі екі жағдай қарастырылады: 1) $r = n$. Бұл жағдайда біртекті теңдеулер жүйесінің бірден-бір нөлдік (0,0,...,0) шешімі болады. Бұл шешім **айқын** деп аталады. 2) $r < n$. Бұл жағдайда біртекті теңдеулер жүйесінің $n-r$ параметрден тәуелді шексіз көп шешімі болады. Бұл шешімдер жоғарыда келтірілген сұлба бойынша анықталады.

Тақырып 3. Векторлық алгебра

Жоспар:

1.Векторлар.
2.Векторлар арасындағы сызықтық амалдар.
3.Векторлардың скалярлық көбейтіндісі.
4.Векторлардың векторлық көбейтіндісі.
5.Үш вектордың аралас көбейтіндісі.

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Векторлар

Бағытталған кесіндіні **геометриялық вектор**, қысқаша **вектор** деп атайды. Вектор, бағытталған кесінді ретінде, өзінің бас нүктесі A мен соңғы нүктесі B арқылы берілсе, $\overrightarrow{AB}$ деп белгіленеді. Осымен қатар, вектор, үстіне сызықша қойылған, кіші латын әріппен немесе толық латын єріппен де белгіленеді, мысалы $\vec{a}$ немесе **a**. Бас нүктесі мен соңғы нүктесі түйіскен вектор **нөлдік вектор** деп аталады. Бір түзудің немесе өзара параллель түзулердің бойында жататын векторлар **коллинеарлы** деп аталады.

Коллинеарлы, ұзындықтары мен бағыттары бірдей векторларды тең деп атайды.

Берілген екі вектордың әрқайсысы үшінші векторға тең болса, онда бұл векторлар өзара тең болады. Сондықтан, берілген $\vec{a}$ векторына тең, кез келген P нүктесінен шығатын, тек қана бір вектор бар болады. Демек, вектор өзінің бас нүктесіне дейінгі дәлдікпен анықталады. **Еркін векторлар** туралы ұғып осы мағынада қолданылады.

Берілген масштабта анықталған $\vec{a}$ векторының ұзындығы оның модулі деп аталады да $|\vec{a}|$ деп белгіленеді. Әлбетте, $\vec{a} = \vec{b}$ болса, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ болады. Модульдері тең векторлардың өзара тең болуы міндетті емес.

Кез келген u сандар өсі берілсін. $\overrightarrow{AB}$ векторының бас нүктесі A мен соңғы нүктесі B-дан u өсіне түсірілген перпендикулярдың сәйкес табандары A' пен B' болсын. Бағытталған $\overrightarrow{A'B'}$ **кесіндісінің** $A'B'$ **шамасы** $\overrightarrow{AB}$ **векторының** u **өсіндегі проекциясы** деп аталады да $\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$ деп белгіленеді.

Кеңістіктің кез келген *S* нүктесінен шығып, $\overrightarrow{AB}$ векторы мен u өсіне параллель және бағыттас болатын екі сәуленің арасындағы j бұрышы, $\overrightarrow{AB}$ векторының u өсіне көлбеулік бұрышы деп аталады. Осы бұрыш арқылы $\overrightarrow{AB}$ векторының u өсіндегі проекциясы

$$\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi$$

формуласы бойынша анықталады.

Кез келген $\vec{a}$ векторының кеңістікте анықталған координаттар жүйесінің өстеріндегі проекциялары x, y, z деп белгіленеді де $\vec{a} = \{x, y, z\}$ түрінде жазылады. Егер берілген жүйе тікбұрышты декарттық жүйе болса, онда x, y, z вектордың **декарттық координаттары** деп аталады.

Егер $\vec{a}$ векторы өзінің $A(x_1, y_1, z_1)$ бас нүктесі мен $B(x_2, y_2, z_2)$ соңғы нүктесі арқылы берілсе, онда x, y, z

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1$$

формулалары бойынша есептеледі.

$\vec{a}$ векторының модулі өзінің x, y, z координаттары арқылы $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ формуласы бойынша анықталады. Әлбетте, $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Демек, $\vec{a}$ векторының **модулі** оның бас нүктесі А мен соңғы нүктесі В-ның **ара қашықтығына** тең.

$\vec{a}$ векторының Ox,Oy,Oz өстеріне көлбеулік бұрыштары α, β, γ болсын. (1) формуласы бойынша, $x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$, $y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta$, $z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma$

болады. Бұл формулалардағы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{a}$ векторының **бағыттаушы косинустары** деп аталады.

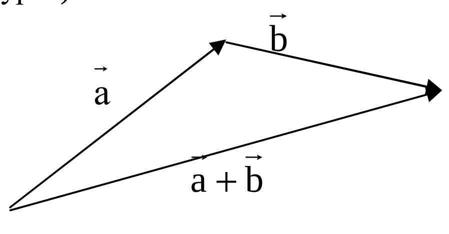
Бағыттауышы косинустар

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

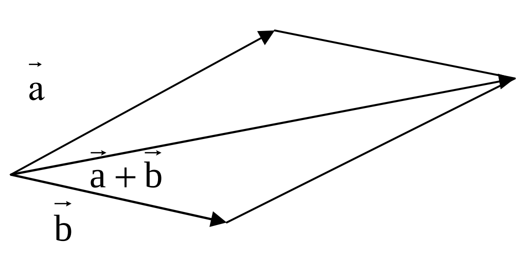
тепе-теңдегін қанағаттандырады.

Векторлар арасындағы сызықтық амалдар

Егер $\vec{b}$ векторының бас нүктесі $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен тұйіссе, онда $\vec{a}$-ның бас нүктесінен шығып $\vec{b}$-ның соңғы нүктесінде аяқталатын вектор $\vec{a}$ **мен** $\vec{b}$ **векторларының қосындысы** деп аталады да $\vec{a} + \vec{b}$ деп белгіленеді (үшбұрыш ережесі, 16-сурет).



16 - сурет

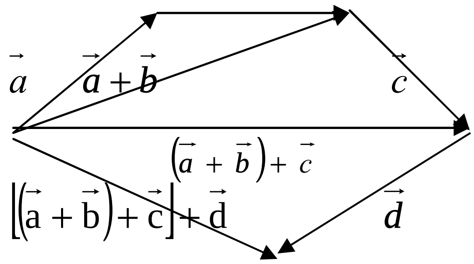


17 - сурет

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бір нүктеден шықса, онда осы векторлар бойынша құралған параллелограмның диагоналі осы векторлардың қосындысына тең болады (параллелограмм ережесі, 17-сурет). Соңғы ережеден $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ теңдігі туындайды.

Бірнеше векторлардың қосындысы, үшбұрыш ережесін біртіндеп қолдану арқылы анықталады. Мысалы, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторларының қосындысы $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \left[\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}\right] + \vec{d}$ теңдігі бойынша орындалады (18- сурет).

$\vec{b}$



18-сурет

Коллинеарлы, ұзындықтары тең және карама-қарсы бағытталған екі вектор **өзара карама-қарсы векторлар** деп аталады. Егер берілген вектор $\vec{a}$ болса, оған **карама-қарсы** вектор $-\vec{a}$ деп белгіленеді.

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторларының айырымы** деп, $\vec{b}$ векторымен қосындысы $\vec{a}$-ға тең болатын $\vec{c}$ векторы айтылады да, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ деп белгілінеді. Әлбетте, $\vec{c}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, демек, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$-ға қарама-қарсы вектордың қосындысына тең.

$\vec{a}$ **векторының** α **санына көбейтіндісі** деп $\vec{a}$ векторына коллинеарлы, ұзындығы $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ санына тең, $\alpha>0$ болғанда $\vec{a}$- мен бағыттас болатын, $\alpha<0$ болғанда $\vec{a}$-ға қарама-қарсы бағытталған $\alpha\cdot\vec{a}$ векторын айтады. Векторлардың проекциялары тұралы төменде келтірілген теоремалар орындалады:

Теорема 1 Векторлар қосындысының қандай болмасын бір өске проекциясы осы векторлардың осы өстегі проекцияларының қосындысына тең:

$$пр_u\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_n}\right)=пр_u\overrightarrow{a_1}+пр_u\overrightarrow{a_2}+...+пр_u\overrightarrow{a_n}\,.$$

Теорема 2 Векторды санға көбейткенде оның проекциясы да осы санға көбейтіледі: $пр_u\left(\alpha\cdot\vec{a}\right)=\alpha\cdot пр_u\vec{a}$.

Бұл теоремалардан, егер

$$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\ \vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$$

болса, онда

$$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\},$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\},$$

$$\alpha\cdot\vec{a}=\{\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot y_1,\alpha\cdot z_1\}$$

болатынын көреміз.

Осымен қатар, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеарлы болуы үшін

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті ($\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөлдік векторлар емес).

Егер $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ векторлары: 1) $\vec{i}$ векторы Ох өсінде, $\vec{j}$- Оу өсінде, $\vec{k}$- Oz өсінде жатса; 2) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ өздері жатқан өстермен бағыттас болса; 3) $|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$, $|\vec{k}|=1$ болса, онда $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

базистік векторлар деп аталады. Бұл векторларды **бірлік базистік** деп те атайды. Базистік векторлар арқылы кез келген $\vec{a} = \{x, y, z\}$ векторы

$$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

түрінде өрнектеледі.

Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі деп

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \qquad (3)$$

санын айтамыз. Мұндағы φ - $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындығы бұрыш. Анықтама бойынша,

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cdot \cos 0^0 = |\vec{a}|^2.$$

Бұл сан $\vec{a}$ вектордың **скалярлық квадраты** деп аталады. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр болса, онда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Бірлік базистік векторлар үшін

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1,\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{j} \cdot \vec{j} = 1,\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,\ \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

теңдіктері орындалады. Координаттары арқылы берілген $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ және $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \qquad (4)$$

формуласы арқылы анықталады.

$$|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = пр_{\vec{b}}\vec{a} \quad \text{немесе} \quad |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = пр_{\vec{a}}\vec{b}$$

болғандықтан, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot пр_{\vec{b}}\vec{a} \quad \text{немесе} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot пр_{\vec{a}}\vec{b}$$

түрінде жазуға болады. (3) және (4) формулаларынан

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

немесе, координаттары арқылы

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ **векторлары арасындағы бұрыш** анықталады.

u кез келген өс, $\vec{e}$ осы өс бойымен бағытталған бірлік вектор болсын. Егер u өсі координат өстерімен α, β, γ бұрыштарын құрса, онда

$$\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

және

$$пр_u\vec{a} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma$$

болады.

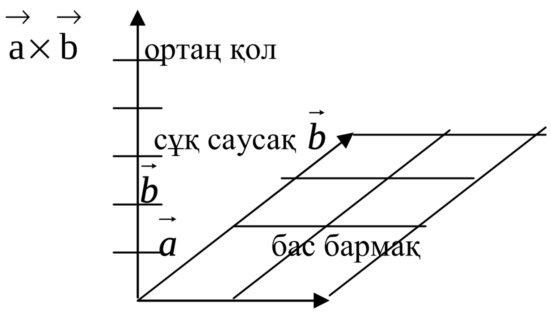
Векторлардың векторлық көбейтіндісі

Анықтама $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{a}\times\vec{b}$ түрінде белгіленіп, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын векторды айтады:

1) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, мұндағы j - берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш;

2) $\vec{a}\times\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларына перпендикуляр;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ векторлары осы ретпен оң үштік құрайды.



19-сурет

Үшінші шарт бойынша, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ векторларды «оң қол ережесіне» сәйкес орналасуы керек (19 -сурет).

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

1) Векторлардың векторлық көбейтіндісі көбейтінділерідің орналасу ретінен тәуелді. Көбейткіштерінің орнын ауыстыру векторлық көбейтіндінің таңбасына өзгертеді:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

Векторлық көбейтіндінің бұл қасиеті көбейткіштердің қарсы орын алмастырылымдығы деп аталады.

2) Скалярлық көбейткішке қатысты терімділік қасиеті:

$$\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b} = \lambda\cdot\vec{a}\times\vec{b} \text{ және } \vec{a}\times\left(\lambda\cdot\vec{b}\right) = \lambda\cdot\vec{a}\times\vec{b};$$

3) Қосу амалына қатысты үлестірімділік қасиеті:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \text{ және } \left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a};$$

4) Бірінші шарт бойынша, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісің модулі осы векторлар бойынша құралған параллелограмның ауданына тең және өзара коллениар векторлардың векторлыќ көбейтіндісі нөлге тең.

5) Базистік бірлік векторлар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлары үшін:

$$\vec{i}\times\vec{i} = 0,\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\ \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{j} = 0,\ \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{j} = \vec{i},\ \vec{k}\times\vec{k} = 0$$

теңдіктері орындалады.

6) Егер $\vec{a}=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$ болса, онда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$

немесе

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left\{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

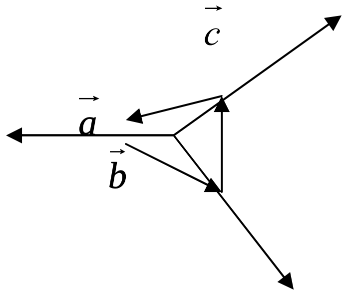
Векторлар үштігі деп белгілі ретпен орналасқан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларын айтады. Мұндағы $\vec{a}$ -бірінші, $\vec{b}$ - екінші, $\vec{c}$ -үшінші вектор. Векторлар үштігі ретінде $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үштігі $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ үштігіне тең емес. Циклдік орын алмастыру векторлар үштігін өзгертпейді.

Мысалы, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ мен $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ бір векторлық үштік ретінде қарастыралады.

Егер $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары бір жазықтықта немесе өзара параллель жазықтықтарда жатса, онда бұл векторлар **компланар векторлар** деп аталады.

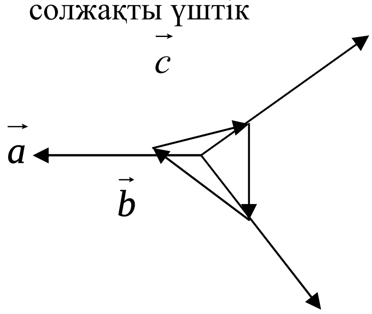
Берілген компланар емес вектордан алты үштік құруға болады. Олардың үшеуі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$; $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ оңжақты бағытталған (20-сурет), басқа үшеуі $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$; $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$; $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ солжақты бағытталған үштіктер (5-сурет).

оңжақты үштік



20-сурет

солжақты үштік



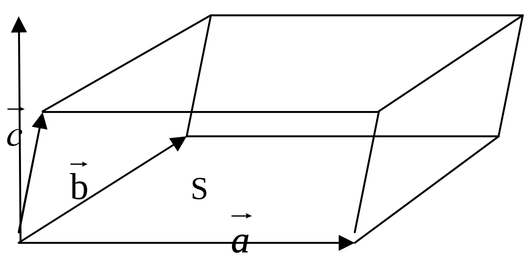
21-сурет

Компланар векторлар үштігі оңжақты да, солжақты да болмайды.

Анықтама $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының $\vec{c}$ векторына скалярлық көбейтіндісі айтылады да $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ деп белгіленеді.

Сонымен, анықтама бойынша $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:



22-сурет

1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үштігі оңжақты болса «+» таңбасымен, ал солжақты болса «-» таңбасымен алынған, осы векторлар бойынша салынған параллелепипедтің көлеміне тең (22-сурет).

2) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \pm V$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін, олардың аралас көбейтіндісінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0 .$$

4) Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары координаттары арқылы берілсе

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$,

онда

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

формуласы бойынша анықталады.

Тақырып 4 Өрістердегі көпмүшеліктер, топтар, сақиналар және өрістер

Жоспар:

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Тақырып 5. Сызықты кеңістіктер, евклид және унитарлы кеңістіктер.

Жоспар:

1.Сызықты кеңістік туралы ұғым

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Анықтама Егер $L = \{x, y, z, ...\}$ жиынында:

1. L-дің кез келген x және y элементтері үшін олардың **қосындысы** деп аталатын z элементі анықталса $(z = x + y)$ және бұл амал төмендегі аксиомаларды қанағаттандырса:

1) $x + y = y + x$ (ауыстырымдылық);

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (терімділік);

3) L-дің кез келген x элементіне қосындысы x-ке тең болатын L-дің 0 элементі бар: $x + 0 = x$ (нөлдің бар болуы);

4) L-дің әрбір x элементі үшін, осы элементпен қосындысы нөлге тең болатын L жиында – x элементі бар: $x + (-x) = 0$ (қарама-қарсы элементтің бар болуы);

2. Кез келген α саны мен L-дің кез келген x элементі үшін L-де αx элементі анықталса (α санының x элементіне көбейтіндісі) және бұл амал төмендегі аксиомаларды қанағаттандырса:

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (терімділік);

2) $1 \cdot x = x$;

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (үлестірімділік);

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (үлестірімділік);

онда L жиыны **сызықты** немесе **векторлық кеңестік** деп аталады.

Егер элементті санға көбейту амалында тек қана нақты сандар пайдаланылса, онда L **нақты**, ал **кешен** сандар пайдаланылса, **кешен сызықты кеңестік** деп аталады. Сызықты кеңестіктің элементтері **вектор** деп аталады.

Біз сызықты кеңістіктердің негізгі мысалдарының бірі n-өлшемді евклид кеңістігін қарастырумен шектелеміз. Бұл кеңістікті E^n деп белгілейміз.

$$E^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n): x_k \in R, k = 1,2,..., n\}$$

деп алып, осы кеңістіктіктің $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ және $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ векторларының **қосындысы** деп

$$z = x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

векторын айтамыз, ал x-тің α **санына көбейтіндісі** деп $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_n)$ векторын айтамыз.

Бұл амалдар жоғарыда аталған аксиомаларды толық қанағаттандырады.

Анықтама Егер L сызықты кеңестігінің $x^1, x^2, ..., x^m$ векторлары үшін

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_m x^m = 0$$

теңдігін қанағаттандыратын және бәрі бірдей нөлге тең болмайтын $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ сандары табылса, онда бұл векторлар жүйесі **сызықты тәуелді** деп аталады. Керісінше жағдайда, демек, егер (11) теңдігі тек қана $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$ болғанда орындалса. Онда $x^1, x^2, ..., x^m$ векторлары **сызықты тәуелсіз** деп аталады.

Анықтама Егер L сызықты кеңестігінде n вектордан тұратын сызықты тәуелсіз жүйе бар болса, ал $(n+1)$ вектордан тұратын кез келген жүйе сызықты тәуелді болса, онда бұл кеңістік n **өлшемді** деп аталады.

Анықтама Егер L сызықты кеңестігінің $x^1, x^2, ..., x^m$ векторлары жүйесі сызықты тәуелсіз болса және осы кеңістіктің кез келген векторы осы жүйедегі векторлардың сызықты комбинациясы болса, онда бұл жүйе L кеңестігінің **базисі** деп аталады. E^n кеңістігінде

$$l_1 = (1,0,...,0)$$
$$l_2 = (0,1,...,0)$$
$$.....................$$
$$l_n = (0,0,...,1)$$

векторлар жүйесі сызықты тәуелсіз және E^n -нің кез келген $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ векторы

$$x = x_1^{l_1} + x_2^{l_2} + ... + x_n^{l_n}$$

түрінде өрнектеледі. Сондықтан, анықтама бойынша, E^n - n өлшемді сызықты кеңістік, ал 8-анықтама бойынша $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, ..., \mathbf{l}_n$ -осы кеңістіктің базисі болады.

Анықтама Егер L сызықты кеңестігінің L' ішкі жиыны, өз кезігінде, L-де анықталған амалдар бойынша сызықты кеңістік болса, онда L' ішкеңістік деп аталады.

Анықтама L сызықты кеңестігінің $\{x_n\}$ жиыны енетін минималды іш кеңістігі осы жиынан туындайтын ішкі кеңістік немесе $\{x_n\}$ векторларының **сызықтың қабықшасы** деп аталады.

E^n кеңістігінің кез келген сызықты тәуеліз $a^1, a^2, ..., a^k, k \le n$, векторларының сызықтық қабықшасы осы кеңістіктің k өлшемді ішкеңістігі болады.

Тақырып 6 Сызықты кеңістіктегі сызықты оператор
Жоспар:

Тақырып 7 Жазықтықтағы түзу. Кеңістіктегі жазықтық пен түзу
Жоспар:

1.Жазықтықтағы түзу
2.Кеңістіктегі жазықтық
3.Кеңістіктегі түзу

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

Жазықтықтағы түзу

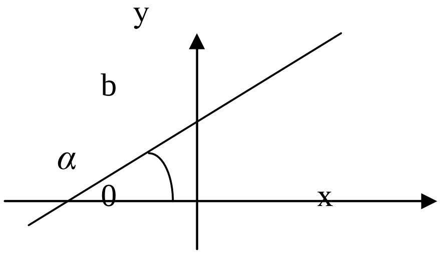
Тікбұрышты декарттық жүйеде екі айнымалыдан тәуелді кез келген **сызықтық** теңдеу жазықтықта **түзуді** анықтайды.

$$Ax + By + C = 0$$

түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.Абсцисса өсінің оң бағыты мен берілген түзудің арасындағы α бұрышы **түзудің көлбеулік бұрышы** деп аталады. Бұл бұрыш абсцисса өсінің оң бағытынан басталып есептелінеді және бұрышты есептеу сағат тілінің қозғалу бағытына қарсы болса «+» таңбасымен, кері жағдайда «-» таңбасымен алынады.

Көлбеулік бұрыштың тангенсі түзудің бұрыштық коэффициенті деп аталады. Әдетте, бұл коэффициент $k = tg\alpha$ деп белгіленеді.

Түзудің жазықтықта берілу тәсілдері: 1)Бұрыштық коэффициенті **k** және түзудің ордината өсінен қиып өтетін **b** кесіндісі арқылы түзуді $y = kx + b$ теңдеуі арқылы анықталаы (1-сурет).



8-сурет

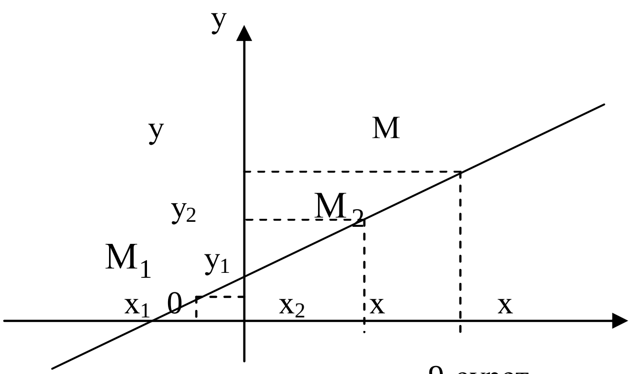
2) $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ **нүктелері арқылы өтетін түзу**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

теңдеуі арқылы анықталады және **бұрыштық коэффициенті**

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

формуласы арқылы есептеледі (9-сурет).

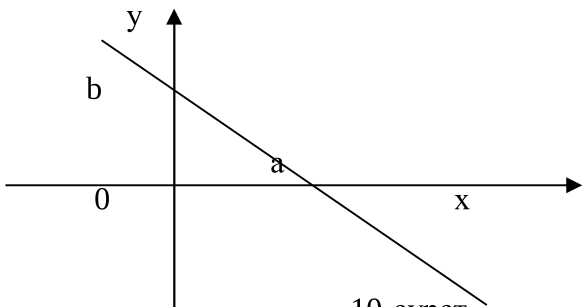


9-сурет

3) Координат өстерінен **а және b кесінділері арқылы өтетін** түзу

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

теңдеуі арқылы анықталады. (10-сурет) және бұл теңдеу **түзудің кесінділердегі теңдеуі** деп аталады, (мұндағы *а* –Ох өсінен, b –Оу өсінен түзудің қиып өтетін кесінділері).



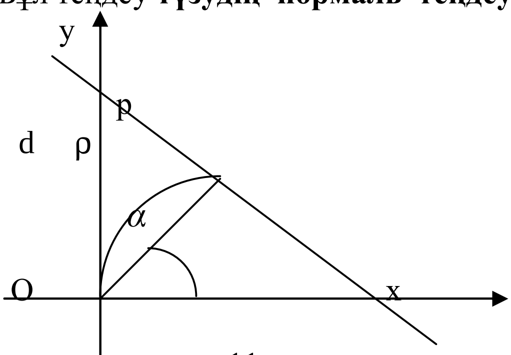
10-сурет

4) Координат басынан түзуге түсірілген **нормаль арқылы** анықталған түзу (11-сурет).

Егер осы нормальдің табаны Р нүктесінде жатып, ОР кесіндісі Ох өсімен α бұрышын жасаса және ұзындығы р-*ға* тең болса, онда түзу

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0$$

теңдеуі арқылы анықталады. Бұл теңдеу **түзудің нормаль теңдеуі** деп аталады.



11-сурет

Егер түзу нормаль теңдеуі арқылы берілсе, онда $M\left(x^*, y^*\right)$ нүктесінің осы түзуден ауытқуы

$$\delta=x^*\cos\alpha+y^*\sin\alpha$$

формуласы арқылы есептеледі. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық осы ауытқудың абсолют шамасына тең: $d=|\delta|$.

Түзудің жалпы теңдеуін нормаль түріне келтіру үшін, осы теңдеудің барлық мүшелері

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формуласы арқылы анықталған **нормаль көбейткішке** көбейтіледі. Нормаль көбейткіштің таңбасы жалпы теңдеудегі бос мүшенің таңбасына кері болады.

Түзудің толық емес теңдеулері: 1) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі бос мүше С=0 болса, онда теңдеу түрінде жазылады да, түзу координат басы арқылы өтеді; **2)** егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $B = 0\ (A \neq 0)$ болса, онда теңдеу $Ax + C = 0$ түрінде жазылады да,

$$x = a,\ a = -\frac{C}{A},$$

түріне келтіріледі. Бұл түзу ординат өсіне параллель болып, абсцисса өсінен а-ға тең кесіндіні қиып өтеді; **3**) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $A = 0\ (B \neq 0)$ болса, онда теңдеу $By + C = 0$ түрінде жазылады да,

$$y = b,\ b = -\frac{C}{B},$$

түріне келтіріледі.

Бұл түзу абсцисса өсіне параллель болып, ординат өсінен *b*-ға тең кесіндіні қиып өтеді; 4) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $B = 0, C = 0\ (A \neq 0)$ болса, онда теңдеу

$$x = 0$$

түрінде жазылады да ординат өсін анықтайды; 5) егер түзудің жалпы теңдеуіндегі $A = 0, C = 0\ (B \neq 0)$ болса, онда теңдеу

$$y = 0$$

түрінде жазылады да абсцисса өсін анықтайды; 6) егер түзудің жалпы теңдеуінің барлық коэффициенттері нөлге тең болмаса, онда жалпы теңдеу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

түріне келтіріледі. Бұл **түзудің кесінділердегі теңдеуі**.

Мұндағы $$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}$$

болады да абсцисса өсінен *a*-ға тең және ординат өсінен b-ға тең кесінділерді қиып өтеді.

Егер екі түзудің k_1 және k_2 бұрыштық коэффициенттері белгілі болса, онда осы **түзулердің арасындағы бұрыш**

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

формуласы арқылы анықталады.

Егер екі түзу $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ және $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ жалпы теңдеулері арқылы берілсе, онда бұл түзулердің бұрыштық коэффициенттері

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

формулалары арқылы анықталады.

Түзулер өзара параллель болуы үшін $k_1 = k_2$, демек $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ шарттары орындалу керек.

Түзулер өзара перпендикуляр болуы үшін

$$k_1 \cdot k_2 = -1,$$

немесе

$$k_1 = -\frac{1}{k_2},$$

демек

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

шарттары орындалу керек.

Егер

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

болса, түзулер параллель болады, ал

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

болса, онда түзулер беттеседі.

Егер түзулер бір S нүктесінде қиылысса, онда

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{13}$$

теңдеуі центрі S нүктесінде жатқан түзулер **шоғын** анықтайды.

Мұндағы α мен β кез келген нақты сандар. Егер $\alpha \neq 0$ болса, онда $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ деп алып, (13) теңдеуі

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

түріне келтіріледі. Бұл теңдеу, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ түзуінен басқа, S нүктесі арқылы өтетін кез келген түзуді анықтайды.

Кеңістіктегі жазықтық

Декарттық координаттар бойынша бірінші дәрежелі теңдеу кеңістіктегі жазықтықты анықтайды және, керісінше, кез келген жазықтық бірінші дәрежелі теңдеу арқылы анықталады. Бұл теңдеу

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

түрінде жазылады да, **жазықтықтың жалпы теңдеуі** деп аталады. Мұндағы A,B,C,D – нақты сандар.

Кеңістікте жазықтықты анықтайтын белгілер

1) Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін, нормаль векторы $\vec{n} = \{A, B, C\}$ болатын тек қана бір жазықтық бар болады. Бұл жазықтықтың теңдеуі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

түрінде жазылады.

2) Бір түзудің бойында жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ және $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері арқылы тек қана бір жазықтық жүргізуге болады. Бұл жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

3) Координат өстерінен нөлге тең емес a, b, c кесінділерін қиып өтетін тек қана бір жазықтық бар болады. Бұл жазықтықтың теңдеуі

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

түрінде жазылады да, жазықтықтың **«кесінділердегі» теңдеуі** деп аталады.

4) Координат басынан шығып, берілген жазықтыққа перпендикуляр болатын $\vec{n}$ векторы, осы жазықтықты P нүктесінде қиып өтсін және $\overrightarrow{OP}$ векторымен бағыттас болсын (егер P координат басында жатса, демек, жазықтық координат басы арқылы өтсе, онда $\vec{n}$ векторының оң бағыты еркін таңдалады).

$\vec{n}$ векторының бағыттаушы косинустары $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ болып, $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$ болса, онда жазықтықтың теңдеуі

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$$

түрінде жазылады да, осы жазықтықтың **нормаль теңдеуі** деп аталады.

Кез келген $M^*\left(x^*, y^*, z^*\right)$ нүктесі үшін

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p$$

саны M^* нүктесінің берілген **жазықтықтан ауытқуы** деп аталады.

Егер $\delta = 0$ болса, онда M^* жазықтықта, $\delta > 0$ болса M^* мен координат басы жазықтықтың екі жағында, ал $\delta < 0$ болса, бір жағында жатады.

$M^*\left(x^*, y^*, z^*\right)$ нүктесінен жазықтыққа дейінгі қашақтық $d = |\delta|$ болады.

Егер жазықтық жалпы теңдеуі арқылы берілсе, онда $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

саны **нормалдаушы көбейткіш** деп аталады. Нормалдаушы көбейткіштің таңбасы $\mu \cdot D < 0$ шарты орындалатындай етіп таңдалады.

Жалпы теңдеуді нормаль түрге келтіру үшін, осы теңдеу нормаль көбейткішке көбейтіледі де $\mu(Ax + By + Cz + D) = 0$ жазықтықтың нормаль теңдеуі болады.

Жазықтықтың толық емес теңдеулері: 1) егер D=0 , болса, онда жазықтықтың жалпы теңдеуі $Ax + By + Cz = 0$ түрінде жазылады да жазықтық координат басы арқылы өтеді; 2) егер C=0 болса, онда жазықтықтың теңдеуі $Ax + By + D = 0$ түрінде жазылады да, Oz осіне параллель болады; 3) егер B=0 және C=0 болса, онда жазықтық $Ax + D = 0$ теңдеуі түрінде жазылады да, Oyz координат жазықтығына параллель болады; 4) егер жалпы теңдеудің барлық коэффициенттері нөлге тең болмаса, онда теңдеу

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

түріне келтіріледі.

Мұндағы $-\dfrac{D}{A} = a$, $-\dfrac{D}{B} = b$, $-\dfrac{D}{C} = c$ сандары жазықтықтың координат өстерінен қиып өтетін кесінділердің шамасын анықтайды.

Жазықтықтардың кеңістікте өзара орналасуы: Кеңістіктегі екі жазықтық өздерінің жалпы теңдеулері:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

арқылы берілсін. Егер

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

болса, онда жазықтықтар өзара параллель болады, ал егер

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

болса, онда жазықтықтар беттеседі.

Өзара параллель болмайтын екі жазақтық түзу бойымен қиылысады.

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

теңдеуі (α,β -нақты параметрлер) кеңістікте бір түзу арқылы өтетін барлық жазықтықтарды анықтайды да **жазықтықтар шоғының теңдеуі** деп аталады.

Коэффициенттері $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ шартын қанағаттандыратын екі жазықтық өзара перпендикуляр болады.

Жазықтықтардың $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ және $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ нормаль векторлары арасындағы бұрыш **жазықтықтар арасындағы екі жақты бұрыш** деп аталады да,

$$\cos\varphi=\frac{n_1\quad n_2}{|\vec{n_1}|\quad|\vec{n_2}|}$$

формуласы арқылы анықталады.

Кеңістіктегі түзу

Берілген $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесі арқылы, берілген $\vec{a}=\{\mathbf{l},m,n\}$ векторына параллель тек қана бір түзу жүргізуге болады. Бұл түзудің теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\mathbf{l}}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \qquad (1)$$

түрінде жазылады.

Мұндағы $\vec{a}=\{\mathbf{l},m,n\}$ түзудің **бағыттаушы векторы** деп аталады да оның координаттары $\mathbf{l},m,n$ түзудің бағыттаушы параметрлері, ал бағыттауышы косинустары осы түзудің бағыттаушы косинустары деп аталады. (1) теңдеуі түзудің **канондық теңдеуі** деп аталады.

$$\frac{x-x_0}{\mathbf{l}}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$

деп алып (t-нақты параметр), түзудің тедеуін

$$\begin{cases}x=x_0+\mathbf{l}t\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases} \qquad (2)$$

түріне келтіреміз. Теңдеудің бұл түрі **параметрлік теңдеу** деп аталады.

$M(x,y,z)$ түзу бойындағы ағымдағы нүкте болса, онда (2) теңдеуі

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}\cdot t,\ t\in(-\infty;+\infty) \qquad (3)$$

түрінде жазылады. Бұл теңдеу **түзудің векторлық теңдеуі** деп аталады.

Егер түзу өзінің бойымен қиылысатын екі жазықтықтың жалпы теңдеулері арқылы берілсе

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases} \qquad (4)$$

онда түзудің **бағыттаушы векторы** $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ болады. Мұндағы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ осы жазықтықтардың нормаль векторлары. Түзудің бағыттауышы параметрлері

$$\mathbf{l} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

формулалары арқылы анықталады. Егер $M_0(x_0, y_0, z_0)$ осы түзудің бойындағы белгіленген нүкте болса, онда (4) теңдеулер жүйесі арқылы берілген түзудің теңдеуін канондық, параметрлік немесе векторлық түрінде жазуға болады.

Мысалы, түзу өзара қиылысатын екі жазықтықтың теңдеулері арқылы берілсін

$$\begin{cases} x + y + 2z - 12 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 1$ деп алып, осы түзудің бойында жатқан $M(1,7,2)$ нүктесін табамыз. Жазықтықтың нормаль векторлары $\overrightarrow{n_1} = \{1;1;2\}$, $\overrightarrow{n_1} = \{2;-1;3\}$.

Түзудің бағыттауышы векторы $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{5;1;-3\}$. Сондықтан, канондық теңдеуі

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-2}{-3};$$

параметрлік теңдеуі

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 7 + t \;, \; t \in (-\infty; +\infty) \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

векторлық теңдеуі

$$\overrightarrow{M_0 M} = \vec{a} \cdot t, \; t \in (-\infty; +\infty)$$

Мұндағы $\overrightarrow{M_0 M} = \{x-1; y-7; z-2\}$; $\vec{a} = \{5,1,-3\}$.

Кеңістіктегі кез келген $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы тек қана бір түзу жүргізуге болады. Бұл түзудің теңдеуі

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

түрінде жазылады да **екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі** деп аталады.

Кеңістікте канондық теңдеулері арқылы

$$\frac{x - x_1}{\mathbf{l}_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\mathbf{l}_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

екі түзу берілген. Бұл түзулердің бағыттауышы векторлары

$$\vec{a}_1 = \{\mathbf{l}_1, m_1, n_1\}, \; \vec{a}_2 = \{\mathbf{l}_2, m_2, n_2\}.$$

Екі түзудің **параллель болу** белгісі: $\dfrac{\mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$. Екі түзудің **перпендикуляр болу** белгісі: $\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Екі түзудің арасындағы бұрыш

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{\mathbf{l}_1{}^2 + m_1{}^2 + n_1{}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{l}_2{}^2 + m_2{}^2 + n_2{}^2}}$$

формуласы арқылы анықталады.

Түзу мен жазықтықтың өзара орналасуы.

$\dfrac{x - x_0}{\mathbf{l}} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ түзуі және $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы берілсін.

$\vec{a} = \{\mathbf{l}, m, n\}$- түзудің бағыттауышы, $\vec{n} = \{A, B, C\}$-жазықтықтың нормаль векторы.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{n}$ өзара перпендикуляр болса, онда түзу жазықтығына параллель болады, ал бұл векторлар параллель болса, онда түзу жазықтыққа перпндикуляр болады. Сондықтан

Түзу мен жазықтықтың **параллель** болу белгісі: $A\mathbf{l} + Bm + Cn = 0$.

Түзудің жазықтыққа **перпендикуляр** болу белгісі: $\dfrac{A}{\mathbf{l}} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы **бұрыш:**

$$\sin\varphi = \frac{A\mathbf{l} + Bm + Cn}{\sqrt{\mathbf{l}^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

формуласы бойынша анықталады.

Тақырып 8 Екінші ретті сызықтар мен беттердің жалпы теориясы

Жоспар:

1 Екінші ретті қисық сызықтар

2 Екінші ретті беттер

Әр сұрақтың қысқаша мазмұны

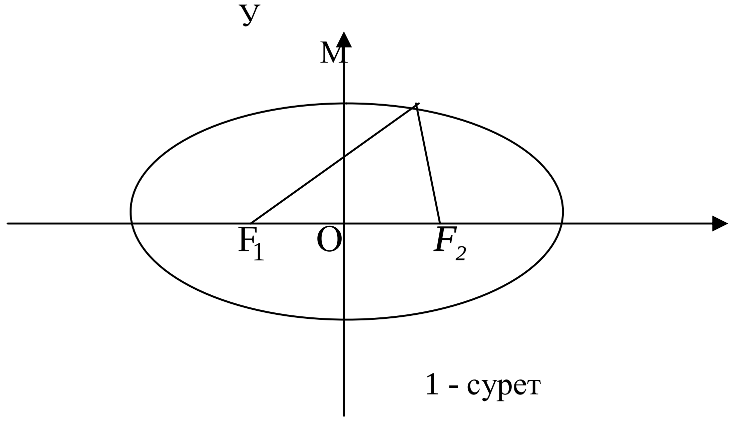
Екінші ретті қисық сызықтар

Эллипс: Белгіленіп алынған F_1 және F_2 нүктелеріне дейінгі қашықтарының қосындысы тұрақты шама болатын M нүктелерінің геометриялық орыны **эллипс** деп аталады. F_1, F_2 нүктелері **эллипстің фокустары** деп аталады.

Осы анықтама бойынша, эллипстің бойындағы M нүктелері үшін

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \qquad (1)$$

теңдігі орындалады және эллипсті төмендегі ретпен салуға болады: ұштары F_1 және F_2 нүктелерінде бекітілген, ұзындығы 2a-ға тең созылмайтын жіпті қарындаштың үшінен тартып қозғасақ, оның үші эллипсті сызып шығады. (1 сурет).



1 - сурет

$\left|F_1F_2\right| = 2c$ деп алынады да, **c** – жарты **фокусаралық қашықтық** деп аталады. $\overrightarrow{F_1F_2}$ кесіндісінің орта нүктесі О болсын. Осы нүктені координат басы деп алып, F_1 және F_2 нүктелері арқылы өтетін бағытталған түзуді абсцисса, ал осы түзуге перпендикуляр болып, О нүктесі арқылы өтетін бағытталған түзуді ордината өсі деп алсақ, (1) теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

түріне келтіріледе. Бұл теңдеу **эллипстің канондық теңдеуі** деп аталады.

Сонымен эллипс екінші ретті сызық болады. (2) **теңдеуіндегі a-эллипстің үлкен жарты өсі, b-кіші жарты өсі деп аталады.**

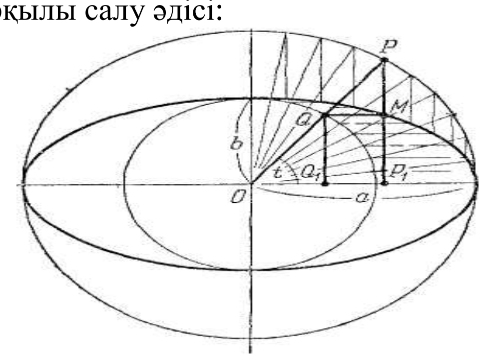
Эллипстің a,b,c параметрлерінің арасында

$$b^2 + c^2 = a^2 \tag{3}$$

теңдігі орындалады. Осы теңдік арқылы белгілі екі параметр арқылы үшінші параметрді табуға болады.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ саны эллипстің эксцентриситеті деп аталады. Бұл сан эллипс үшін бірден кіші болады.

Эллипсті нүктелері арқылы салу әдісі:



2-сурет

1) радиустары *a* және b-ға тең центрлес екі шеңбер сызылады ($b < a$);

2) Осы шеңберлердің ортақ центрі О нүктесінен Ох өсінің оң бағытымен t бұрышын жасайтын сәуле жүргізіледі. Бұл сәуле ішкі шеңберді Q нүктесінде сыртқы шеңберді P нүктесінде қиып өтеді;

3) Q нүктесінен Ох өсіне параллель, P нүктесінен Оу µсіне параллель жүргізілген түзулер, эллипстің нүктесі болатын $M(x, y)$ нүктесінде қиылысады (2-сурет). OQ_1Q үшбұрышынан $y = Q_1Q = b\sin t$, OPQ_1 үшбұрышынан $x = OP_1 = a\cos t$.

Демек

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \; 0 < t < 2\pi. \tag{4}$$

эллипстің параметрлік теңдеуі.

Егер $a = b$ болса, онда $c = 0$ болады. Демек F_1 мен F_2 фокустары О нүктесінде беттеседі де эллипс, радиусы *a*-ға тең, шеңберге айналады.

Эллипстің $(a;0), (-a;0)$ және $(0;b), (0;-b)$ нүктелері оның **төбелері** деп аталады.

Эллипстің үлкен өсіне перпендикуляр, центріне қатысты симметриялы, $\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтығында орналасқан екі түзу **эллипстің директрисалары** деп аталады. Бұл түзулер $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ және $x = \frac{a}{\varepsilon}$ теңдеулері арқылы анықталады.

Теорема 1 Егер эллипстің кез келген М нүктесінен оның екі фокусының біреуіне дейінгі қашықтық r болып, осы фокус жағындағы директрисаға дейінгі қашықтық d болса, онда $\frac{r}{d}$ эллипстің эксцентриситетіне тең тұрақты шама болады: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Гипербола: Фокустары деп аталатын, белгіленіп алынған F_1 және F_2 нүктелеріне дейінгі қашықтықтарының айырымы тұрақты шама болатын М нүктелерінің геометриялық орыны **гипербола** деп аталады.

Аталған айырымның абсолют шамасы **2a** деп белгіленеді және бұл шама фокустар арасындағы қашықтықтан кіші болады.

Демек, егер $|F_1F_2| = 2c$ болса, $a < c$ болады.

Сонымен, анықтама бойынша, егер М нүктесі F_1 фокусына жақын орналасса

$$F_1M - F_2M = 2a \tag{5}$$

теңдігі, ал F_2 фокусына жақын орналасса

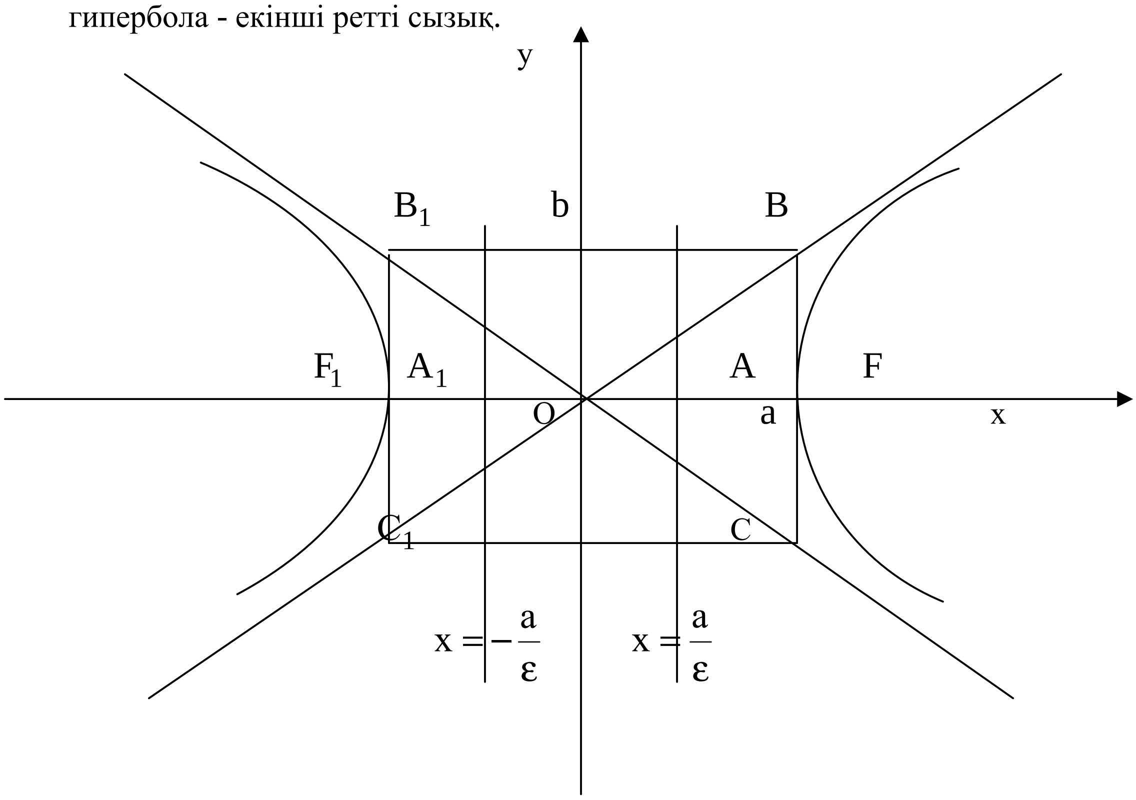
$$F_2M - F_1M = 2a \tag{6}$$

теңдігі орындалады.

F_1F_2 кесіндісінің орта нүктесі О болсын. Осы нүктені координат басы деп алып, F_1 және F_2 нүктелері арқылы өтетін бағытталған түзуді абсцисса, ал осы түзуге перпендикуляр болып, О нүктесі арқылы өтетін түзуді ордината өсі деп алсақ, (5) және (6) теңдеулері

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

түріне келтіріледі. Бұл теңдеу **гиперболаның канондық теңдеуі** деп аталады. Демек, гипербола - екінші ретті сызық.



3-сурет

(7) теңдеуі бойынша, гиперболаны салу реті: 1) центрі О нүктесінде болатын, қабырғалары координат өстеріне параллель және ұзындықтары *2a* мен *2b* –ға тең тіктөртбұрыш салынады. Мұндағы **a-** гиперболаның **нақты, b -** гиперболаның **жорамал** жарты өстері**, с- жарты фокусаралық қашықтық** деп аталады.

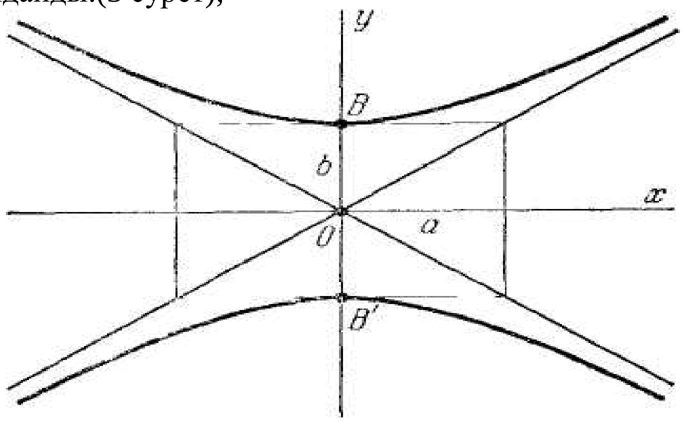
Бұл параметрлер

$$c^2 = a^2 + b^2$$

теңдеуін қанағаттандырады. $A_1(a;0)$ мен $A_2(-a;0)$ нүктелері гиперболаның төбелері, $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ фокалдық радиустар;

2) BB_1C_1C тіктөртбұрышының С мен B_1 және В мен C_1 төбелері арқылы өтетін түзулер гиперболаның **асимптоталары** деп аталады. Олар $y = \frac{b}{a}x$ және $y = -\frac{b}{a}x$ теңдеулері арқылы анықталады;

3) гипербола екі тармақтан тұрады. Оның оң тармағы A_1 төбесінен өтіп, х плюс шексіздікке ұмтылғанда оның асимпоталарына шексіз жақындайды, сол тармағы A_2 төбесінен өтіп х минус шексіздікке ұмтылғанда оның асимптоталарына шексіз жақындайды.(3 сурет);



4-сурет

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

теңдеуімен анықталған гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гиперболасына түйіндес деп аталады. Түйіндес гиперболаның графигі 4- суретте көрсетілген.

$x^2 - y^2 = a^2$ теңдеумен анықталған гипербола **теңқабырғалы** деп аталады. Оның асимптоталары өзара перпендикуляр болады.

Гиперболаның эксцентриситеті деп $\varepsilon = \frac{c}{a}$ саны айтылады. Бұл сан бірден үлкен және

$$\varepsilon^2 = 1 + \left(\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

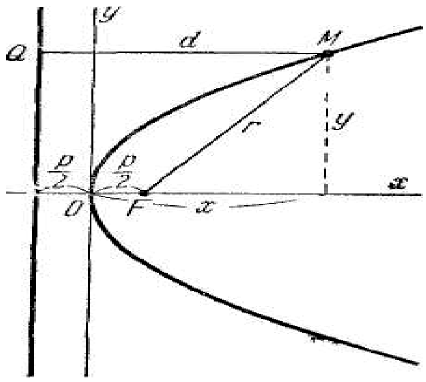
теңдігін қанағаттандырады.

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ және } x = \frac{a}{\varepsilon}$$

теңдеулері анықтайтын түзулер гиперболаның **директрисалары**.

Теорема 2 Егер гиперболаның кез келген М нүктесінен оның екі фокусының біреуіне дейінгі қашақтығы r болып, осы фокус жағындағы директрисаға дейінгі қашықтығы d болса, онда $\frac{r}{d}$ гиперболаның эксцентриситетіне тең тұрақты шама болады: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Парабола: Фокус деп аталатын, белгіленіп алынған F нүктесі мен директриса деп аталатын $\mathbf{l}$ түзуіне дейінгі қашықтықтары өзара тең болатын нүктелердің геометриялық орны **парабола** деп аталады (5-сурет).



l

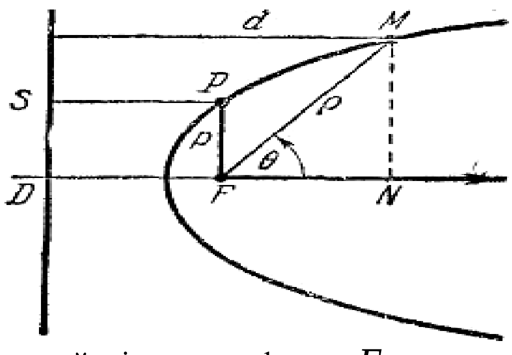
5-сурет

Параболаның директрисасынан фокусына дейінгі қашықтығы p оның **параметрі** деп аталады.

Тікбұрышты декарттық жүйенің абсцисса өсі директрисаға перпендикуляр болып параболаның фокусы арқылы, ал ордината өсі директриса мен фокусты жалғастыратын кесіндінің орта нүктесі арқылы өтсін.

Осылай құралған декарттық жүйедегі параболаның теңдеуі: $y^2 = 2px$. Бұл теңдеу де екінші дәрежелі. Сондықтан, парабола екінші ретті сызық.

Полярлық жүйедегі эллипстің, гиперболаның және параболаның теңдеуі: бірінші, екінші теоремалар мен параболаның анықтамасынан (салыстыр): белгіленіп алыңған нүктеден (фокустан) берілген түзуге (директрисаға) дейінгі қашықтықтарының (r мен d) қатынасы тұрақты шама (**эксцентриситет** ε**)** болатын ($\frac{r}{d} = \varepsilon$) нүктелердің геометриялық орны: егер $\varepsilon < 1$ болса эллипс, $\varepsilon > 1$ болса гипербола (фокусқа жақын жатқан тармағы), ал $\varepsilon = 1$ болса парабола болатынын көреміз.



l

6-сурет

Полярлық жүйені аталған фокус F полюсы болып, полярлық өсті директриса $\mathbf{l}$-ге перпендикуляр және оны қиып өтпейтіндей етіп бағыттап құрайық (6-сурет).

Полюстен полярлық өске тұрғызылған перпендикуляр берілген екінші ретті қисықты Р нүктесінде қиып өтсін (суретке қара). $|FP| = p$ осы қисықтың **фокустық параметрі** деп аталады.

Осы жүйеде **екінші ретті қисық сызықтардың теңдеуі**

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

түрінде жазылады. Мұндағы p - **фокустың параметрі,** ε -**эксцентриситет**. Бұл теңдеу көбінесі механикада қолданады.

Екінші ретті сызықтардың оптикалық қасиеттері:

1) Эллипстің М нүктесіне жүргізілген жанама оның фокустың радиустары F_1M және F_2M - мен тең бұрыш жасайды және F_1MF_2 бұрышының сыртында жатады (7-сурет).

а) Демек, эллипстің бір фокустағы жарық көзінен шыққан сәулелер, эллипстің айнадан шағылысып оның екінші фокусына жиналады.

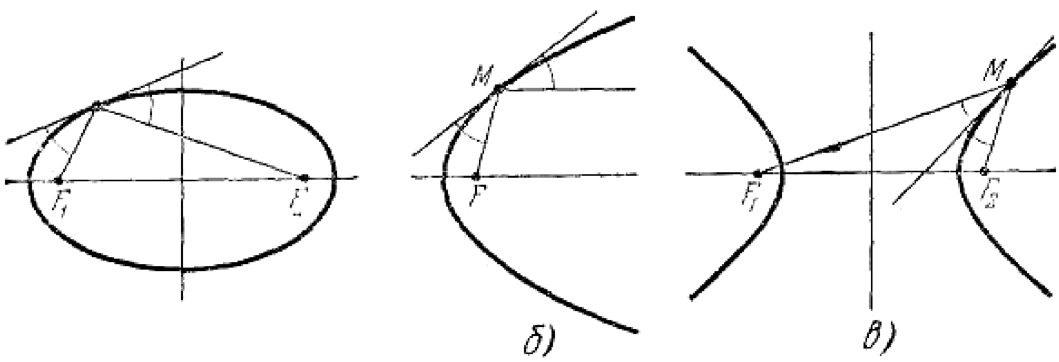


Рис. 70.

7-сурет

2) Параболаның М нүктесіне жүргізілген жанама оның FM фокалдық радиусы және М нүктесінен парабола өсіне параллель және бағыттас сәулемен тең бұрыш жасайды. Демек, параболаның фокусындағы жарық көзінен шыққан сәулелер, параболалық айнадан шағылысып, оның өсіне параллель тарайды (7-сурет,б);

3) Гиперболаның М нүктесіне жүргізілген жанама оның фокустық радиустары F_1M және F_2M -мен тең бұрыш жасайды және F_1MF_2 бұрышқа іштей өтеді.

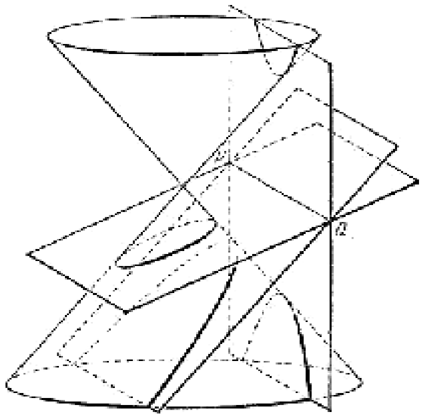
4) Демек, гиперболаның бір фокусындағы жарық көзінен шыққан сәулелер, гиперболаның айнадан шағылысып, оның екінші фокусынан шыққандай әсер қалдырады.

Екінші ретті қисық сызықтардың конустық қима болатыны. Дөңгелек конусты, оның төбесі арқылы өтпейтін, жазықтық қиып өтсін. Егер осы жазықтық конустың тек қана бір қуысын қиып өтсе және қиылысу сызығы тұйық болса, онда бұл сызық **эллипс.** Ал тұйық болмаса, **парабола** болады; егер жазықтық конустың екі қуысын да қиып өтсе, онда қиылысу сызығы **гипербола** болады (8-сурет).

Екінші ретті қисық сызықтың жалпы теңдеуі және оны канондық түрге келтіру: Екінші ретті қисық сызықтың жалпы теңдеуі деп

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (9)$$

теңдеуін айтады.



8-сурет

Мұндағы A,B,C,D,E,F (9) **теңдеуінің коэффициенттері**. Осы теңдеудің алғашқы үш мүшесі жалпы **теңдеудің бас мүшелері** деп аталады.

Негізгі мақсат-координаттар жүйесін түрлендіру арқылы жалпы теңдеуді канондық түрге келтіру. Осы мақсатпен жалпы теңдеуді түрлендіру реті:

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + F = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

теңдеулер жүйесі құрылады. Егер осы жүйенің анықтауышы

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

нөлге тең болмаса, онда (10) жүйесінің тек қана бір (x_0, y_0) шешімі болады. Осы шешім арқылы анықталған $S(x_0, y_0)$ нүктесі сызықтық центрі деп аталады да, **екінші ретті сызық центрі** делінеді.

$$x = x' + x_0,\ y = y' + y_0 \qquad (11)$$

формуласы арқылы координаттар басын $S(x_0, y_0)$ нүктесіне **параллель көшіру арқылы** (9) теңдеуі

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + 2Cy'^2 + F' = 0 \qquad (12)$$

теңдеуіне келтіріледі. Мұндағы $F' = Dx_0 + Fy_0 + F \quad x'Oy'$ жүйесін

$$\begin{cases} x' = x''\cos\alpha \quad y''\sin\alpha, \\ y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \end{cases} \qquad (13)$$

түрлендіру арқылы α бұрышынан бұрамыз. Мұндағы α

$$B\,tg^2\alpha - (C - A)tg\alpha - B = 0 \qquad (14)$$

теңдеуі арқылы анықталады да (12) теңдеуі

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F' = 0 \qquad (15)$$

түріне келтіріледі. Бұл теңдеудегі $A' \neq 0$ және.

Ескертулер: 1) Егер $tg\alpha$ белгілі болса (13) түрлендіруіндегі $\sin\alpha$ мен $\cos\alpha$ -ны

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

формулалары арқылы анықтауға болады.

2) (15) теңдеуіндегі A' және C' коэффициенттерін

$$\begin{cases} A'C' = AC - B^2 \\ A' + C' = A + C \end{cases}$$

теңдеулер жүйесінен анықтауға болады.

Егер $\delta > 0$ болса, екінші дәрежелі (9) теңдеуі эллипстік, $\delta < 0$ болса гиперболалык, ал $\delta = 0$ болса **параболалық** деп аталады.

Эллипстік теңдеу эллипсті (егер A' мен C' таңбалары бірдей, ал F' -тің таңбасы оған қарама-қарсы болса, өзгеше эллипсті (егер $F' = 0$ болса. Бұл жағдайда эллипс бір нүктеге айналады), немесе жорамал эллипсті (егер A', C', F' -тің таңбалары бірдей болса. Бұл жағдайда (9) теңдеуінің геометриялық бейнесі болмайды) анықтайды.

Гиперболаның теңдеуі гиперболаны, немесе өзгеше гиперболаны (демек, центрінде қиылысатын екі түзуді) анықтайды.

Егер (9) теңдеуі параболалық болса (демек, $\delta = 0$ болса), онда осы теңдеу анықтайтын сызықтық центрі болмайды, немесе бір түзудің бойында жатқан шексіз көп центрлері болады. Центрі жоқ сызық парабола, **шексіз көп центрі бар сызық өзгеше парабола** (өзара параллель екі түзу) болады.

Параболаның теңдеуі (13) түрлендіруі арқылы

$$A'x'^2 + +2D'x' + 2E'y' + F = 0, A' \neq 0 \tag{16}$$

немесе

$$C'y'^2 + +2D'x' + 2E'y' + F = 0, C' \neq 0 \tag{17}$$

түріне келтіріледі.

(16) немесе (17) теңдеулері $x'Oy'$ жүйесін параллель көшіру арқылы канондық түрге келтіріледі.

Екінші ретті беттер

Тік бұрышты декарттық жүйеде, радиусы r-ге тең центрі $C(\alpha, \beta, \gamma)$ нүктесінде жатқан сфера

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2 \tag{1}$$

теңдеуі арқылы анықталады. Центрі координат басында жатқан сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{2}$$

теңдеуі бойынша анықталады.

Тікбұрышты декарттық жүйеде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

теңдеуі арқылы анықталған бет **эллипсоид** деп аталады (1 сурет).

a, b, c сандары –элллипсоидтың жарты µстері. Егер бұл сандар өзара тең болмаса, эллипсоид үш µсті деп аталады.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{4}$$

теңдеуі жорамал эллипсоидтың теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеу кеңістікте бір де бір нүктені анықтамайды.

Тікбұрышты декарттық жүйеде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

теңдеуі арқылы анықталған бет **бірқуысты гиперболоид** деп аталады (2-сурет), ал

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (6)$$

теңдеуі арқылы анықталған бет **екіқуысты гиперболоид** делінеді. (3-сурет).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (7)$$

теңдеуі анықтайтын бет **конус** деп аталады (4-сурет).

Тікбұрышты декарттық жүйеде

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}, p>0, q>0 \qquad (8)$$

теңдеуі анықтайтын бет **эллипстік параболоид** деп аталады (5-сурет).

Тікбұрышты декарттық жүйеде

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}, p>0, q>0 \qquad (9)$$

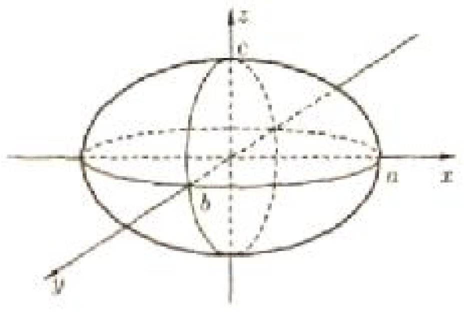
теңдеуі анықтайтын бет **гиперболалық параболоид** деп аталады. (6-сурет).

Кеңістіктегі тікбұрышты декарттық жүйеде

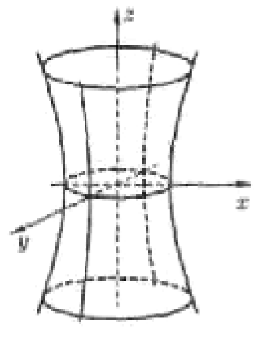
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (10)$$

теңдеуі анықтайтын бет **екінші ретті цилиндр** деп аталады. **xOy** жазықтығында (10) теңдеуі анықтайтын екінші ретті сызық цилиндрдің бағыттауышысы деп аталады. Цилиндр бағыттаушысының кез келген нүктесінен Oz осіне параллель түзу осы цилиндрдің жасаушысы деп аталады.

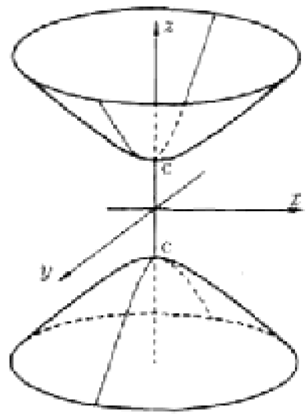
Егер бағыттаушысы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс болса, **цилиндр эллипстік**; $a=b$ болса **дөңгелек цилиндр** (7 сурет); $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола болса, **цилиндр гиперболалық** (8 сурет); $y^2=2px$ парабола болса, цилиндр **параболалық** деп аталады (9-сурет).

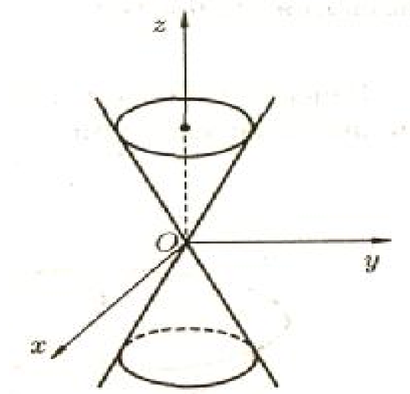


1-сурет

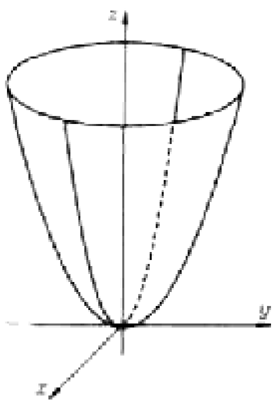


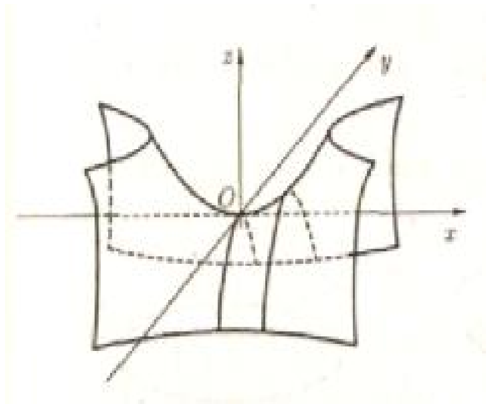
2-сурет



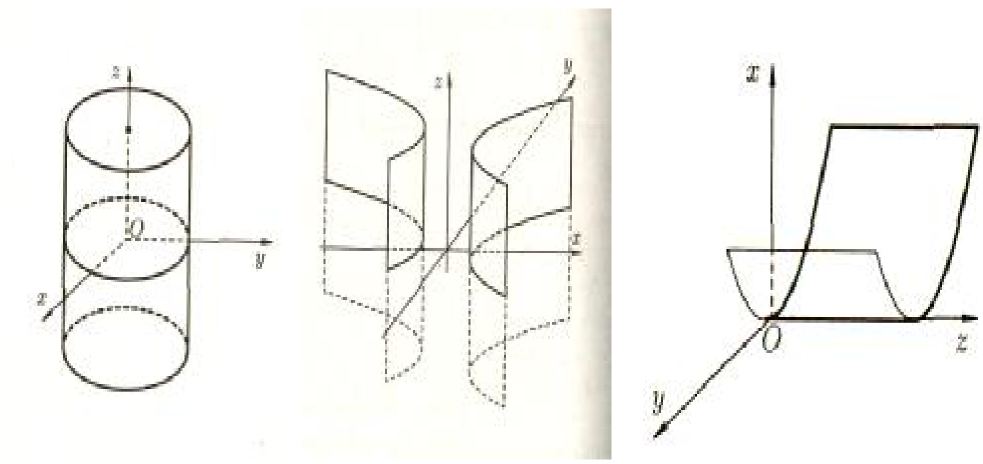


3-сурет 4-сурет





5-сурет 6-сурет



а) эллипстік цилиндр б) гиперболалық цилиндр в) параболалық цилиндр

7-сурет

7. Тәжірибелік сабақтардың мазмұны

Тақырып 1. Комплекс сандар

1.Кешен сандарға қолданылатын амалдар.

2.Кешен санды геометриялық кескіндеу.

3.Кешен санның тригонометриялық түрі.

1. Есептеңіздер: $i^2, i^3, i^4, i^{231}, i^{318}, \frac{1}{i^3}, i^{-3}, i^{-231}, i^n$.

2. Берілген кешен сандардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісінің геометриялык бейнесін табыңыздар

$1)\ \alpha = 1; \beta = 1 + i;\ 2)\ \alpha = 3 - i; \beta = 1 + 2i;\ \ 3)\ \alpha = -2 + i; \beta = 2 + i;$

$4)\ \alpha = 1 + i; \beta = 1 - i; 5)\ \ \alpha = a + bi; \beta = c + di$

3. Амалдарды орындаңыздар

$1. \frac{1}{i};\quad 2. \frac{1-i}{1+i};\ \ 3. \frac{2}{1-3i};\ \ 4. \frac{a+bi}{c+di}.;$

4. Кешен сандардың нақты және жорамал бөлімдерін, модулі мен аргументтерін табыңыздар. Оларды тригонометриялық және көрсеткіштік түрінде жазыңыздар

1. $3i$; 2. -2; 3. $1+i$; 4. $-1-i$; 5. $2+5i$; 6. $2-5i$; 7. $2+5i$; 8. $-2-5i$; 9. $bi, (b \neq 0)$.

5. Кешен саннан алынған квадрат түбірді есептеңіздер

$1. \sqrt{1};\ \ 2. \sqrt{i};\ 3. \sqrt{1+i};\ 4. \sqrt{-1+i};\ 5. \sqrt{-1-i};\ 6. \sqrt{1-i};\ 7. \sqrt{-4+3i};\ 8. \sqrt{-4-3i1};$

$9. \sqrt{4-3i};\ 10. \sqrt{2+3i}.$

6. Кешен саннан алынған түбірдің барлық мәндерін табыңыздар және олардың комплекс жазықтығындағы бейнесін салыңыздар

$1. \sqrt[3]{1};\ 2. \sqrt[3]{i};\ 3. \sqrt[4]{-1};\ 4. \sqrt[6]{-8};\ 5. \sqrt[8]{1};\ 6. \sqrt[4]{1-i};\ 7. \sqrt[6]{3-4i};$

$8. \sqrt{2-2i}\quad 9. \sqrt[3]{-3+4i};\ 10. \sqrt[5]{-3-4i}.$

7. Есептеңіздер

$1. (1-i)^{20};\ \ 2. (1-i\sqrt{3})^{15};\ \ 3. \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3;\ \ 4. \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{20};\ \ 5. \frac{1}{(\sqrt{3}-i)^{17}};$

8. Берілген кешен сандар жиынының кешен жазықтығындағы бейнесін құрыңыздар.

$1. |z| = 1;\ \ 2. |z+2| = 2;\ \ 3. \operatorname{Re} z < 0;\ \ 4. \operatorname{Im} z > 2;\ \ 5. 3 \le |z+2i| < 4;$

$6. \frac{\pi}{4} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4};\ \ 7. |z+i| = |z-i|;\ 8. |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1;$

$9. |z - z_0| = R;\ 10. |z+1-2i| = 3.$

9. Берілген кешен сандар жиынының геометриялық мағынасын анықтаңыздар.

$1. |z-2| + |z+2| = 5;\quad 2. |z-2| - |z+2| > 3;\ \ 3. |z - z_1| = |z - z_2|.$

10. Берілген теңдеулер арқылы анықталған кешен жазықты-ғындағы сызықтар үйірлерін табыңыздар.

$1. \operatorname{Re}\frac{1}{z} = C;\ 2. \operatorname{Im}\frac{1}{z} = C\ (-\infty < C < +\infty).;\ 3. \operatorname{Re} z^2 = C;$

$4. \operatorname{Im} z^2 = C\ (-\infty < C < +\infty).$

11. Теңсіздіктердің геометриялық мағынасын ескеріп дәлелдеңіздер

$1.|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|;\qquad 2.|z_1 - z_2| > ||z_1| - |z_2||.$

12. Теңдікті дәлелдеңіздер

$1.\operatorname{Re}\alpha = \dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \operatorname{Im}\alpha = \dfrac{\alpha-\overline{\alpha}}{2i};\ 2.\left(\overline{\overline{\alpha}}\right) = \alpha;\ 3.\overline{(\alpha\pm\beta)} = \overline{\alpha}\pm\overline{\beta};$

$4.\ \overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}};\ 5.\left(\overline{\alpha\beta}\right) = \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta};\qquad 6.\left(\overline{\alpha^n}\right) = \overline{\alpha}^n;\ 7.|\overline{\alpha}| = |\alpha|;\ 8.|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha};$

13. Теңдікті дәлелдеңіздер

$1.|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|;\qquad 2.\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|};\qquad 3.\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}.$

14. Кешен жазықтығында берілген жиындарды теңсіздік арқылы жазыңыздар

1) Жорамал өске параллель түзумен шектелген жарты жазықтықтар;

2) Нақты өске параллель түзумен шектелген жарты жазықтықтар;

3) Ені $2h$, орта сызығы нақты өс болатын жолақ;

4) Центрі z_0 нүктесінде жатқан ,радиусы R болатын дөңгелектің ішкі жағы;

5) Жарты өстері a және b болатын, центрі координат басында жататын және үлкен өсі нақты өспен $\dfrac{\pi}{4}$ бұрышын жасайтын эллипстің ішкі жағы;

6) $y^2 = 2px$ параболасымен шектелген кешен жазықтығының бөліктері;

7) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболасының тармақтарымен шектелген кешен жазықтығының бөліктері.

15. Төмендегі шамалардың геометриялық мағынасын анықтаңыздар

$1.|z|;\qquad 2.|\operatorname{Re} z|;\qquad 3.|\operatorname{Im} z|.$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 25 $(2+3i)+(7+2i) = 9+5i$.

Мысал 26 $(2+4i)-(5-i) = -3+5i$.

Мысал 27 $(2-3i)(4+5i) = 8-12i+10i-15i^2 = (8+15)-2i = 23-2i$.

Мысал 28 $\dfrac{2+3i}{1-i} = \dfrac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{(2-3)+5i}{1+1} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$.

Тақырып 2. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері

Жоспар:

1.Екінші, үшінші ретті анықтауыштарды есептеу.

2.Жоғарғы ретті анықтауыштар.

3.Матрицаларға қолданылатын амалдар.

4.Кері матрица.

5.Матрицалық теңдеулер.

6.Сызықты теңдеулер жүйесі

7.n белгісізі бар n теңдеулер жүйесін шешу әдістері

8.n белгісізі бар m теңдеулер жүйесін зерттеу және үйлесімді болған жағдайда шешімін табу әдісі

1. a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \sin j & \cos j \\ \cos j & \sin j \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} tga & -1 \\ 1 & tga \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; i) $\begin{vmatrix} a+b & b+d \\ a+c & c+d \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2. a) $\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix}$, мұндағы $w = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}$; b) $\begin{vmatrix} e & 1 \\ -1 & e \end{vmatrix}$, мұндағы $e = \cos\frac{p}{3} + i\sin\frac{p}{3}$.

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

4. a) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{p}{3} + i\sin\frac{p}{3} & \cos\frac{p}{4} + i\sin\frac{p}{4} \\ \cos\frac{p}{3} - i\sin\frac{p}{3} & 1 & \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3} \\ \cos\frac{p}{4} - i\sin\frac{p}{4} & \cos\frac{2p}{3} - i\sin\frac{2p}{3} & 1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{vmatrix}$, мұндағы $w = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}$, мұндағы $w = \cos\frac{2p}{3} + i\sin\frac{2p}{3}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 1 Анықтауыштың мәнін есепте: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot 3 = 5$

Мысал 2 Анықтауыштың мәнін есепте

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot(-2) + 2\cdot 1\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 2 = -10$$

Матрицалар теориясы

1. Амалдарды орында

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Берілген матрицаға кері матрицаны тап:

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$;

3. Матрицалық теңдеулерді шеш:

1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$; 2) $X\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\1&-2&5\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&1&\dots&1\\0&0&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&1&0&\dots&0\\1&2&1&\dots&0\\0&1&2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&2\end{pmatrix}$

4. Теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шеш:

1) $\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=2,\\x_1-x_2=-1,\\-x_1+2x_2+x_3=-2.\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2-x_3-x_4=2,\\x_1-2x_2+x_3-x_4=3\\x_1-x_2-x_3+x_4=4.\end{cases}$.

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 3 $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&2\\1&3&10\end{pmatrix}$

Мысал 4 $\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&4\\1&1&0\end{pmatrix}$

Мысал 5 Кері матрицаны тап:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\qquad \det A=\begin{vmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=-6+1+0+2-3-0=-6.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{pmatrix}-3&0&3\\1&4&-3\\1&-2&-3\end{pmatrix}.$$

Мысал 6 Матрицалық теңдеуді шеш: $\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix};\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7&-7\\-1&5\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}&-\frac{7}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

Сызықтық теңдеулер жүйесі

1. Теңдеулер жүйесін Крамер және Гаусс әдістермен шеш:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$

2. Теңдеулер жүйесін үйлесімділікке зерттеп шешімін тап:

1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad 3x_3 = 14. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \quad x_5 = 12, \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 \quad 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 \quad 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3, \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad = 3. \end{cases}$

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 7 Кері матрица көмегімен $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$ жүйесінің шешімін табу керек.

Шешуі Бұл жағдайда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 1$$

Жүйенің матрицасының анықтаушы нөлге тең емес, $|A| = 1$. Сондықтан А матрицасына кері матрицаны табуға болады. Кері A^{-1} матрицасын табу үшін А матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштарын есептейміз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Енді кері матрицаны:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{10}$$

формуласы бойынша есептейміз:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Кері матрицаның дұрыс есептелгенін тексеруге болады:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Жүйенің шешуін (8) формула бойынша табамыз:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -3 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Осыдан $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$ шешулерін аламыз.

Мысал 8 Берілген: $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ біртекті жүйенің шешімін табу керек.

Шешуі Егер жүйенің матрицасының $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ рангі белгісіздер санынан кіші болса, онда біртекті жүйенің нөлдік емес шешуі бар болады. Оны анықтау үшін A матрицасын элементар түрлендірейік: бірінші тік жолға үшіншісін қосып, ал үшінші тік жолдан екіншісін аламыз. Сонда $A\sim\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Бірінші тік жолды $\frac{1}{2}$ - ге көбейтіп және үшінші жатық жолдан бірінші жатық жолды аламыз.

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Үшінші жатық жолдан 4 – ке көбейтіп, екінші жатық жолды аламыз, содан кейін екінші және үшінші тік жолдарға тиісінше 2 және 1 – ге көбейтіп бірінші тік жолды қосамыз.

$$A\approx\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сонымен, A матрицасының рангі 2 – ге тең және берілген жүйенің нөлдік емес шешуі бар. Шешуші айнымалылар үшін x_1 және x_2 - ні алайық. Сонда жүйені екі теңдеулер жүйесіне келтіруге болады:

$$\begin{cases} -x_1+x_2=-x_3 \\ x_1+2x_2=-x_3 \end{cases}$$

Бұл жүйенің шешуі: $x_1=\frac{1}{3}x_3,\ x_2=-\frac{2}{3}x_3$. Мұндағы x_3 бос айнымалысына кез келген $x_3=3t$ мәндер беріп жүйенің шешуін $x_1=t,\ x_2=-2t,\ x_3=3t$ түрінде аламыз.

Тақырып 3. Векторлық алгебра

Жоспар:

1.Векторлар.
2.Векторлар арасындағы сызықтық амалдар.
3.Векторлардың скалярлық көбейтіндісі.
4.Векторлардың векторлық көбейтіндісі.
5.Үш вектордың аралас көбейтіндісі.

1. $A(2;-3;4)$ және $B(3;-1;-2)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ векторларын анықта.

2. $A(2;1;-2)$ нүктесінен шығатын $\overrightarrow{AB}=\{-3;2;4\}$ векторының соңғы B нүктесінің координаттарын тап.

3. $A(-1;3;2)$ нүктесінде аяқталатын $\overrightarrow{AB}=\{-1;2;3\}$ векторының бас A нүктесінің координаттарын тап.

4. $\vec{a}=\{-6;2;-3\}$ векторының модулін тап.

5. Модулі 2-ге тең $\vec{a}$ векторы координат өстерімен $a = 45^{0}$, $\beta = 60^{0}$, $\gamma = 120^{0}$ бұрыштарын құрады. Осы вектордың координат остеріндегі проекцияларын тап.

6. $\vec{a} = \{12;-15;-16\}$ векторының бағыттауышы косинустарын тап.

7. Вектор координат өстерімен төменде берілген бұрыштарды: 1) $\alpha = 45^{0}$, $\beta = 60^{0}$, $\gamma = 120^{0}$; 2) $\alpha = 45^{0}$, $\beta = 135^{0}$, $\gamma = 60^{0}$; 3) $\alpha = 90^{0}$, $\beta = 150^{0}$, $\gamma = 60^{0}$ жасай алама?

8. Ох өсімен $\alpha = 120^{0}$, Oz өсімен $\gamma = 45^{0}$ бұрыш жасайтын вектор Оу осімен қандай бұрыш жасайды?

9. $\vec{a}$ векторы *Ох* өсімен $\alpha = 60^{0}$, *Оу* өсімен $\beta = 120^{0}$ бұрыштарын жасайды және $|\vec{a}| = 2$. Осы вектордың координаттарын тап.

10. Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары бойынша $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{a}$ және $-\vec{a} - \vec{b}$ векторларын сал.

11. $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ және $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ екені белгілі. $|\vec{a} - \vec{b}|$-ны тап.

12. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр. $|\vec{a} + \vec{b}|$ мен $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ны тап.

13. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ болатын $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары $\varphi = 120^{0}$ бұрыш жасайды. $|\vec{a} + \vec{b}|$ мен $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ны анықта.

14. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ қандай шарттарды қанағаттандырғанда:
1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} \quad \vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} \quad \vec{b}|$ қатынастары орындалады.

15. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бойынша: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$;
4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ векторларын салыңыздар.

16. $\vec{a} = \{3;-2;6\}$ және $\vec{b} = \{-2;1;0\}$ векторлары берілген.
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$ векторларының координат өстеріндегі проекцияларын тап.

17. $\vec{a} = \{6;-2;-3\}$ және $\vec{b} = \{3;4;-12\}$ векторларын анықтайтын орттарды тап.

18. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ деп алып: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^{2}$; 3) $\vec{b}^{2}$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^{2}$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^{2}$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^{2}$ мәндерін есептеңіздер.

19. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр, $\vec{c}$ векторы осы векторындың әрқайсысымен $\frac{\pi}{3}$-ке тең бұрыш жасайды. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ деп алып :1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$ мәндерін есептеңіздер.

20. Модульдері бірге тең және $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ теңдігін қанағаттандыратын $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары берілген. $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$ мәнін тап.

21. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ екені белгілі. α санының қандай мәндерінде $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ векторы $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ векторына перпендикуляр болады?

22. $\vec{a} + \vec{b}$ векторы $\vec{a} - \vec{b}$ векторына перпендикуляр болуы үшін $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары қандай шарттары қанағаттандыруы керек?

23. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{\pi}{6}$ және $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ мен $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ векторлары арасындағы бұрышты тап.

24. $\vec{a} = \{4;-2;-4\}$ және $\vec{b} = \{6;-3;2\}$ векторлары берілген. Төмендегі өрнектердің мәнін есепте: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; 3) $\sqrt{\vec{b}^2}$; 4) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 5) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

25. $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ және $C(0;1;-5)$ нүктелері берілген. Төмендегі өрнектердің мәнін есепте:

1) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$; 2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$;

4) $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$ және $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$ векторларының координаттарын тап.

26. α санының қандай мәнінде $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ мен $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ векторлары өзара перпендикуляр болады?

27. $\vec{a} = \{2;-4;4\}$ және $\vec{b} = \{-3;2;6\}$ векторларының арасындағы бұрышты есепте.

28. ABC үшбұрышының $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ және $C(3;-2;1)$ төбелері берілген. Осы үшұрыштың B төбесіндегі ішкі және сыртқы бұрыштарын тап.

29. $\vec{a} = \{5;2;5\}$ векторының $\vec{b} = \{2;-1;2\}$ векторы жатқан өстегі проекциясын тап.

30. $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ және $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ векторлары берілген. $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$ және $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$ -ны есепте.

31. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{\pi}{6}$ және $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 6$. $\vec{a} \times \vec{b}$ векторының модулін тап.

32. $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ және $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. $\vec{a} \times \vec{b}$ векторының модулін тап.

33. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ және $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың скаляр көбейтіндісін тап.

34. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ деп алып: 1) $[\vec{a}\times\vec{b}]^2$; 2) $[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$; 3) $[(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$ өрнектерінің мәндерін есепте.

Нұсқау: Мұндағы $[\vec{a}\times\vec{b}]^2$ - $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының скалярлық квадраты.

35. $\vec{a}+\vec{b}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$ векторына коллинеар болуы үшін $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?

36. $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$ векторлары берілген. $\vec{a} = \vec{p}\times\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{g}\times\vec{n}$, $\vec{c} = \vec{r}\times\vec{n}$ векторлары компланарлы болатынын дәлелде.

37. $\vec{a} = \{3;-1;-2\}$ және $\vec{b} = \{1;2;-1\}$ векторлары берілген. Төмендегі векторлық көбейтінділерді анықта: 1) $\vec{a}\times\vec{b}$; 2) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$; 3) $(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$

38. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$ және $C(3;2;1)$ нүктелері берілген. 1) $[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}]$; 2) $[(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{CB}]$ векторларын анықта.

39. $\vec{a} = \{2;-3;1\}$, $\vec{b} = \{-3;1;2\}$ және $\vec{c} = \{1;2;3\}$ векторлары берілген. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ және $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ векторларын тап.

40. Оң үштік жасаушы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары үшін $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

41. $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларына перпендикуляр, $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларың арасындағы бұрыш $\varphi = 30^{\mathbf{0}}$. $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$ екені белгілі. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

42. $\vec{a} = \{1;-1;3\}$, $\vec{b} = \{-2;2;1\}$ және $\vec{c} = \{3;-2;5\}$ векторлары берілген. Осы векторлардың $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ аралас көбейтіндісін тап.

43. $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ нүктелерінің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 9 табыңдар: $|\vec{в}-\vec{a}|$, егер $\vec{a} = (3,1), \vec{в} = (2,4)$

Шешуі: $\vec{в}-\vec{a} = (2-3;4-1) = (-1;3)$. Онда $|\vec{в}-\bar{a}| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

Мысал 10 $\vec{a} = (2,3,1), \vec{в} = (3,1,0)$. Табу керек: $\vec{a}\vec{в}$.

Шешуі: $\vec{a}\cdot\vec{в} = 2\cdot3+3\cdot1+1\cdot0 = 9$

Мысал 11 $\vec{a}$ және $\vec{в}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.

Шешуі: $\cos j = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{9}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+0^2}} = \frac{9}{\sqrt{140}}$

Мысал 12 $\vec{в}$ вектордың $\vec{a}$ векторға проекциясын табу керек.

Шешуі: $\vec{в}$ вектордың $\vec{a}$ векторға проекциясы $пр_{\vec{a}}\vec{в} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|} = \frac{9}{\sqrt{14}}$. формуласы арқылы табылады. Егер $\vec{a} \perp \vec{в}$, онда олардың арасындағы бұрыш $j = 90^0, \cos j = 0$. Онда $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, яғни $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - екі вектордың перпендикуляр болу шарты.

Мысал 13 m-нің қандай мәнінде $\vec{a} = (2,3,m)$ және $\vec{b} = (3,4,2)$ векторлары перпендикуляр болады?

Шешуі: $2\cdot 3 + 3\cdot 4 + m\cdot 2 = 0, \quad 2m = -18, \ m = -9$.

Мысал 14 Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = (1,2,3), \vec{в} = (2,-1,1)$ векторларының векторлық көбейтіндісін және оның модулін табу керек.

Шешуі: $\vec{a}\times\vec{в} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} = (5,5,-5)$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{75}$$

Мысал 15 Найти координаты орта вектора $\vec{a} = (2,1,-2)$ вектордың ортының координаталарын табу керек.

Шешуі: $\vec{e}_{\vec{a}} = \left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}, \ \frac{a_y}{|\overline{a}|}, \ \frac{a_z}{|\overline{a}|}\right)$; $\qquad |\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \left(\frac{2}{3}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{-2}{3}\right)$$

Мысал 16 «m»-нің қандай мәнінде $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болады, егер $\vec{a} = (m,1,2), \vec{b} = (3,0,1), \vec{c} = (1,-1,1)$.

Шешуі $\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $0 + 1 - 6 - 0 + m - 3 = 0, m = 8$

Мысал 17 $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ векторлары базис құра ма?

Шешуі егер $\vec{a}\cdot\vec{в}\cdot\vec{c} \neq 0$, онда олар базис құрады.

Тақырып 4 Өрістердегі көпмүшеліктер, топтар, сақиналар және өрістер

Жоспар:

Тақырып 5 Сызықты кеңістіктер, евклид және унитарлы кеңістіктер.

Жоспар:

1 Арифметикалық векторлық кеністік.
2 Векторлар жүйесінің сызықты тәуелсіздігі және сызықты тәуелділігі.
3 Эквивалентті векторлар жүйесі .
4 Базис және ақырлы векторлар жүйесінің рангі.
5 Коши-Буняковский теңсіздігі.
6 Евклид кеңістігіндегі базис және векторды базис арқылы жіктеу.
7 Ортогональ базис.

1. λ-ның қандай мәндерінде теңдеулер жүйесі үйлесімді болатынын анықта, шешімін тап.

1) $\begin{cases} 2x_1 \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 \quad x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$

2. Сызықты формалар арасындағы сызықты тәуелдікті анықта:

1) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4, \\ y_2 = 3x_1 \quad x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4, \\ y_2 = 3x_1 \quad x_2 + 2x_3 + 4x_4, \\ y_3 = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4. \end{cases}$

3. Векторлық кеңістікте берілген векторларға керілген ішкеңістіктің базисін және өлшемділігін тап:

1) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;1;3;1\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{1;2;0;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{-1;1;-3;0\} \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;0;1;3;-1\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{1;1;0;-1;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{0;-2;1;5;-3\} \\ \overrightarrow{a_4} = \{1;-3;2;9;-5\} \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} \overrightarrow{a_1} = \{2;1;3;-1;\} \\ \overrightarrow{a_2} = \{-1;1;-3;1\} \\ \overrightarrow{a_3} = \{4;5;3;-1;\} \\ \overrightarrow{a_4} = \{1;5;-3;1;\} \end{matrix}$.

4. $\overrightarrow{e_1} = \{1;0;0;0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0;1;0;0\}, \overrightarrow{e_3} = \{0;0;1;0\}, \overrightarrow{e_4} = \{0;0;0;1\}$ базисін $\overrightarrow{e_1'} = \{1;1;0;0\}, \overrightarrow{e_2'} = \{0;1;0;0\}, \overrightarrow{e_3'} = \{1;0;0;1\}, \overrightarrow{e_4} = \{1;1;1;1\}$ базисіна түрлендіретін формуланы тап.

5. e_1, e_2, e_3, e_4 базисінде $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$ теңдеуі арқылы «бет» берілген. Осы «беттің» теңдеуін $e_1' = \{1;1;1;1\}, e_2' = \{1;1;-1;-1\}, e_3' = \{1;-1;1;-1\}, e_4' = \{1;-1;-1;1\}$ базисінде жаз

6. $\cos x$-тің дәрежелері бойынша құрылған n дәрежелі көпмүшеліктер кеңістігінің $1, \cos x, \cos^2 x, ..., \cos^n x$ базисінен $1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx$ базисіне көшу формуласын тап.

Тақырып 6 Сызықты кеңістіктегі сызықты оператор
Жоспар:

Тақырып 7. Жазықтықтағы түзу. Кеңістіктегі жазықтық пен түзу
Жоспар:
1.Жазықтықтағы түзу
2.Кеңістіктегі жазықтық
3.Кеңістіктегі түзу

1. $M_0(2,1, \ 1)$ нүктесі арқылы өтетін нормаль векторы $\vec{n} = \{1,-2,3\}$ болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

2. Координат басы арқылы өтетін нормаль векторы $\vec{n} = \{5,0,-3\}$ болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

3. Координат басынан жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны $P(2,-1,-1)$ нүктесінде болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

4. $M_1(3,-1,2)$ және $M_2(4, \ 2, \ 1)$ нүктелері берілген. M_1 нүктесі арқылы өтіп, $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

5. $\overrightarrow{a_1} = \{3,1,-1\}$және $\overrightarrow{a_1} = \{1,-2,1\}$ векторларына параллель және $M_0(3,4,-5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

6. $M_2(4,-1,-1)$және $M_3(2,0,2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

7. $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ жазықтығының нормаль векторын тап.

8. $\mathbf{l}$ мен m параметрлерінің қандай мәндерінде $2\mathbf{x} + \mathbf{ly} + 3\mathbf{z} - 5 = 0$ және $mx - 6y - 6z + 2 = 0$ жазықтықтары параллель болады.

9. $\mathbf{l}$ параметірінің қандай мәнінде $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + \mathbf{lz} - 3 = 0$ және $x + 3y + 2z + 5 = 0$ жазықтықтары өзара перпендикуляр болады.

10. $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ және $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ жазықтықтары арасындағы екі жақты бұрыштарды тап.

11. $5x - 3y + 2z - 3 = 0$ жазықтығына параллель болып, координат басынан өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

12. $2x - 3y + z + 5 = 0$ жазықтығына параллель болып, $M(3,-2,-7)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

13. $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ жазықтықтары бір нүктеде қиылысатынын көрсетіп, осы қиылысу нүктесінің координаттарын тап.

14. Координат басы арқылы өтіп, $2x - y + 3z - 1 = 0$ және $x + 2y + z = 0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

15. $M(2,-1,1)$ нүктесі арқылы өтіп, $2x - z + 1 = 0$ және $y = 0$ жазықтықтарына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жаз.

16. 1) $A(2,-3,3)$ нүктесі арқылы өтіп, Oxy жазықтығына параллель болатын; 2) $B(1,-2,4)$ нүктесі арқылы өтіп, Oxz жазықтығына параллель болатын; 3) $C(-5,2,-1)$ нүктесі арқылы өтіп, Oyz жазықтығына параллель болатын жазықтықтардың теңдеулерін жаз.

17. 1) Ox өсі мен $A(4,-1,2)$ нүктесі арқылы өтетін;2)Oy өсі мен $B(1,4,-3)$ нүктесі арқылы өтетін; 3) Oz өсі мен $C(3,-4,-7)$ нүктесі арқылы өтетін, жазықтықтардың теңдеулерін жаз.

18. 1) $A_1(7,2,-3)$және $A_2(5,6,-4)$ нүктелері арқылы өтіп, Ox өсіне параллель болатын;2) $B_1(2,-1,1)$және $B_2(3,1,2)$ нүктелері арқылы өтіп, Oy өсіне параллель болатын;3) $C_1(3,-2,5)$және $C_2(2,3,1)$ нүктелері арқылы өтіп, Oz өсіне параллель болатын жазықтықтардың теңдеулерін жаз.

19. $x + 2y - 3z - 6 = 0$ жазықтықтың координат өстерімен қиылысу нүктелерін тап.

20. $2x - 3y - 4z - 24 = 0$ жазықтығының жалпы теңдеуін «кесіндідегі» түріне келтір.

21. Берілген жазықтықтардың жалпы теңдеуін нормаль түріне келтіріңіздер:

1) $2x - 2y + z - 18 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$;

3) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$; 4) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$;

22. Берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координат өстерімен жасайтын бұрыштарын және бағыттауышы косинустарын тауып, координат басынан осы жазықтықтарға дейінгі қашықтықтарын табыңыздар:

1) $x+\sqrt{2}y+z-10=0$; 2) $x-y-\sqrt{2}z+16=0$;

3) $x+z-16=0$; 4) $y-z+2=0$;

23. Берілген нүктенің берілген жазықтықтан ауытқуы d мен қашықтығы $\mathbf{d}$-ны табыңыздар:

1) $A_1(-2,-4,3)$, $2x-y+2z+3=0$;

2) $A_2(2,-1,-1)$, $16x-12y+15z-4=0$;

3) $A_3(1,2,-3)$, $5x-3y+z+4=0$;

4) $A_4(3,-6,7)$, $4x-3z-1=0$.

24. Төменде берілген жазықтықтарға қатысты $A(2,-1,1)$ нүктесі мен координат басының қалай орналасатынын анықтаңыздар:

1) $5x-3y+z-18=0$; 2) $2x+7y+3z+1=0$;

3) $x+5y+12z-1=0$; 4) $2x-y+z+11=0$;

25. $x+2y-3z-3=0$ және $x+2y-3z-7=0$ жазықтықтарынан бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнын анықтап, теңдеуін жаз.

26. $A(-2;1;3)$ нүктесі арқылы өтіп: 1) $\vec{a}=\{1;3;2\}$ векторына; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{-1}$ түзуіне; 3) Ox өсіне; 4) Oy өсіне; 5) Oz өсіне параллель болатын түзудің канондық теңдеуін жаз.

27. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің канондық және параметрлік теңдеулерін жаз: 1) $A(2;-1;0)$, $B(3;2;1)$;2) $C(-1;1;2)$, $D(2;1;1)$; 3) $N(-1;0;2)$, $P(1;1;2)$; 4) $K(3;1;1)$, $L(1;1;0)$.

28. $A(3;2;-1)$ нүктесі арқылы өтіп $\begin{cases} x=3-2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$ түзуіне параллель болатын түзудің канондық және параметрлік теңдеулерін жаз:

29. $A(-6;6;-5)$ және $B(12;-6;1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің координат жазықтықтарымен қиылысатын нүктелерінің координаттарын тап.

30. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$ түзудінің канондық теңдеуін жаз.

31. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ және $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ түзулерінің параллель болатынын көрсет.

32. $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-26 \\ z=-6t+1 \end{cases}$ және $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0 \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ түзулерінің перпендикуляр болатынын көрсет.

33. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ және $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$ түзулерінің арасындағы сүйір бұрышты тап.

34. $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = 0 \\ z = -t + 3 \end{cases}$ және $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0 \\ z = t - 3 \end{cases}$ түзулерінің арасындағы доғал бұрышты тап.

35. $\begin{cases} x - y + 4z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} x - y - 6z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$ түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын тап.

36. $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1 \\ z = 4t - 5 \end{cases}$ түзуінің $4x - 3y - 6z - 5 = 0$ жазықтықтығына параллель болатынын көрсет.

37. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ түзуінің $4x - 3y + 7z - 7 = 0$ жазықтығында жататынын дәлелде.

38. $6x - 3y - 5z + 2 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болып $A(-1;2;-3)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жаз.

39. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$ түзуіне перпендикуляр болып $M_0(1;-1;-1)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жаз.

40. m параметірінің қандай мәнінде $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ түзуі $x - 3y + 6z + 7 = 0$ жазықтығына параллель болады?

41. C коэффициентінің қандай мәнінде $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ түзуі $2x - y + Cz - 2 = 0$ жазықтығына параллель болады?

42. A мен B коэффициентерінің қандай мәндерінде $Ax + By + 3z - 5 = 0$ жазықтығы $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ түзуіне перпендикуляр болады?

43. lмен C-ның қандай мәндерінде $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ түзуі $3x - 2y + Cz + 1 = 0$ жазықтығына перпендикуляр болады.

44. $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ жазықтығының координат жазықтарымен қиылысу сызығының теңдеулерін тап.

45. Түзу $3x - y - 7z + 9 = 0$ жазықтығы мен Ox өсі және $E(3;2;-5)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың қиылысуы ретінде берілген. Осы түзуінің канондық теңдеін тап.

Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 18 Түзулердің бұрыштық коэффициентін табу керек: y=3x+5;4y+2x-1=0 , k=3; y=-2\4x+1\4, осыдан k=-2\4=-1\2

Мысал 19 Берілген $A_1=(2;-3;1)$ және $A_3=(-1;-4;2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Шешуі Кеңістіктегі екі $M_0(x_0,y_0,z_0)$ және $M_1(x_1,y_1,z_1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Осы формула көмегімен іздеп отырған түзудің теңдеуін жазамыз:

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y+3}{-4+3}=\frac{z-1}{2-1},\qquad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

Бұл түзу $M(2;-3;1)$ нүктесі арқылы және $\vec{S}\{-3;-1;1\}$ векторына параллель өтеді.

Мысал 20 Берілген $A_1=(2;-3;1)$, $A_2=(-1;-4;2)$ және $A_3=(4;-1;2)$ нүктелері арқылы өтетін a_1 жазықтығы мен A_1,A_2 және $A_4=(3;-4;2)$ нүктелері арқылы өтетін a_2 жазықтығы арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі Берілген үш $M_0(x_0,y_0,z_0),M_1(x_1,y_1,z_1)$ және $M_2(x_2,y_2,z_2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуінің түрі:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \quad (*)$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш шамасы олардың нормаль векторлары $\vec{N}_1=A_1\vec{i}+\vec{B}_1\vec{j}+\vec{C}_1\vec{k}$ және $\vec{N}_2=A_2\vec{i}+\vec{B}_2\vec{j}+\vec{C}_2\vec{k}$ арасындағы бұрыштың косинусы арқылы анықталады:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} \quad (**)$$

Әрі қарай (*) формуланы пайдаланып α_1 және α_2 жазықтықтарының теңдеулерін жазамыз:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 4-2 & -1+3 & 2-1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$-3(x-2)+5(y+3)-4(z-1)=0,$$

$$3x-5y+4z-25=0 \quad (a_1 \text{ - теңдеуі})$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & -4+3 & 2-1 \\ 3-2 & -4+3 & 2-1 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,\qquad 4(y+3)+4(z-1)=0,$$

$y+z+2=0$ (a_2 - теңдеуі).

Бұл жазықтықтардың нормальдық векторлары $\overrightarrow{N_1} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{N_2} = \vec{j} + \vec{k}$. Енді (**) формула бойынша a_1 мен a_2 арасындағы бұрышты анықтаймыз:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{3\cdot 0 - 5\cdot 1 + 4\cdot 1}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{-1}{10}$$

Осыдан $\varphi = \pi - \arccos\frac{1}{10} = 1{,}67$ рад.

Тақырып 8. Екінші ретті сызықтар мен беттердің жалпы теориясы

Жоспар:

1.Екінші ретті қисық сызықтар

2.Екінші ретті беттер

1. Берілген белгілері арқылы шеңбердің параметірлерін тауып, теңдеуін жаз:

1) центрі координат басында, радиусы R=3;

2) центрі $C(2;-3)$ нүктесінде, радиусы R=7;

3) шеңбер координат басы арқылы өтелуі және центрі $C(6;-8)$ нүктесінде;

4) шеңбер $A(2;6)$ нүктесі арқылы өтеді, центрі $C(-1;2)$ нүктесінде;

5) диаметірінің үштері $A(3;2)$ мен $B(-1;6)$ нүктелерінде орналасқан;

6) $3x - 4y + 20 = 0$ түзуіне жанасытын шеңбердің центрі координат басында орналасқан;

7) $5x - 12y + 20 = 0$ түзуіне жанасатын шеңбердің центрі $C(1;-1)$ нүктесінде орналасқан;

8) центрі $3x - y - 2 = 0$ түзуінің бойында жатқан шеңбер $A(3;1)$ мен $B(-1;3)$ нүктелері арқылы өтеді;

9) шеңбер $A(1;1)$ мен $B(1;-1)$ және $C(2;0)$ нүктелері арқылы өтеді;

10) центрі $C(3;-1)$ нүктесінде жатқан шеңберді қиып өтетін $2x - 5y + 18 = 0$ түзуінің бойындағы осы шеңбердің хордасы 6-ға тең;

11) центрі $2x + y = 0$ түзуінің бойында жатқан шеңбер $4x - 3y + 10 = 0$ және $4x - 3y - 30 = 0$ түзулерімен жанасады;

12) шеңбер $4x - 3y - 10 = 0$, $3x - 4y - 5 = 0$ және $3x - 4y - 15 = 0$ түзулерімен жанасады.

2. Теңдеулері арқылы берілген шеңбердің центрін және радиусын тап:

1) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + x = 0$; 4) $x^2 + y^2 + y = 0$.

3. Фокустары абсцисса өсінде және координат бойына қатысты симметриялы орналасқан эллипстің берілген белгілері бойынша жарты өстерін тауып, канондық теңдеуін жаз:

1) жарты өстері 5-ке және 2-ке тең;

2) үлкен жарты өсі 5-ке, фокустары арасындағы қашықтық $2c = 8$;

3) фокустары арасындағы қашықтық $2c = 10$, кіші жарты өсі $b = 12$;

4) фокустары арасындағы қашықтық $2c = 6$, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) үлкен өсі 20-ға тең, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

6) кіші өсі 10-ға тең, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

7) директрисалары арасындағы қашықтық 5-ке және фокустары арасындағы қашықтық $2c = 4$;

8) үлкен өсі 8-ге, директрисалары арасындағы қашықтық 16-ға тең;

9) кіші өсі 6-ға, директрисалары арасындағы қашықтық 13-ке тең;

10) директрисалары арасындағы қашықтық 32-ге, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{1}{2}$;

4. Фокустары абсцисса өсінде және координат басына қатысты симметриялы орналасқан гиперболаның берілген белгілері бойынша нақты және жорамал жарты өстерін тауып, канондық теңдеуін жаз:

1) нақты өсі $2a = 10$, жорамал өсі $2b = 8$;

2) фокустары арасындағы қашықтық $2c = 10$, жорамал өсі $2b = 8$;

3) фокустары арасындағы қашықтық, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{4}$;

4) нақты өсі $2a = 16$, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) асимптоталарының теңдеулері $y = \pm\frac{3}{4}x$, фокустары арасындағы қашықтық $2c = 20$;

6) директрисалары арасындағы қашықтық $22\frac{2}{13}$, фокустары арасындағы қашақтық $2c = 26$;

7) директрисалары арасындағы қашықтық $\frac{32}{5}$, жорамал өсі $2b = 6$;

8) директрисалары арасындағы қашықтық $\frac{8}{3}$, эксцентриситеті $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) асимптоталарының теңдеулері $y = \pm\frac{3}{4}x$, директрисалары арасындағы қашықтық

5. Төбесі координат басында жататын параболаның берілген белгілері бойынша теңдеуін анықта:

1) параметірі $p = 3$-ке, парабола оң жарты жазықтықта Ох өсіне қатысты симметриялы орналасқан;

2) параметірі $p = 0{,}5$-ке, парабола сол жақ жарты жазықтықта Ох өсіне симметриялы орналасқан;

3) параметірі $p = \frac{1}{4}$-ке, парабола жоғарғы жарты жазықтықта Оу өсіне симметриялы орналасқан***;***

4) параметрі $p = 3$-ке, парабола төменгі жарты жазықтықта Оу өсіне симметриялы орналасқан;

6. Төмендегі теңдеулер қандай сызықты анықтайтынын көрсетіп, графигін сыз:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = +\sqrt{-x}$; 3) $y = -3\sqrt{-2x}$; 4) $x = -5\sqrt{-y}$;

5) $x = \sqrt{3y}$; 6) $x = 4\sqrt{-y}$.

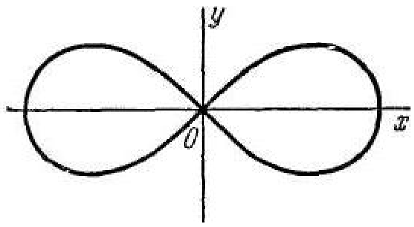
Тапсырманы орындау бойынша әдістемелік нұсқау

Мысал 21 Лемниската (Кассини овалының дербес Бернулли түрі). Мұндағы $F_1(-a;0),\ F_2(a;0)$, $|F_1M|\cdot|F_2M| = a^2$, яғни

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2$$

Осыдан

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$ - лемниската теңдеуі. Егер полярляқ координаталарға көшсек, яғни $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$, $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ - лемнискатаның полярлық теңдеуі.



Сурет 8 Бернулли лемнискатасы

Мысал 22 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=0$ эллипстің фокустарын табу керек.

Шешуі $c^2=a^2-в^2=9-4=5$, $c=\pm\sqrt{5}$, $F_1(\sqrt{5};0);F(-\sqrt{5};0)$

Мысал 23 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=0$ гиперболаның эксцентриситетін табу керек.

Шешуі $c^2=a^2+в^2=9+4=13,\quad e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}.$

Мысал 24 $x^2-2x+4y+y^2-11=0$ шеңбердің центрі мен радиусын табу керек.

Шешуі: $(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4-11=0$, $(x-1)^2+(y+2)^2=16$, $C(1;-2)$ - центр, $R=4$ - радиус.

Тақырып 8. Арифметикалық n-өлшемді векторлық кеңістік

8. Өздік жұмыс тапсырмалары

1 тақырып. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі. Анықтауыштар. Матрицалар теориясы

Ұсынылатын әдебиет: [3], 4-38 б.

2 тақырып. Векторлық алгебра элементтері

Ұсынылатын әдебиет: [3], 43-65 б.

3 тақырып. Түзулердің өзара орналасуы. Түзудің нормаль теңдеуі.

Екі жазықтықтың өзара орналасуы. Жазықтықтың нормаль теңдеуі. Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуы.

Ұсыналатын әдебиет: [3], 67-80 б.

4 тақырып. Екінші ретті қисықтар және беттер

Ұсынылатын әдебиет: [3], 81-93 б.

9. СОӨЖ кеңестер графигі (СОӨЖ СӨЖ-дің 25% құрайды)

№	Сабақтар түрлері	дүйсенбі	сейсенбі	сәрсенбі	бейсенбі	жұма	сенбі
1	Дәріс сабақтары бойынша кеңес	14.45 15.35					

2	Тәжірибелік сабақтар бойынша кеңес		14.45 15.35				
3	СӨЖ бойынша кеңес				14.45 15.35	14.45 15.35	

10. Студенттердің білімін тексеру кестесі

Пән бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру графигі

№	Жұмыс түрлері	Тақырып	Әдебиет	Орындау уақыты	Бақылау түрі	Тапсыру мерзімі
1	2	3	4	5	6	7
1	Жазбаша жұмыс	Комплекс сандар. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері		Екі апта		3-ші апта
2	Жазбаша жұмыс	Векторлық алгебра		Бір апта		5-шы апта
3	Реферат	Өрістердегі көпмүшеліктер, топтар, сақиналар және өрістер		Екі апта		7-ші апта
4	Межелік бақылау				тест	8-ші апта
5	Реферат	Сызықты кеңістіктер, евклид және унитарлы кеңістіктер.		Бір апта		10-ші апта
6	Жазбаша жұмыс	Сызықты кеңістіктегі сызықты оператор		Бір апта		11-ші апта
7	Жазбаша жұмыс	Жазықтықтағы түзу. Кеңістіктегі жазықтық пен түзу		Екі апта		13-ші апта
8	Реферат	Екінші ретті сызықтар мен беттердің жалпы теориясы		Екі апта		14-ші апта
9	Межелік бақылау				тест	15-ші апта

11. Студенттердің білімін бағалау критерийлері

Пән бойынша емтихан тест түрінде өткізіледі. Емтиханға жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын орындаған студенттер жіберіледі.

Әр тапсырма 0-100 баллмен бағаланады.

Жіберу рейтингі ағымдағы сабақтардағы (дәрістерге қатысу, үй тапсырмалары, СӨЖ бойынша тапсырмалар, тәжірибе тапсырмалары, межелік бақылау) барлық орындалған тапсырмалардың арифметикалық орташасынан қорытылады.

Пән бойынша қорытынды бақылауға (ҚБ) жұмыс бағдарламасының барлық талаптарын (жұмыстарды және СӨЖ бойынша тапсырмаларды орындау және тапсыру) орындаған және кіру рұқсатының рейтингі 50 баллдан кем емес студенттер жіберіледі.

Студенттің әр пән бойынша (пәннің қорытынды бақылау түрі мемлекеттік емтихан болса да) оқу жетістіктерінің деңгейі қорытынды бағамен (Қ) анықталады. Қорытынды баға ЖР және ҚБ (емтихан, дифференциалды сынақ немесе курстық жұмыс (жоба))салмақтық үлестер негізінде есептеледі (СҮжр және СҮқб).

$$Қ = ЖР*0,6 + ҚБ*0,4$$

Пән бойынша қорытынды баға жіберу рейтингі де, емтихан бағасы да оң бағаланған жағдайда ғана есептеледі. Дәлелсіз себеппен қорытынды бақылауға келмеген жағдайда «қанағаттаннарлықсыз» деген бағаға теңестіріледі.

Қорытынды бағаның есептелуі дұрыс болу үшін межелік бақылау (рейтинг) және қорытынды емтихан 0 ден 100%-ға дейін пайызбен бағаланады.

Межелік бақылау бағасы ағымдағы және межелік бақылаудың бағаларының қосындысы болады.

Бақылаудың барлық түрінде де оқудағы жетістіктер балды-рейтингті жүйесі бойынша бағаланады:

Әріп жүйесі бойынша баға	Балдың цифрлық баламасы	Пайыздық мазмұны	Дәстүрлі жүйедегі баға
A	4,0	95-100	Өте жақсы
A-	3,67	90-94	
B+	3,33	85-89	Жақсы
B	3,0	80-84	
B-	2,67	75-79	
C+	2,33	70-74	Қанағаттанарлық
C	2,0	65-69	
C-	1,67	60-64	
D+	1,33	55-59	
D	1,0	50-54	
F	0	0-49	Қанағаттанарлықсыз

12. Оқытушының талаптары, курс саясаты

Студенттер міндетті түрде сабақтарға қатысу керек. Сабақты босатқан жағдайда деканаттың орнатқан тәртібі бойынша босатқан сабағын тапсырады. Сабаққа екі рет кешігіп келу бір сабақты босатумен теңеледі. Екі сабақтан көп босатқан жағдайда оқытушы студентті сабаққа кіргізбеуге құқылы. Берілген курстың студенттерінің контингенті болмайтын бөгде адамдардың дәрісте отыруына тыйым салынады.

Тапсырмаларды көрсетілген мерзімде тапсыру қажет. Барлық тапсырмаларды тапсырудың соңғы мерзімі – емтихан сессиясының басталуына 3 күн қалғанға дейін.

Барлық тапсырмаларды тапсырмаған студенттер емтиханға жіберілмейді.

Студенттер әр оқу сабағы бойынша тақырыпты қайталауға және өткен тапсырмаларды орындап тапсыруға міндетті. Оқу материалдарын меңгеру деңгейі тест немесе жазбаша жұмыстар арқылы тексеріледі. Студенттерді тестілеу алдын ала ескертусіз өткізілуі мүмкін.

Студенттің оқытушымен өздік жұмысын (СОӨЖ) орындау барысында келесі төрт негізгі функцияларды ескеру керек:

Бірінші – оқу пәні бойынша сабақтар барысында оқытушы студентке берген ақпараттың белсенді қабылдануын болжамдайды.

Екінші – студенттер өздігінен оқытушының нұсқауларын негізге алып, оқу-әдістемелік құралдарды, әдебиеттерді меңгеруді, үй тапсырмаларын, бақылау және курстық жұмыстарды орындауды болжамдайды. Осы кезеңде студенттерден жұмыс әдістерін білуді, өздік ұйымдастырушылықты және тәртіпті талап етеді.

Үшінші – студенттің өзінің қиындық туғыздыратын жағдайларын талдау және жүйелеу, оқу материалын түсіну және меңгеру кезіндегі қиыншылықтардың себептерін анықтау, басқа оқу амалдарын орындау. Студенттер шешілмейтін қиындықтарын оқытушы үшін сұрақтар жүйесіне аударады (реттейді, құрастырады), сол сұрақтарға өз жауаптарын қосады.

Студенттердің төртінші функциясы оқытушыдан сәйкес түсініктеме, кеңес алудан тұрады.

13. Әдебиеттер тізімі

Негізгі:

1. Нұрбеков Б.Ж. Алгебра және геометрия: оқу құралы. – Павлодар: Кереку, 2008. – 170б
2. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулық].- Өңделіп, толықтырылған 3-ші басылымы.-Алматы:Қазақ университеті.-2006.-561 б.
3. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика:оқу құралы.-Алматы.-2004.-439 б.
4. Өсенбаева Қ. Жоғары математика курсы:оқу құралы.-Алматы:Қарасай.-2007.-328 б.
5. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы:[жоғары оқу орындарының бейматематика манадықтарының студ. арналған оқу құралы].- Алматы:Дәуір.-2008.-389 б.
6. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулық]. .- Алматы.-2007.-408 б.

Қосымша

7. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-2:оқулық.-Алматы:Бастау.-2008.-466 б.
8. Мұхтаров М.М. Математика:тәжірибелік сабақтарды өткізуге арналған әдістемелік нұсқаулар.-Павлодар:С. Торайғыров атындағы ПМУ.-2007.-135 б.