Әдістемелік нұсқаулардың
титулдық парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.3/40

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

Математикалық анализ пәні бойынша 5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттеріне арналған

ПӘНДІ ОҚЫТУДАҒЫ ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Павлодар

Әдістемелік нұсқауларды бекіту парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.3/41

БЕКІТЕМІН
ОІ жөніндегі проректор
_________ Н.Э.Пфейфер
20__ж «___»_________

Құрастырушы: аға оқытушы_________________М.Қ.Құдайберген

Математика кафедрасы

Математикалық анализ пәні бойынша
5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттеріне арналған

ПӘНДІ ОҚЫТУДАҒЫ ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Кафедра отырысында ұсынылды
20__ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

Кафедра меңгерушісі___________ М.Е.Исин 20__ ж. «___»____________

Физика,математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесінде мақұлданды
20___ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

ОӘК төрағасы _________________ А.Б.Искакова 20__ ж. «___»___________

МАҚҰЛДАНДЫ:
ЖжӘҚБ бастығы _______________А.А. Варакута 20__ ж. «___»___________

Университеттің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданды
20__ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

Пәнді оқытуға арналған әдістемелік нұсқаулар

1 Тақырып Ықтималдықтар теориясының негізгі түсініктері

Комбинаторика элементтері.

Элементар оқиғалар кеңістігі. Оқиға түрлері. Оқиғалар алгебрасы. Ықтималдықтың классикалық анықтамасы, статистикалық ықтималдық, геометриялық ықтималдық.

Әдебиет: [6], 17-63б.

2 Тақырып Ықтималдықтады қосу және көбейту теоремалары

Ықтималдық. Ықтималдықтың қасиеттері. Ықтималдықтарды қосу теоремасы.

Шартты ықтималдық. Ықтималдықты көбейту теоремасы. Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы.

Әдебиет: [6], 17-63б.

3 Тақырып Сынақтарды қайталау

Сынақтарды қайталау сүлбесі. Бернулли формуласы. Лапластың локальды және интегралдық теоремасы, Пуассон теоремасы.

Әдебиет: [6], 17-63б.

4 Тақырып Кездейсоқ шамалар, олардың сандық сипаттамалары

Кездейсоқ шамалардың түрлері. Дискретті кездейсоқ шамалардың ықтимадығының үлестірім зандары. Биномальды үлестірім. Пуассон үлестірімі.

Дискретті кездейсоқ шаманың математикалық үміті. Дискретті кездейсоқ шаманың дисперсиясы. Үлестірім функциясы.

Үзіліссіз кездейсоқ шама ықтималдығының үлестірім тығыздығы. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың математикалық үміті және дисперсиясы.

Әдебиет: [6], 64-101б.

5 Тақырып Кездейсоқ шамалар үлестіруінің түрлері

Қалыпты үлестірім. Қалыпты үлестірімінің стандартты түрі. Қалыпты үлестірім заңын қолдану.

Бір қалыпты үлестірім. Көрсеткіш үлестірім. Стьюдент үлестірімі.

Әдебиет: [6], 64-101б.

6 Тақырып Үлкен сандар заңы

Үлкен сандар заңы. Чебышев теңсіздігі. Чебышев теоремасы.

Әдебиет: [6], 101-110б.

7 Тақырып Екі кездейсоқ шама жүйесі

Екі кездейсоқ шама жүйесінің сандық сипаттамалары. Корреляция моменті. Корреляция коэффициенті.

Әдебиет: [6], 155-185б.

8 Тақырып Таңдау тәсілі

Бас жиын және таңдама. Таңдау тәсілі. Таңдаманың статистикалық үлестірімділігі. Полигон және гистограмма.

Әдебиет: [6], 187-196б.

9 Тақырып Үлестіру параметрін статистикалық бағалау

Үлестіру параметрін статистикалық бағалау. Ығыспаған, толымды бағалаулар. Бас жиын, таңдама орташаларын бағалау.

Үлестірім параметрлерін нүктелік бағалау, моменттер, ең үлкен шындыққа ұқсас әдістер.

Сенімділік ықтималдығы. Сенімділік интервалдары.

Қалыпты үлестірімнің математикалық үмітінің, дисперсиясының және баскада белгісіз параметрлерінің сенімді интервалдары. Статистикалық гипотезаларды тексеру.

Таңдаманың регрессиялық теңдеуі. Сызықты және сызықты емес регрессиялардың параметрлерін ең кіші квадраттық тәсілмен анықтау.

Әдебиет: [6], 197-235б.

58 – мысал «Спортлото 45 – тен 6» лотереясының шарты бойынша спорттың 45 түрінен кездейсоқ алынған 6 түрінің ойынға қатысушы 4, 5, не 6 түрін де тапса ақшалай сыйлық алады. Ойынға қатысушының а) барлық 6 цифрды да, б) 4 цифрды табу ықтималдығын есептеу керек.

Шешуі а) A оқиғасы деп спорттың 45 түрінен ұтатын барлық 6 түрін де табуды белгілейік. Бұл жағдайда спортлото карточкаларын толтыру әдістерінің барлық саны: $n = C_{45}^{6}$, өйткені әрбір теру әдістерінің бір – бірінен айырмашылығы тек спорт түрлерінің құрамында ғана. A оқиғасына қолайлы бір ғана әдіс, яғни $m = 1$. Сондықтан,

$$P(A) = \frac{1}{C_{45}^{6}} = \frac{(45-6)!6!}{45!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{40\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45} = 0{,}0000001.$$

б) Енді B оқиғасы деп 45 – тен ұтатын 6 спорт түрінің 4 түрін табуды белгілейік. Оны табу әдістерінің саны C_{6}^{4} - ке тең. Осы яғни 4 ұтқан порт түрлері комбинациясымен ұтпаған 45-6=39 спорт түрінің 2 – ден алынған комбинациясын біріктіру керек. Олардың саны C_{39}^{2}. Сонда көбейту теоремасы бойынша B оқиғасына қолайлы оқиғалардың барлық саны $m = C_{6}^{4}\cdot C_{39}^{2}$. Сонымен,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_{6}^{4}\cdot C_{39}^{2}}{C_{45}^{6}} = 0.00136.$$

59 – мысал Бір атқанда бірінші атқыштың нысанаға тигізу ықтималдығы - 0,8, ал екінші атқыштың тигізу ықтималдығы – 0,9. Олардың екеуі де бір – бір реттен атты. Оқиғалардың толық тобын құрып және мынадай сұрақтарға жауап беру керек:

1) екі атқыштың да нысанаға тигізу ықтималдығын анықтау;

2) екі атқыштың екеуі де нысанаға тигізе алмау ықтималдығы;

3) екеуінің біреуінің ғана тигізе алу ықтималдығы (қайсысы болса да бәрібір);

4) ең болмағанда біреуінің нысанаға тигізу ықтималдығы.

Шешуі Белгілеулер енгізейік: A оқиғасы – бірінші атқыш нысанаға тигізді. Егер $P(A) = p_1 = 0{,}8$ болса, онда $\overline{A}$ оқиғасы – бірінші атқыш нысанаға тигізбейді. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p_1 = q_1 = 0,2.$ B оқиғасы – екінші атқыш нысанаға тигізеді, $P(B) = p_2 = 0,9.$ Онда $\overline{B}$ - екінші атқыш нысанаға тигізбейді, $P(B) = 1 - P(B) = 1 - p_2 = q_2 = 1 - 0,9 = 0,1.$ Сонымен, $p_1 = 0,8, \;\; q_1 = 0,2, \;\; p_2 = 0,9, \;\; q_2 = 0,1.$ Енді оқиғалардың толық тобын құрайық.

1) «Екі атқыш та нысанаға тигізді» оқиғасы:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = p_1 \cdot p_2 = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

2) «Екі атқыш та тигізе алмады» оқиғасы:

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = q_1 \cdot q_2 = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02.$$

3) «Бірінші атқыш тигізді, екіншісі тигізе алмады» оқиғасы:

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = p_1 \cdot q_2 = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08.$$

4) «Бірінші атқыш тигізе алмады, ал екіншісі тигізді» оқиғасы :

$$P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = q_1 \cdot p_2 = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18.$$

P (оқиғалардың толық тобы) $= 0,72 + 0.02 + 0,08 + 0,18 = 1.$

Бірінші және екінші сұрақтарға толық топтың екі оқиғасы жауап береді.

3) Атқыштардың біреуі ғана (не біріншісі, не екіншісі) нысанаға тигізу ықтималдығы.

P (біреуі ғана) $= P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0,08 + 0,18 = 0,26.$

4) Атқыштардың ең болмағанда біреуінің нысанаға тигізу ықтималдығы: P (ең болмағанда біреуі) $= 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,02 = 0.98$ немесе

P (ең болмағанда біреуі) =

$$= P(\overline{A} \cdot B) + P(\overline{A}B) + P(AB) = 0,08 + 0,18 + 0,72 = 0,98$$

немесе

P (ең болмағанда біреуі) =

$$= P(A) + P(B) + P(AB) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98$$

(не біріншісі, не екіншісі, не екеуі де тигізді).

60 – мысал Бір тәжірибеде A оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,4 – ке тең. Осы A оқиғасының 4 тәуелсіз тәжірибеде 3 реттен кем емес рет пайда болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі Мұнда $n = 4,\ k = 3,\ p = 0,4.$ Бернулли формуласы бойынша:

$$p = P_3(3) + P_4(4) = C_4^3(0,4)^3 \cdot (0,6)^1 + C_4^4(0,4)^4(0,6)^0 =$$

$$= 4 \cdot 0,064 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0.0256 \cdot 1 = 0,1792.$$

61 – мысал Ұл баланың туу ықтималдығы 0,515. Жаңа туған 200 баланың ұл бала мен қыз бала саны бірдей болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі Мұнда

$$n = 200,\ k = 100,\ p = 0,515,\ \ q = 1 - p = 0,485,$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,515 \cdot 0,485} \approx 7,068,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 200 \cdot 0,515}{7,068} \approx -0,424,$$

$\varphi(-0,424) = \varphi(0,424) = 0,3647$ (кестеден алынады).

Сонда (105) формула бойынша:

$$P_{200}(100) \approx \frac{0,3647}{7,068} \approx 0,052.$$

62 – мысал Оқиғаның 100 тәуелсіз тәжірибенің әрқайсысындағы пайда болу ықтималдығы тұрақты және 0,8 – ге тең. Осы оқиғаның 75 реттен кем емес және 90 реттен артық емес рет пайда болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі Есептің шарты бойынша $n = 100,\ p = 0,8,\ \ q = 0,2,\ k_1 = 75,\ k_2 = 90.$ Әрі қарай,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Енді (116) формула бойынша есептейміз:

$$P_{100}(75,90) = \Phi(2,5) - \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

63 – мысал Зауыттың шығаратын бөлшектері диаметрінің өлшемі бойынша қалыпты заң бойынша үлестірілген. Оның параметрлері: $m = 5\text{см}$, дисперсиясы $D = 0{,}81.$ Қарамай алынған бөлщектің диаметрі: 1) 4 – тен 7 см-ге дейін; 2) m өлшемінен айырмашылығы 2 см-ден артық емес болу ықтималдығын табу керек.

Шешуі 1) Мұнда $\alpha = 4,\ \beta = 7,\quad \alpha = 5,\ \delta = \sqrt{0{,}81}.$ Берілген аралықтан мән қабылдау ықтималдығының (115) формуласы бойынша мынадай нәтиже аламыз:

$$P(4 < x < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{\sqrt{0{,}81}}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{\sqrt{0{,}81}}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}22) + \Phi(1{,}11) \approx 0{,}4868 + 0{,}3665 \approx 0{,}8533.$$

2) Енді (126) формуланы пайдаланамыз:

$$P(|x-5| < 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{0{,}9}\right) \approx 2\Phi(2{,}22) \approx 0{,}9736.$$

64 – мысал Берілген корреляциялық кесте бойынша Y - тің X - ке қатысты түзу сызықты регрессия теңдеуін табу керек.

Y	X					
	20	25	30	35	40	n_y
10	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	$n =$

Шешуі Шартты варианталарға көшіп кесте құрайық. «Жалған нөл»: $C_1 = 30$ және $C_2 = 36.$

V	U					
	20	25	30	35	40	n_y
-2	4	6	-	-	-	10
-1	-	8	10	-	-	18
0	-	-	32	3	9	44

1	-	-	4	12	6	2 2
2	-	-	-	1	5	6
n_u	4	14	46	16	2 0	$n=$

Енді $\bar{u}$ және $\bar{v}$, $\overline{u^2}$ және $\overline{v^2}$, d_u және d_v есептейміз:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_u u}{n} = \frac{-8-14+0+16+40}{100} = 0,34,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_v v}{n} = \frac{-20-18+0+22+12}{100} = -0,04:$$

$$\overline{u^2} = \frac{\sum n_u u^2}{n} = \frac{4\cdot 4+14\cdot 1+46\cdot 0+16\cdot 1+20\cdot 4}{100} = 1,26;$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum n_v v^2}{n} = \frac{10\cdot 4+18\cdot 1+44\cdot 0+22\cdot 1+6\cdot 4}{100} = 1,04;$$

$$\delta_u = \sqrt{\overline{u^2}-\left(\bar{u}\right)^2} = \sqrt{1,26-(0,34)^2} \approx 1,07;$$

$$\delta_v = \sqrt{\overline{v^2}-\left(\bar{v}\right)^2} = \sqrt{1,04-(-0,04)^2} \approx 1,02.$$

Әрі қарай $\sum n_{uv} uv$ табу үшін 3-ші кесте құрайық. Сол 3-ші кестенің соңғы тік жолының сандарын қосып $\sum vU = \sum n_{nv} nv = 82$ аламыз. Тексеру үшін соңғы жатық жолдағы сандардың қосындысын табамыз: $\sum uV = \sum n_{uv} uv = 82.$

3-ші кестені құруға түсінік. Жиіліктің вариантаға, яғни n_{uv} - ның U - ға көбейтіндісін жиілік жазылатын шаршының жоғарғы оң жақ бұрышына жазамыз. Бір жатық жолдың жоғарғы оң жақ бұрыштарындағы сандарды қосып, ол қосындыны осы жолдың «U тік жолының» шаршысына жазамыз. Әрі қарай v вариантасын U - ға көбейтіп, шыққан көбейтіндіні «vU тік жолының» сәйкес шаршысына жазамыз. «vU тік жолының» барлық сандарын қосып $\sum vU$ қосындысын аламыз. Ол $\sum n_{uv} UV$ қосындысына тең. Бұл кестеде $\sum n_{uv} UV = 82.$ Тексеру үшін осы есептеулерді тік жолдарда жүргізеді: $n_{uv}V$ көбейтіндісін жиілік жазылатын шаршының сол жақ төменгі бұрышына жазады. Бір тік жолдың сол жақ төменгі бұрыштарындағы сандардың қосындысын «V жатық жолына» жазады. Әрбір U вариантасын V - ға көбейтіп, нәтижесін соңғы жатық жолдың шаршыларына қосады. Соңғы жатық жолдағы сандарды қосып $\sum UV$ қосындысын алады. Ол да $\sum n_{uv} UV$ қосындысына тең болу керек.

Корреляция коэффициентін (130) формула бойынша есептейміз:

$$r_b = \frac{\sum n_{uv}uv - n\overline{u}\cdot\overline{v}}{n\delta_u\delta_v} = \frac{82 - 100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02} = 0{,}76$$

Енді h_1 мен h_2, $\overline{x}$ пен $\overline{y}$ - ті, d_x пен d_y - ті есептейміз:

$h_1 = 25 - 20 = 5,\ h_2 = 26 - 16 = 10,\ \overline{x} = \overline{u}h_1 + C_1 = 0{,}34\cdot 5 + 30 = 31{,}70,$

$\overline{y} = \overline{v}h_2 + l_2 = (-0{,}04)\cdot 10 + 36 = 35{,}60, \quad \delta_x = h_1\delta_u = 5\cdot 1{,}07 = 5{,}35,$

$\delta_y = h_2\delta_v = 10\cdot 1{,}02 = 10{,}2.$

Осы мәндерді (129) формулаға қойып регрессия теңдеуін табамыз:

$\overline{y_x} - 35{,}6 = 0{,}76\cdot\frac{10{,}2}{5{,}35}(x - 31{,}7)$ немесе $\overline{y_x} = 1{,}45x - 10{,}36.$

3-ші кесте

	U						
	- 2	-1	0	1	2	$U =$	
2	-8 4 - 8	6 12	-	-	-	14 - 	8
1	-	-8 8 -8	0 10 - 10	-	-	-8	
	-	-	0 32 0	3 0 0	18 9 0	2 1	
	-	-	0 4 4	12 12 12	12 6 6	2 4	4
	-	-	-				

				1 1 2	10 5 10	1 1	2
	- 8	- 20	- 6	14	16		
	1 6	20	0	14	32	$\sum UV = 82$	

Әдебиеттер тізімі

Негізгі:

1. Хамитов М.Х.. «Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика элементтері». Павлодар, 2005ж.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическое сатистика- М. Высшая школа 2002.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Высшая школа, 2002.
4. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике: с контрольным и работами. 2 курс. Айрис Пресс, 2004.

Қосымша:

5. Гусак. А.А. Высшая математика. - Минск, Тетра Системс, 2003, часть 2.
6. Горелова Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. Феникс, 2005.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. УРСС, 2001.
8. Ватутин В.А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. Дрофа, 2003.