Әдістемелік нұсқаулардың
титулдық парағы

Нысан
ПМУ ҰС Н 7.18.3/40

Қазақстан Республикасының білім және ғылым министрлігі

С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті

Математика кафедрасы

Математикалық анализ пәні бойынша 5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттеріне арналған

ПӘНДІ ОҚЫТУДАҒЫ ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Павлодар

Әдістемелік нұсқауларды бекіту парағы

Нысан ПМУ ҰС Н 7.18.3/41

БЕКІТЕМІН
ОІ жөніндегі проректор
__________ Н.Э.Пфейфер
20__ж «___»_________

Құрастырушы: аға оқытушы_________________М.Қ.Құдайберген

Математика кафедрасы

Математикалық анализ пәні бойынша

5В070300- Ақпараттық жүйелер мамандығының студенттеріне арналған

ПӘНДІ ОҚЫТУДАҒЫ ӘДІСТЕМЕЛІК НҰСҚАУЛАР

Кафедра отырысында ұсынылды
20__ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

Кафедра меңгерушісі___________ М.Е.Исин 20__ ж. «___»____________

Физика,математика және ақпараттық технологиялар факультетінің оқу-әдістемелік кеңесінде мақұлданды
20___ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

ОӘК төрағасы _________________ А.Б.Искакова 20__ ж. «___»___________

МАҚҰЛДАНДЫ:
ЖжӘҚБ бастығы ______________А.А. Варакута 20__ ж. «___»___________

Университеттің оқу-әдістемелік кеңесімен мақұлданды
20__ ж. «___»_____________, №____ Хаттама.

Пәнді оқытуға арналған әдістемелік нұскаулар

1 Тақырып Бір айнымалы функцияның дифференциалдық есептеулері

Анализге кіріспе. Жиындар және оларға қолданылатын амалдар. Функция және оның қасиеттері. Функцияның нүктедегі, ақырсыздығы шектері. Сан тізбегі және оның қасиеттері. Тамаша шектер. Үзіліссіздік. Үзіліс нүктелерін классификациялау. Функцияның туындысы. Дифференциалдау ережелері. Дифференциал және оның қолданылуы. Аралықта дифференциалданатын функциялар туралы теоремалар. Жоғары ретті туындылар.

10 − мысал Мына шектерді табу керек.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}2x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{1}{6x-1}}$.

Шешуі а) Шектік мәні x=2-ні бірден қойғанда $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады.Осы анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ және $3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2)$; Ал x аргументі тек қана өзінің шектік мәні 2-ге ұмтылады да оған тең болмайды. Сондықтан $(x-2)$ көбейткіші $x\to 2$ да нөлден өзгеше болады:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(3x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{3x+2}=\frac{1}{8}.$$

б) arctg 2x=u деп белгілейік. Сонда 2x=tgu болады да $x\to 0$ да $u\to 0$. Сондықтан

$$\lim_{x\to 2}\frac{arctg\,2x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{tgu}{2}}=\lim_{u\to 0}\left(2\cdot\frac{u}{\sin u}\cdot\cos u\right)=2\left(\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}\right)\left(\lim_{u\to 0}\cos u\right)=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

Бұл есепті басқаша да шығаруға болады. Екі шексіз шамалардың қатнасының шегін есептегенде оларды эквивалентті шексіз аз шамамен ауыстыруға болады. Егер $x\to 0$ да arctg 2x~2x деп алатын болсақ, онда $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\mathrm{arctg}2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$

в) Егер $x\to\infty$ са $\frac{3x+2}{3x-1}$ бөдшегі 1-ге ұмтылады, яғни 1^∞ түріндегі анықталмағандық шығады. Сондықтан бөлшекті түрлендіріп, мына түрде жазамыз: $\frac{3x+2}{3x-1}=\frac{3x-1+3}{3x-1}=1+\frac{3}{3x-1}$. Енді $\frac{3}{3x-1}=u$ деп белгілейік.Осыдан $x=\frac{1}{u}+\frac{1}{3}$, $2x+1=\frac{2}{u}+\frac{5}{3}$ және $x\to\infty$ да $u\to 0$. Сондықтан

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}=\lim_{u\to 0}(1+u)\right)^{\frac{2}{u}+\frac{5}{3}}=\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{2}\cdot(1+u)^{\frac{5}{3}}=$$

$$\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{4}}\right]^{2}\cdot\sqrt[3]{\lim_{u\to 0}(1+4)^{5}}=e^{2}\sqrt[3]{1}=e^{2}.$$

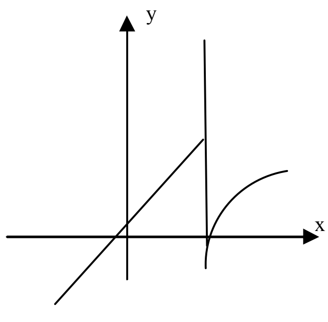
г) Егер $x=1$ мәнін берілген шекке қойсақ, онда 1^{∞} түріндегі анықталмағандық шығады. Сондықтан осы анықталмағандықты ашу үшін $u=x-1$ ауыстыруын пайдаланамыз.

Егер $x\to 1$ болса, онда $u\to 0$. Сонда

$$\lim_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{1}{6(x-1)}}=\lim_{u\to 0}\left[(1-3x)^{-\frac{1}{3u}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}606.$$

11 - мысал Мына функцияны үздіксіздікке зерттеу керек:

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{егер} x\le 1, \\ \ln x, \text{егер} x>1 \end{cases}$$ болса.



Сурет 28

Шешуі $f(x)$ функциясының $a\neq 1$ нүктесінде үздіксіз болатындығын дәлелдейік. Ол үшін $\varepsilon<|a-1|, \varepsilon>0$ аралығын қарастырайық. Сонда a нүктесінің e маңайында x=1 нүктесі жатпайтын болады. Сол ε маңайында $f(x)$ функциясы $a<1$ болса $\varphi(x)=x$ функциясына, ал $a>1$ болса $\varphi(x)=\ln x$ функциясына тең болады. Қарастырылып отырған элементар функциялар a нүктесінде үздіксіз болғандықтан $f(x)$ функциясы кез келген $a\neq 1$ нүктесінде үздіксіз болады. Енді

$f(x)$ функциясын $a=1$ нүктесінде үздіксіздікке зерттейік. Ол үшін біржақты шектерді есептейік: $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x=\lim\limits_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0,$
$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}x=\lim\limits_{x\to 1}x=1.$

Сонымен $f(1+0)\neq f(1-0),$ яғни $a=1$ нүктесі $f(x)$ функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі болады.

12 - мысал Берілген $y=\dfrac{3x}{x+2}$ функциясын үздіксіздікке зерттеу керек.

Шешуі Егер x = -2 болса, онда функция осы нүктеде үзілісті болады. Енді $x\to -2$-дегі біржақты шектерді анықтайық: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}y=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\dfrac{3x}{x+2}=+\infty,$ өйткені бөлшектің бөлімі теріс бола отырып нөлге ұмтылады. Сол сияқты $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}y=\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\dfrac{3x}{x+2}=-\infty,$ Мұнда бөлшектің бөлімі оң бола отырып нөлге ұмтылады.

Сонымен, x = − 2 болғанда берілген функцияның екінші текті үзіліс нүктесі болады.

Мысал $y=\sin^2 x$ функцияның туындысын табу керек.

Шешуі $\sin x=z$ десек, $y=z^2$ болады. Формула бойынша

$$y'=2z\cdot\cos x=2\sin x\cdot\cos x.$$

Параметрлік түрде берілген функцияны алайық, яғни $y=y(x)$ функциясы мына түрде $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ берілсін. Бұл функцияның туындысы $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ формуласы бойынша анықталады.

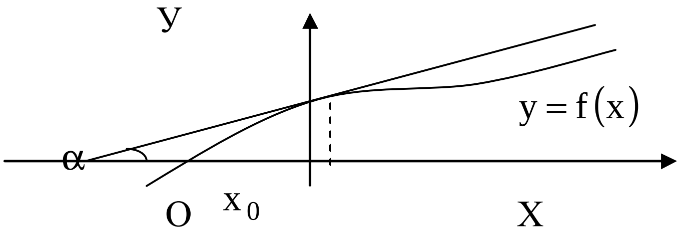
Мысал $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ функцияның туындысын табу керек.

Шешуі $y'_x=\dfrac{\left(a\sin^3 t\right)'_t}{\left(a\cos^3 t\right)'_t}=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-tgt$

Енді төмендегі айқындалмаған функцияның туындысын табайық. $x^2+y^2=b$, $2x+2yy'=0$, осыдан $y'=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y}$ шығады.

3.5 Туындының геометриялық және механикалық мағынасы

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы – функция графигіне оның абсциссасы x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың Ох өсінің оң бағытымен жасаған бұрышының тангенсі.



Сурет 29

$f'(x) = \mathrm{tg}\alpha$. Ал механикалық мағынада функция $y = f(t)$ - ның туындысы функцияның $t = t_0$ мезеттегі өзгеру жылдамдығы. Туындының геометриялық мағнасын көрсететін төмендегі мысалдарды келтірсек.

13 − мысал Берілген $y = x^2 - 6x + 3$ қисығының абсциссасы $x_0 = 2$ болатын нүктесінде жүргізілген жанама мен нормальдың теңдеулерін жазу керек.

Шешуі Жанасу нүктесінің ординатасын табайық: $y_0 = x_0^2 - 6x_0 + 3 = -5.$ Қисыққа жанаманың бұрыштық коэффиценті туындының x_0 нүктесіндегі мәніне тең: $k = y'(x_0) = (x^2 - 6x + 3)' x_0 = (2x - 6)_{x_0=2} = -2.$ Енді $x_{0/} y_{0/}$ және y_0' мәндерін жанаманың теңдеуіне қоямыз:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (28)$$

$$y + 5 = -2(x - 2), \quad 2x + y + 1 = 0 \ \ (\text{жанама})$$

Осы сияқты $x_{0/} y_0$ және y_0' мәндерін нормальдың теңдеуіне қоямыз:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \qquad (29)$$

$$y + 5 = -\frac{1}{-2}(x - 2), x - 2y - 12 = 0 \quad (\text{нормаль})$$

14 − мысал Лопиталь ережесін пайдаланып, мына функциялардың шегін есептеу керек:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{(x^3+4x^2+5x+2)}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(4+x^2)}{x^2}$.

Шешуі 1) Аргументтің шектік мәні x=-1-ді орнына қойсақ $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық шығады. Оны ашу үшін Лопиталь ережесін қолданайық:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \qquad (30)$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{x^3+4x^2+5x+2}=\lim\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^3+4x^2+5x+2\right)'}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{3x^2+8x+5}.$$

Лопиталь ережесін бірінші рет қолданудан анықталмағандық ашылған жоқ. Сондықтан ол ережені тағы да қолданамыз:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{3x^2+8x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)'}{\left(3x^2+8x+5\right)'}=\lim_{x\to -1}\frac{2}{6x+8}=1.$$

2) Анықталмағандық $\frac{\infty}{\infty}$ түрінде екендігіне көз жеткізгеннен кейін Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(4+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln(4+x^2)\right]'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{(4+x^2)\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4+x^2}=0.$$

15 − мысал Мына функцияны зерттеп графигін салу керек: $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Шешуі

1) Функцияның анықталу облысы. $x\neq 1$, x = 1 функцияның үзіліс нүктесі.

2) Функция симметриялы да, периодты да емес.

3) Функцияның монотонды өсу және кему аралықтары, экстремум нүктелері.

Функцияның бірінші туындысын табамыз: $y'=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Бірінші туындыны нөлге теңестіріп экстремум беретін нүктелерін іздейміз: $y'=0, x(x-2)=0, x_1=0, x_2=2.$ Ал $y'\to\infty$ шартынан $y_3=1$ нүктесі алынады. Туындының осы нүктелердің әрқайсысының оң және сол жақтарындағы таңбаларын зерттейміз. Көрнекті бөлу үшін нәтижелерді кестеге толтырайық:

x	$(-\infty,0)$	0	(0;1)	1	(1;2)	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y	$\nearrow$	max 0	$\swarrow$	анықталмаған	$\swarrow$	min 4	$\nearrow$

Сонымен, функцияның максимум нүктесі: x_{max}=0, y_{max}=0, немесе (0;0), ал минимум нүктесі: x_{min} = 2, y_{min} = 4 немесе (2;4). Функция $x=1$ нүктесінде анықталмағандықтан ол нүктеде экстремум жоқ.

4) Функцияның грфигінің ойыс, дөңестігі, иілу нүктелері. Екінші туындыны табайық: $y''=\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]'=\frac{2}{(x-1)^3}$. Екінші туынды ешқандай нүктеде нөлге айналмайды, ал $x=1$ нүктесінде шексіздікке ұмтылады. Сол $x=1$ нүктесі арќылы өткенде екінші туынды таңбасын өзгертеді. Бірақ ол иілу нүктесі болмайды, өйткені ол нүктеде функция анықталмаған.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	-	∞	+
y	$\cap$		$\cup$

5) Асимптоталары. Тік асимптотасы жоғарыда табылды: $x=1$ түзуі. Енді көлбеу асимптоталарын іздейміз:

$$y=kx+b,\quad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$$

(31)

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

Сондықтан көлбеу асимптотаның теңдеуі $y=x+1$ түрінде болады.

6) Функцияның шектік мәндерін зерттейік:

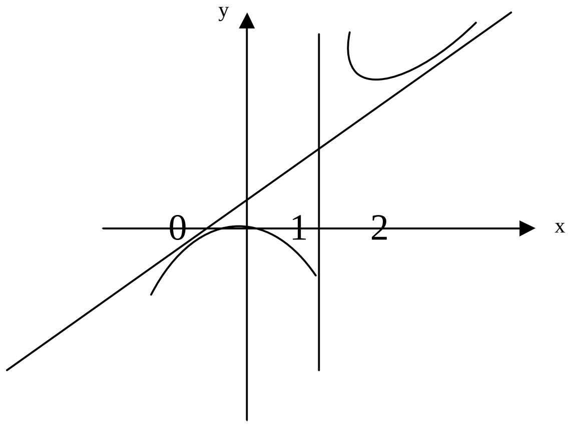
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1\pm0}\frac{x^2}{x-1}=\pm\infty$$

Функцияның графигі координаталар өсіне (0;0) нүктесінде қиып өтеді.

7) Осы нәтижелерді пайдаланып $y=\frac{x^2}{x-1}$ фунйциясының графигін саламыз.



Сурет 30

16 – мысал Параметрлік түрде берілген $y = f(x)$ функциясының туындысын табу керек.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + 4t, \\ y = \frac{1}{5}t^5 - 16t \end{cases}$$

Шешуі Берілген $x(t)$ және $y(t)$ функцияларын t параметрі бойынша дифференциалдаймыз: $x_t'(t) = t^2 + 4,\ y_t'(t) = t^4 - 16$. Сонда

$$y_x' = \frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{t^2 - 16}{t^2 + 4} = t^2 - 4.$$

17 – мысал Берілген $tg47^0$ шамасын жуықтап есептеу керек.
Шешуі Жуықтап шешу формуласын пайдаланамыз:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \qquad (32)$$

$y = tgx$ функциясын қарастырайық. Туындысы $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ - ке тең. Ал $x = 45^0$ деп алсақ $\Delta x = 2^0$ немесе радианға айналдырсақ: $\Delta x = \frac{2\pi}{180} = 0{,}035$ – ке тең болады. Сондықтан, $tg47^0 \approx tg45^0 + \frac{1}{\cos^2 45^0} \cdot 0{,}035 = 1 + 0{,}070 = 1{,}070.$

Әдебиет: [2], 123-216 бет.

2 Тақырып Бір айнымалы функцияның интегралдық есептеулері

Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері. Интегралдау әдістері. Комплекс сандар. Рационал бөлшектерді қарапайым бөлшектерге жіктеу. Рационал, иррационал және тригонометриялық функцияларды интегралдау. Анықталған интеграл және оның қасиеттері. Ньютон Лейбниц формуласы. Анықталған интегралдарды интегралдау әдістері. Анықталған интегралдарды жуықтап есептеу. Анықталған интегралдардың қолданылулары

18 – мысал а) $\int \sqrt[4]{(5x-3)^3}dx$ интегралын табу керек.

Шешуі $\int \sqrt[4]{u^3}du = \int u^{\frac{3}{4}}du = \frac{u^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7}\sqrt[4]{u^7} + C$ болғандықтан (33) формулаларды пайдаланып мынадай нәтиже аламыз:

$$\int \sqrt[4]{(5x-3)^3}dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{7}\sqrt[4]{(5x-3)^7} + C = \frac{4}{35}\sqrt[4]{(5x-3)^7} + C.$$

б) $\int arctgx dx$ интегралын табу керек.

Шешуі Бөліктеп интегралдау әдісін қолданамыз:

$$\int arctgxdx = \left| \begin{array}{ll} u = arctgx, & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ dx = dv, & v = x \end{array} \right| =$$

$$= xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgxdx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = = xarctgx -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ интегралын есептеу керек.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{ll} x=\frac{1}{t}, & \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2}, & \sqrt{1+t^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{t^2\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}} = \int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+t^2\right)}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+t^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+t^2} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

19 – мысал $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)}dx = \left| \begin{array}{ll} tg\frac{x}{2}=t, & \sin x - \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \frac{x}{2} = arctgt, \\ x = 2arctgt, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + 2t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2}\right) + C.$$

20 – мысал $\int \frac{2x^2-5x+8}{\left(x^2+2\right)\left(x+1\right)}dx$ интегралын есептеу керек.

Шешуі Интеграл астындағы дұрыс рационал бөлшекті жай бөлшектерге жіктейміз: $\frac{2x^2-5x+8}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$.

Теңдіктің екі жағын да $(x^2+2)(x+1)$ - ге көбейтіп, алымдарын теңестіріп,белгісіз коэффициенттері A, B және C - ны анықтау үшін тепе – теңдік аламыз:

$$2x^2-5x+8=A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)$$

Теңдіктің екі жағындағы бірдей дәрежелі x - тердің коэффициенттерін салыстырып, сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$x^2: 2=A+B,$$
$$x:-5=B+C,$$
$$x^0: 8=2A+C.$$

Бұл жүйенің шешуі: $A=5,\ B=-3,\ C=-2.$ Осы мәндерді орындарына қойып, интегралды есептейміз:

$$\int\frac{2x^2-5x+8}{(x^2+2)(x+1)}=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3x+2}{x^2+2}\right)dx=5\int\frac{dx}{x+1}-3\int\frac{xdx}{x^2+2}-2\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=5\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln(x^2+2)-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

21 – мысал $\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$ анықталған интегралын есептеу керек.

Шешуі

$$\int_0^4\frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\quad x=t^2,\\ dx=2tdt,\\ x=0,\quad t=0,\\ x=4.\quad t=2\end{array}\right|=\int_0^2\frac{t}{1+2t}\cdot 2tdt=\int_0^2\frac{2t^2}{1+2t}=\int_0^2\left[t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2t+1)}\right]dt=$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\ln|2t+1|\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\ln|4+1|\right)-\frac{1}{4}\ln 1=1+\frac{1}{4}\ln 5.$$

22 – мысал Мына меншіксіз интегралдарды есептеу керек.

1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_1^2\frac{dx}{x-1}$.

Шешуі 1) Бірінші интеграл жоғарғы интегралдау шегі шексіздікке тең меншіксіз интеграл. Оны есептеу үшін (37) анықтаманы пайдаланамыз:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right)=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Сонымен, берілген меншіксіз интеграл жинақталады.

2) Екінші интеграл астындағы функция $f(x)=\dfrac{1}{x-1},\ x=1$ мәнінде шексіздікке айналады. Сондықтан, (38) анықтаманы пайдаланамыз.

$$\int_1^2\frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\ln|x-1|\Big\|_{1+\varepsilon}^{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1-\ln[\varepsilon])=-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\varepsilon|=\infty$$

яғни берілген интеграл жинақталмайды.

Анықталған интегралды төмендегі есептерді шешуде пайдалануға болады.

1) жазық фигураның ауданын есептеу;

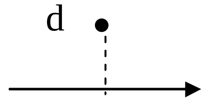
2) қисықтың ұзындығын есептеу;

3) айналу денесінің көлемін есептеу;

4) қисықтың статикалық моменті және ауырлық центрі.

Массасы m -ге тең материалдық нүктенің $\mathbf{l}$ өсіне қарағандағы статикалық моменті деп нүктенің массасы мен оның өске дейінгі ара қашықтығының көбейтіндісін атайды.

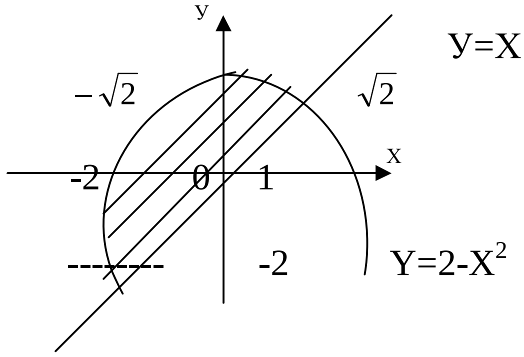
.



$$M_{\mathbf{l}}=m\cdot d$$

Қисықтың координат өстеріне қарағандағы статикалық моменттері: $M_x=\int_0^L y\,dS$, $M_y=\int_0^L x\,dS$ формулаларымен өрнектеледі. Мұндағы $dS=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$, немесе, $dS=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$ доғаның дифференциалы. Жүйенің массасын көшіруге болатындай нүкте сол нүктелер жүйесінің ауырлық центрі деп аталады. Ауырлық центрінің координаттары: $x_c=\dfrac{M_y}{m}$, $y_c=\dfrac{M_x}{m}$ формулаларымен анықталады, мұндағы $m=\int_0^L dS=\int_0^L\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Материалдық доғаның тығыздығы $\delta=1$ деп есептейміз.

23 – мысал Берілген $y = x$ түзуімен және $y = 2 - x^2$ параболасымен шектелген фигураның ауданын табу керек.

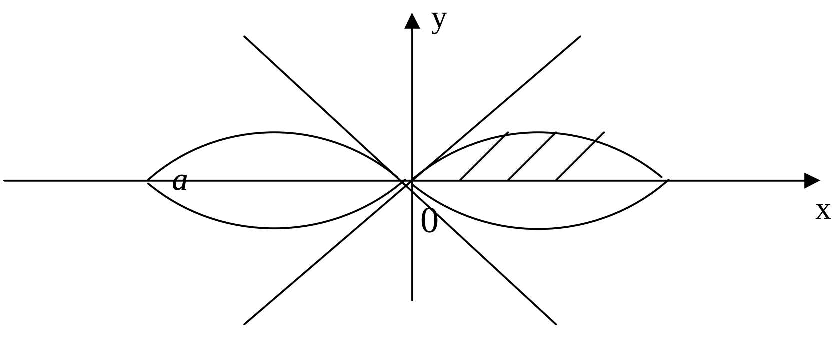


Сурет 35

Шешуі Парабола мен түзудің қиылысу нүктелерінің абсциссасын анықтайық: $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$. Бұл жүйенің шешуі: $x_1 = -2,\ x_2 = 1.$ Ауданды $S = \int_a^b f(x)dx$ формуласы бойынша есептейміз:

$$S = \int_{-2}^{1} \left[\left(2 - x^2\right) - x\right] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

24 – мысал Теңдеуі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската) түрінде берілген қисықпен қоршалған фигуранаң ауданын табу керек.



Сурет 32

Шешуі Қисық полярлық координаталарымен берілгендіктен ауданды:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 (\varphi) d\varphi \qquad (40)$$

формуласымен есептейміз.

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Осыдан $S = a^2$.

25 – мысал Теңдеуі $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ түрінде берілген астроиданың ұзындығын табу керек.

Шешуі Қисық өстер бойынша симметриялы. Сондықтан бірінші ширектегі бөлігін есептесек те жеткілікті. Қисықтың доғасының ұзындығын мына формула бойынша есептейміз:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \qquad (41)$$

Туындыларды есептейміз:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t \cos t.$$

Параметр t 0 – ден $\frac{p}{2}$ - ге дейін өзгереді. Енді формула бойынша мынадай нәтиже аламыз:

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 \cos^2 t} dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a,$$

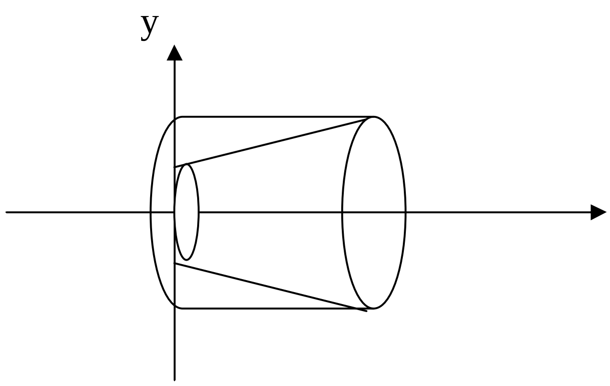
$$l = 6a.$$

26 – мысал Теңдеулері $y_1 = 1 + x^2,\ y_2 = 2,\ x = 0\ (x \geq 0)$ түрінде берілген қисықтармен шектелген фигураның O_x өсін айналуынан шыққан дененің көлемін табу керек.

Шешуі Көлемді (39) формула бойынша есептейміз. Сызықтардың қиылысуы нүктесі: $\begin{cases} y = 1 + x^2 \\ y = 2 \end{cases}$. Осыдан $x = 1 (x > 0)$.

$$V = \pi\int_0^1 \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left[4 - \left(1 + x^2\right)\right]dx = \pi\int_0^1 \left(3 - 2x^2 - x^4\right)dx =$$

$$= \pi\left(3x - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{32\pi}{15.}$$



Сурет 34

Әдебиет: [2], 223-274 бет.

3 Тақырып Дифференциалдық теңдеулер

Көп айнымалы функциялар. Олардың үзіліссіздігі. Дербес туындылар. Күрделі функцияны дифференциалдау. R^2 кеңістігіндегі функциялардың аралас туындыларының теңдігі. Екі айнымалы функцияның экстремумы бар болуынын қажетті шарты. Айқындалмаған функцияның бар болуы мен дифференциалдануы туралы теорема. Айнымалылары бөлінген және бөлінетін дифференциалдық теңдеулер. Коши есебі. Коши есебі шешімінің бар болуы туралы теорема. Біртектес және біртектес емес сызықтық теңдеулер. Реттері төмендетілетін теңдеулер. Коэффициенттері тұрақты біртектес және біртектес емес сызықты теңдеулер. Орнықтылықты теориясының элементтері. Қарапайым дифференциалдық теңдеулердің қолданылулары.

1) Егер берілген D облысының әрбір (x, y) қос мәніне белгілі бір z мәні сәйкес келсе, онда z айнымалысы x және y екі айнымалысының функциясы деп аталады. Белгілеуі: $z = f(x, y)$ немесе $z = z(x, y)$ және т.с.с.

2) Аргумент өсімшелерін Δx және Δy деп белгілейтін болсақ, онда $M(x, y)$ нүктесіне оған жақын $M_0(x + \Delta x, y + \Delta y)$ сәйкес келеді. Екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясының M нүктесіндегі толық өсімшесі деп

$$\Delta z = f(M_0) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

айырымын айтады.

3) Егер Δz өсімшесін

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon, \qquad (42)$$

мұндағы ε - реті жоғары шексіз аз шама, деп өрнектеуге болатын болса, онда z фунциясы M нүктесінде дифференциалданатын функция деп айтады да, оның басты сызықты бөлігі функцияның толық дифференциалы деп аталады.

Ол мына формула бойынша есептеледі:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \qquad (43)$$

мұндағы $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ - дербес туындылар.

4) Функция өсімшесі Δz пен оның толық дифференциалы dz арасында мынадай байланыс бар: $\Delta z = dz + \varepsilon$

Егер реті жоғары шексіз аз ε - шамасын ескермесек, онда жуықтап есептеу формуласын алуға болады:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (44)$$

5) Егер y функциясы $F(x,y)=0$ түріндегі теңдеумен берілсе, онда ол x -тің айқындалмаған (жабық) функциясы деп аталады.Оның туындысы мына формула арқылы есептеледі:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{/}(x,y)}{F_y^{/}(x,y)} \qquad (45)$$

6) Экстремумның қажетті шарты.

$$\begin{cases} f_x^{/}(x,y)=0 \\ f_y^{/}(x,y)=0 \end{cases} \qquad (46)$$

Осы жүйенің шешулері экстремум нүктелерін береді. Бірақ барлық стационар нүктелер экстремум нүктесі бола бермейді. Ол үшін экстремумның жеткілікті шартын пайдалану қажет.

7) Мынадай белгілеулер енгізейік: $M_0(x_0, y_0)$ кризистік нүктесі болсын және

$$A = f_{xx}^{//}(x_0, y_0), \quad B_{xy}^{//}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}^{//}(x_0, y_0)$$

$$\Delta = AC - B^2 \qquad (47)$$

болсын. Егер $M_0(x_0, y_0)$ кризистік нүктесінде:

1) $\Delta > 0$ және $A > 0$ болса, онда M_0 минимум нүктесі;

$\Delta > 0$ және $A < 0$ болса, онда M_0 максимум нүктесі.

2) $\Delta < 0$ болса, онда M_0 нүктесінде экстремум жоқ.

3) $\Delta = 0$ болса қосымша зерттеулер қажет.

27 – мысал Мына функциялардың анықталу облыстарын табу керек.

а) $z = \dfrac{1}{x+y}$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$; в) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}}$;

г) $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$; d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

Шешуі а) $y \neq -x$ $\quad x + y = 0$ түзуінің нүктелерінен басқа жазықтық нүктелері;

б) $x^2 + y^2 \geq 4$ – центрі бас нүктеде, радиусы 2 – ге тең шеңбердің нүктелері және ол шеңберден тыс жатқан нүктелер;

в) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1$ – $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ эллипсінде және оның ішінде жатқан нүктелер;

г) $\begin{cases} y^2 \leq 4x \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases}$ – $y^2 = 4x$ параболасының ішкі жағындағы парабола мен $x^2 + y^2 = 1$ арасындағы жазықтық бөлігі. Параболаның доғасы анықталу облысына жатады, ал шеңбердің доғасы жатпайды.

d) $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ - бірінші октант .

28 – мысал Мына функциялардың дербес туындылары мен толық дифференциалын табу керек.

а) $z = x^2y - xy^2 + 3$; б) $z = \dfrac{x}{y} e^{xy}$;

в) $z = (\sin x)^{\cos y}$; г) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Шешуі а) $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$;

б) $dz = e^{xy}\left[\left(\dfrac{1}{y} + x\right)dx + \dfrac{x}{y}\left(x - \dfrac{1}{y}\right)dy\right]$;

в) $dz = (\sin x)^{\cos y}\left[\cos y \,\mathrm{ctg}\, x dx - \sin y \ln \sin x dy\right]$;

г) $dz = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(xdx + ydy)$.

29 – мысал Айқындалмаған түрде берілген $xe^y + ye^x = 2$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0;$$

$$F'_x = e^y + ye^x, \quad F'_y = xe^y + e^x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - ye^x}{xe^y + e^x}.$$

30 – мысал Мына $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ функциясын экстремумға зерттеу керек.

Шешуі Экстремумның қажетті шарттарын қанағаттандыратын нүктелерді іздейміз. Ол үшін берілген функцияның дербес туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіріп жүйенің шешуін табамыз:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 2, \\ z'_y = x + 2y - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Жүйенің шешуі: $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{4}{3}.$ Сонымен $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ - кризистік нүктесі.

Экстремумның жеткілікті шарттарын тексереміз:

$$A = z''_{xx} = 2,\ B = z''_{xy} = 1,\ C = z''_{yy} = 2,$$

$\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$ және $A > 0$.

Сондықтан, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – минимум нүктесі.

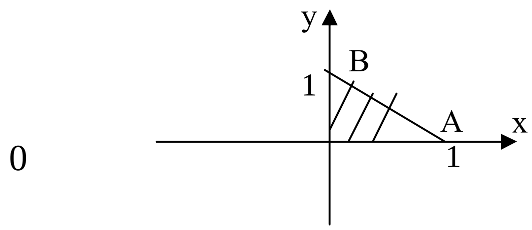
31 – мысал Мына $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1$ теңсіздіктерімен берілген тұйық облыста $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

$$z'_x = 2x + 2y = 2(x + y),\ z'_y = 2x - 6y + 1$$

$$\begin{cases} x + y = 0, & x = -\frac{1}{8} \\ 2x - 6y + 1 = 0, & y = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Шешуі Функцияның берілген облысы координаталар өстерімен және $x+y=1$ түзуімен шектелген үшбұрыш.

1) Функцияның анықталу облысында жататын стационар нүктелерді іздейміз:



Сурет 34

Бұл $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$ нүктесі анықталу облысында жатпайды. Сондықтан функцияның осы нүктедегі мәнін есептемейміз.

2) Функцияны анықталу облысының шекарасында зерттейміз. Шекарасы үш бөліктен тұратындықтан, функцияны әр шекара бөлігінде жеке – жеке зерттейміз.

а) Функцияны OA бөлігінде зерттейміз. Бұл бөлігінде $A(1;0)$ нүктесі бар. Бұл түзуде $y=0$ болғандықтан $z=x^2$ болады. Бұл функция OA бөлігінде 0 деп 1 – ге дейін өседі. Сондықтан $x=0$ болғанда, яғни $(0;0)$ нүктесінде $z_1=0$, ал ең үлкен мәні $x=1$ болғанда $z_2(1;0)=1$ - ге тең болады.

б) $B(0;1)$ нүктесі жататын OB бөлігінде $x=0$ болады. Ал функция $z=-3y^2+y$ түрінде жазылады. Сонда $z^{/}=-6y+1,\ -6y+1=0\quad y=\frac{1}{6}$ кризистік нүкте $\left(0;\frac{1}{6}\right)$. Функцияның бұл нүктедегі мәні $z_3(0;\frac{1}{6})=\frac{1}{12}$.

в) Функцияны $x+y=1$ түзуі бөлігінде зерттейміз. Осыдан $y=1-x$ - ті теңдеуге қойып, $z=x^2+2x(1-x)-3(1-x)^2+(1-x)$ немесе $z=-4x^2+7x-2$ теңдігін аламыз. Осыдан $z^{/}=-8x+7,\ -8x+7=0$ болса. $x=\frac{7}{8},\ y=\frac{1}{8}.$ Бұл нүктедегі функция мәні $z_4=\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right)=1\frac{1}{16}.$ Енді $B(0,1)$ нүктесіндегі функцияның мәнін есептейміз: $z_5=(0,1)=-3\cdot1^2+1=-2.$

3) Осы $z_1 = 0$, $z_2 = 1.$, $z_3 = \frac{1}{12}$, $z_4 = 1\frac{1}{16}$, $z_5 = -2$ мәндерін салыстырып функция берілген облыстағы ең үлкен мәні $1\frac{1}{16}$ шамасын $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ нүктесінде, ал ең кіші мәнін − 2 шамасын $(0;1)$ нүктесінде қабылдайтындығын көреміз.

32 – мысал $b = \sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$ түбірін жуықтап есептеу керек.

Шешуі $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциясын қарастырамыз. Бұл функцияның дифференциалы:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \approx \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y.$$

Берілген b саны $B(4;3)$ нүктесінде $\Delta x = 0{,}05, \ \Delta y = -0{,}07$ өсімшесін қабылдайды. Ал $f(4;3) = \sqrt{16 + 9} = 5$

$$\frac{\partial f(4;3)}{\partial x} = \frac{4}{5} = 0{,}8, \quad \frac{\partial f(4;3)}{\partial y} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

мәндеріне тең болады. Сондықтан, жуық есептеу формуласына қойып, мынадай нәтиже аламыз:

$$(df)_0 = 0{,}8 \cdot 0{,}05 - 0{,}6 \cdot 0{,}07 = -0{,}002,$$ яғни

$$b = f(4{,}05;2{,}93) \approx f(4;3) + (df_0) = 5 - 0{,}002 = 4{,}998.$$

52 – мысал Берілген $xy' - y = x^2 \cos x$ теңдеуінің $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ алғашқы шартын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Осы теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешуін табайық:

$$xy' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Екі жағын да интегралдап $\ln y = \ln x + \ln C, \ y = Cx$ шешуін аламыз. Тұрақтыны вариациялау әдісін қолданайық. Ол үшін тұрақтыны $C = C(x)$ деп алайық. Сонда $y = C(x)x$ функциясын біртексіз теңдеудің шешуі түрінде іздейміз. Бұл теңдіктен $y' = C'(x)x + C$ тауып, y пен y' - ті берілген теңдеуге қоямыз. Сонда

$$x[C'(x)x + C] - C(x)x = x^2 \cos x$$

немесе

$$x^2\left[C'(x)x-\cos x\right]=0$$

теңдігі алынады. Мұнда $x \neq 0$, өйткені егер $x=0$ болса, онда $y=0$. Ал алғашқы шарт бойынша $x=\frac{\pi}{2}$ болғанда $y=0$ болу керек. Сондықтан

$$C'(x)-\cos x=0, \quad \frac{dC(x)}{dx}=\cos x, \; dC(x)=\cos x dx, \quad C(x)=\sin x+C$$

Осыны жалпы шешуі $y=C(x)x$ формуласына қойып, берілген біртексіз теңдеудің жалпы шешуін аламыз:

$$y=(\sin x+C)x$$

Дербес шешуін табу үшін $x=\frac{\pi}{2}, \; y=0$ мәндерін соңғы теңдікке қоямыз:

$$0=\left(\sin\frac{p}{2}+C\right)\frac{p}{2}$$

Осыдан $C=-1$. Сонда берілген теңдеудің дербес шешуі:

$$y=(\sin x-1)x$$

түрінде алынады.

53 – мысал Берілген $(x^2+1)y''=2xy'$ теңдеуінің $y(0)=1, \; y'(0)=3$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Берілген екінші ретті дифференциалдық теңдеу құрамында y айнымалысы жоқ.

Енді $y'=p$ деп белгілейік. Мұндағы, p кез келген x - тің функциясы. Егер $y'=p$ болса, онда $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$. Берілген теңдеуге осы туындыларды қойып:

$$(x^2+1)\frac{dp}{dx}=2xp$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің шешуі

$$\frac{dp}{p}=\frac{2xdx}{x^2+1}, \quad \int\frac{dp}{p}=\int\frac{2xdx}{x^2+1}, \quad \ln p=\ln(x^2+1)+\ln C_1$$

Осыдан $p = C_1(x^2+1)$ немесе $y' = C_1(x^2+1)$ табылады. Алғашқы шарттарды пайдаланайық:

$3 = C_1(0+1),$ яғни $C_1 = 3$

Енді бірінші ретті $y' = 3(x^2+1)$ теңдеуінің шешуін табайық:

$$dy = 3(x^2+1)dx, \quad y = 3\int(x^2+1)dx = x^3+3x+C_2$$

Алғашқы шартты пайдаланып C_2 мәнін табамыз:

$$1 = 0+0+C_2, \quad C_2 = 1$$

Сонымен $y = x^3+3x+1$ берілген теңдеудің алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешуі.

54 – мысал Берілген $yy'' - y'^2 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі Теңдеу құрамында y белгісізі жоқ. Сондықтан $y' = p(y)$ деп алып.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$ теңдігін жазамыз. Сонда теңдеуге қойып:

$$y\cdot p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

осы теңдеудің шешуін $p = C_1 y$ түрінде аламыз. Сондықтан,

$$y' = C_1 y, \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx, \ \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|, \ \ y = C_2 e^{C_1 x}$$

шешуі табылады. Теңдеуді шешкенде оны y пен p - ға бөлдік. Соның салдарынан $y = 0$ және $p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C$ шешулерін жоғалтуымыз мүмкін. Бірақ бұл шешулер жалпы шешу $y = C_2 e^{C_1 x}$ құрамында C_1 және C_2 мәндері нөл мәнін қабылдаған жағдайда алынады.

55 – мысал Берідген $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$ теңдеуінің жалпы шешуі мен алғашқы $y(0) = \frac{1}{12}, \quad y' = -\frac{1}{8}$ шарттарын қанағаттандыратын шешуін табу керек.

Шешуі Берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеуді қарастырайық. Оның сипаттамалық теңдеуі $k^2+3k-10=0$. Сипаттамалық теңдеудің түбірлері $k_1=-5,\ k_2=2$ болғандықтан, біртекті теңдеудің жалпы шешуін $y_0=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}$ түрінде жазуға болады. Бұл жағдайда $\alpha=-2$. Ондай сипаттамалық теңдеудің түбірі жоқ. Сондықтан x көбейткіші болмайды. Туындыларды есептейміз:

$$y'_д=Ae^{-2x}-2(Ax+B)e^{-2x}=e^{-2x}(A-2A-2B)$$

$$y'_д=e^{-2x}(-2A+4Ax+4B-2A)=e^{-2x}(4Ax+4B-4A)$$

Осыларды біртекті теңдеуге қоямыз:

$$e^{-2x}(4Ax+4B-4A)+3e^{-2x}(A-2Ax-2B)-10e^{-2x}(Ax+B)=xe^{-2x}$$

Ал $e^{-2x}\neq 0$ болғандықтын, қысқартып мынадай өрнек аламыз:

$$4Ax+4B-4A+3A-6Ax-6Ax-6B-10Ax-10B=x$$

немесе

$$-12Ax-A-12B=x.$$

Осыдан

$$-12A=1,\ A=-\frac{1}{12},\ -A-12B=0,\quad B=-\frac{1}{12}A=\frac{1}{144}.$$

Сонда біртексіз теңдеудің дербес шешуі

$$y_д=\left(-\frac{1}{12}x+\frac{1}{144}\right)e^{-2x}=\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}$$

түрінде жазылады. Берілген теңдеудің жалпы шешуі:

$$y=y_0+y_д=C_1e^{-5x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}$$

Алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешуін іздейік.

$$\frac{1}{12}=C_1+C_2+\frac{1}{144},\quad y^{/}=-5C_1e^{-5x}+2C_2e^{2x}+\frac{1}{144}e^{-2x}(24x-14)$$

$$-\frac{1}{8}=-5C_1+2C_2-\frac{14}{144},\quad \begin{cases} C_1+C_2=\frac{11}{144}, \\ -5C_1+2C_2=-\frac{4}{144} \end{cases}$$

Осыдан $C_1=\frac{13}{504},\quad C_2=\frac{17}{336}.$ Енді дербес шешуді мына түрде жазамыз:

$$y=\frac{13}{504}e^{-5x}+\frac{17}{336}e^{2x}+\frac{1}{144}(1-12x)e^{-2x}.$$

56 – мысал Мына

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=-x_1+8x_2, \\ \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_2 \end{cases}$$

жүйенің жалпы шешуін табу керек.

Шешуі Сипаттамалық теңдеуін қарастырайық.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad (-1-\lambda)(1-\lambda)-8=0$$

немесе

$$\lambda^2-9=0,\ \lambda_1=-3,\ \lambda_2=3.$$

Бұл мәндерді g_1 және g_2 бойынша сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне қоямыз:

$$\lambda_1=-3.\quad \begin{cases} (-1+3)\gamma_1+8\gamma_2=0, \\ \gamma_1+(1+3)\gamma_2=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} 2\gamma_1+8\gamma_2=0, \\ \gamma_1+4\gamma_2=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} \gamma_1+4\gamma_2=0, \\ \gamma_1+4\gamma_2=0 \end{cases}$$

Екі теңдеу де бірдей. Мысалы, $\gamma_1=k$ деп алатын болсақ, $\gamma_2=-\frac{4}{k}.$ Ал $k=4$ деп алсақ $g_2=-1$ болады. Сонымен егер $l=-3$ болса, мынадай шешулер аламыз:

$$x_{11}=4e^{-3t},\ x_{21}=-e^{-3t}$$

Егер $\lambda_2 = 3$ болса, онда:

$$\begin{cases}(-1-3)\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + (1-3)\gamma_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}-4\gamma_1 + 8\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 = 0,\end{cases} \quad \begin{cases}\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 = 0\end{cases}$$

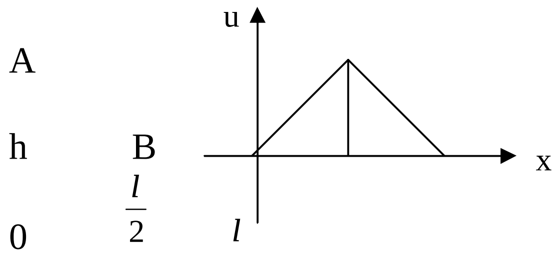
Мысалы, $\gamma_1 = k$ деп алсақ, $\gamma_2 = \frac{k}{2}$. Ал $k = 2$ деп алсақ $g_1 = 2,\ g_2 = 1$ болады. Сондықтан $\lambda = 3$ болғанда, мынадай шешулер алынады:

$$x_{12} = 2e^{3t},\ \ x_{22} = e^{3t}$$

Сонымен, жүйенің жалпы шешуі:

$$x_1 = 4C_1e^{-3t} + 2C_2e^{3t}, \qquad x_2 = -C_1e^{-3t} + C_2e^{3t}$$

57 – мысал Шек $x = 0$ және $x = l$ шеттерінен бекітілген. Алғашқы уақыт кезеңінде шектің пішіні суретте көрсетілген OAB сынығының түріндей болсын. Егер бастапқы жылдамдық болмаса, онда кез келген t уақыт кезеңіндегі шектің пішінін анықтау керек.



Сурет 39

Шешуі Суреттен және есептің шартынан мынаны аламыз:

$$\varphi(x) = \begin{cases}\dfrac{2hx}{l}, & \text{егер} \quad 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \ \text{болса,} \\ \dfrac{2h(l-x)}{l}, & \text{егер} \quad \dfrac{l}{2} \le x \le l \ \text{болса.}\end{cases}$$

$$\psi(x) = 0.$$

Енді коэффициенттерді есептейміз:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^b \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{4h}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{k\pi x}{l}dx + \frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k = 0$$

Алдымен $\int x\sin\frac{k\pi x}{l}dx$ интегралын бөліктеп есептейік.: $x=4,\ \sin\frac{k\pi x}{l}dx=dv,$ осыдан $du=dx,\quad v=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}$. Сондықтан

$$\int\sin\frac{k\pi x}{l}dx=-\frac{l}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{l}+\int\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=-\frac{l}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Сонда a_k коэффициенті мынаған тең:

$$a_k=\frac{4h}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{k\pi x}{l}dx+\frac{4h}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx-\frac{4h}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}x\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{8h}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Сонымен, есептің шешуі:

$$u(x;t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Әдебиет: [2], 282-299, 400-428 бет.

4 Тақырып Қатарлар теориясы

Сан қатарлары және олардың жинақтылық белгілері. Функциялық қатарлар. Функциялық тізбектер мен қатарлардың бірқалыпты жинақтылығы. Функциялық қатарларды мүшелеп диференциалдау және интегралдау. Дәрежелік қатарлар. Абель теоремасы. Тейлор қатары. Қатарлардың қолданылулары.

43 – мысал Берілген қатардың қосындысын табу керек.

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Шешуі Қатардың жалпы мүшесін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып жай бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$$

Осыдан

$$4=A(2n+1)+B(2n-1),\quad 2A+2B=0,\quad A-B=4,\quad A=2,\quad B=-2.$$

Сонымен, $\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$. Енді берілген қатардың әрбір мүшесін екі қосылғыш түрінде жазып, n - ші дербес қосынды үшін мынадай өрнек аламыз:

$$S_n=\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\left(2-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)-\ldots$$

$$-\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}.$$

Бірінші мен соңғы қосылғыштардан басқасының барлығы өзара жойылады. Сондықтан қатардың қосындысын $n\to\infty$ шекке көшіп аламыз:

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2n+1}\right)=2,$ яғни $S=2.$

44 – мысал Мына қатарды жинақтылыққа зерттеу керек:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

Шешуі а) Даламбер белгісін пайдаланайық. Мұнда $a_n=\frac{2^n}{n!},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\ \ l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!}{2^n(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$, яғни қатар жинақталады.

б) Берілген қатардың жалпы мүшесін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ қатарымен салыстырамыз. Бұл геометриялық қатардың еселігі $q=\frac{1}{3}<1$ және барлық n үшін $\frac{n}{(n+1)3^n}<\frac{1}{3^n}$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан салыстыру теоремалары бойынша берілген қатар жинақталады.

в) Қатардың жалпы мүшесі өрнектің n - ші дәрежесін сипаттайды. Сондықтан бұл жағдайда Коши белгісін пайдаланған қолайлы:

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{1}{3}<1$, яғни $\rho<1$

болғандықтан қатар жинақталады.

г) Жинақтылықтың қажетті шартын тексеретін болсақ, ол орындалмайды:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$ - қатар жинақталмайды.

д) Интегралдық белгіні пайдаланайық:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{3+n^2}dn = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2dn}{3+n} = 2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{n}{\sqrt{3}}\Big|_1^b = \frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{b\to\infty}\left[arctg\frac{b}{\sqrt{3}} - arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{p}{2} - \frac{p}{6}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{p}{3} = \frac{2\sqrt{3}p}{9}.$$

Меншіксіз интеграл жинақталады. Сондықтан берілген қатар да жинақталады.

45 – мысал Қатарды абсолютті жинақтылыққа зерттеу керек:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Шешуі Бұл ауыспалы таңбалы қатар. Лейбниц теоремасының шарттарының орындалуын тексереміз. Қатардың мүшелері кемімелі: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ және жалпы мүшесі $n \to \infty$ - де нөлге ұмтылады. Сондықтан, бұл қатар Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Ал қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған қатар $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - жинақталмайды. Осыдан қатар шартты жинақталатындығы туралы қортынды жасалады.

46 – мысал Мына дәрежелік қатарды жинақтылыққа зерттеп оның жинақталу радиусын табу керек:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$$

Шешуі Бұл қатар үшін

$$|U_n(x)| = \frac{|x+1|^n}{2^{nh}(n+1)(n+2)},\quad |U_{n+1}(x)| = \frac{|x+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)}\cdot\frac{2^n(n+1)(n+2)}{|x+1|^n} = \frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+3} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Егер $\frac{|x+1|}{2} < 1$ болса, онда Даламбер белгісі бойынша қатар абсолютті жинақталады. Әрі қарай $|x+1| < 2$ немесе $-2 < x+1 < 2,\ -3 < x < 1.$ Сонымен қатардың жинақталу интервалы $(-3;1)$, ал жинақталу радиусы $R = 2.$

47 – мысал Берілген $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$ қатарының жинақталу облысын табу керек.

Шешуі Қатарды ашып жазайық

$$5x + 5^4x^4 + 5^9x^9 + \ldots + 5^{n^2}x^{n^2} + \ldots$$

Осыдан қатардың шексіз көп коэффициенттері нөлге тең екендігі көрінеді

$$C_0 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_{10} = C_{11} = \ldots = C_m = \ldots = 0 \qquad (m \ne n^2).$$

Сондықтан жинақталу радиусының белгілі формулаларын қолдануға болмайды. Сондықтан қатардың жинақталу облысын табу үшін Коши белгісін пайдаланамыз

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|5^{n^2}x^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}|5x|^n = \begin{cases} \infty, & \text{егер } |5x| > 1, \text{ немесе } |x| > \frac{1}{5} \text{ болса}, \\ 1, & \text{егер } |5x| = 1, \text{ немесе } x = \pm\frac{1}{5} \text{ болса}, \\ 0, & \text{егер } |5x| < 1, \text{ немесе } -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5} \text{ болса} \end{cases}$$

Осыдан берілген қатар $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$ аралығында жинақталатындығы шығады. Ал аралықтың $x = \pm\frac{1}{5}$ шекаралық нүктелерінде жинақталмайды. Өйткені жинақтылықтың қажетті шарты орындалмайды.

48 – мысал $\sqrt[3]{68}$ түбірін 0,001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4\sqrt[3]{1+\frac{4}{64}} = 4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}.$ Енді $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ функциясының қатарға жіктелуін жазайық:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots$$

Осы жіктеуде $x=\frac{1}{16}$ деп алып және 4 – ке көбейтіп мынадай нәтиже аламыз:

$$\sqrt[3]{68}=4\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 4\left[1+\frac{1}{3\cdot 16}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 16^2}\right]=4+\frac{1}{12}-\frac{1}{576}\approx 4{,}082.$$

Бұл жіктелудің үш мүшесін алудың өзі керекті дәлдікті қамтамасыз етеді.

$$|R_3|\le 4\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 16^3}<0{,}001.$$

49 – мысал $\int_0^{0,5}\cos\sqrt{x}dx$ интегралын 0,001 дәлдікпен есептеу керек.

Шешуі Алдымен $\cos x$ функциясының қатарға жіктелуін жазайық:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

мұнда x - ті $\sqrt{x}$ пен ауыстырайық

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots$$

Осы жіктеуді интегралға қойып және берілген аралықта интегралдаймыз:

$$\Im=\int_0^{0,5}\cos\sqrt{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\frac{x^4}{4\cdot 6!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2\cdot 2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 4!}-\frac{1}{2^4\cdot 4\cdot 6!}+\ldots$$

Бұл жинақталатын ауыспалы таңбалы қатардың төртінші мүшесі: $\frac{1}{2^4 4\cdot 6!}$ керекті 0,001 дәлдіктен кіші. Сондықтан ауыспалы таңбалы қатардың қалдық қатарының қасиеті бойынша қатардың алғашқы үш мүшесін алсақ жеткілікті:

$$\Im \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{576} \approx 0{,}439.$$

50 – мысал Периодты $f(x)$ функциясын

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ егер } -\pi < x \le 0, \\ 0, \text{ егер } \ 0 < x \le \pi \end{cases}$$

болса $(-\pi, \pi)$ аралығында Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі Берілген $f(x)$ функциясы Фурье қатарына жіктеудің шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан мынадай

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{90}$$

теңдік жаза аламыз. Мұндағы a_n және b_n коэффициенттері мына формулалармен анықталады:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,3... \tag{91}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 0,1,2,3... \tag{92}$$

Енді (91) формулада $n = 0$ деп алып a_0 коэффициентін анықтаймыз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x dx + \int_{0}^{\pi} 0 dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2}.$$

Берілген функция мен (91) формула бойынша a_n коэффициентін анықтаймыз:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 0\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx$$

Бөліктеп интегралдап мынаны аламыз:

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_{-n}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2}\cdot 0 - \frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2}, \text{ егер } n \text{ так болса,} \\ 0, \text{ егер } n \text{ жуп болса} \end{cases}$$

.

Енді b_n коэффициентін анықтайық

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} -x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 0\sin nx dx\right] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx$$

Бөліктеп интегралдаймыз

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_{-n}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left[0 + 0 - \frac{\pi\cos(-n\pi)}{n} - 0\right] = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n^2} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, \text{ егер } n \text{ так болса,} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ егер } n \text{ жуп болса} \end{cases}$$

Табылған Фурье коэффициенттерін (90) формулаға қойып $f(x)$ функциясының қатарға жіктелуін аламыз:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) - \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right)$$

51 – мысал Периоды $2l$ - ға тең периодты $f(x)$ функциясы $[-l;l]$ кесіндісінде $f(x)=|x|$ теңдігімен берілген. Осы функцияны Фурье қатарына жіктеу керек.

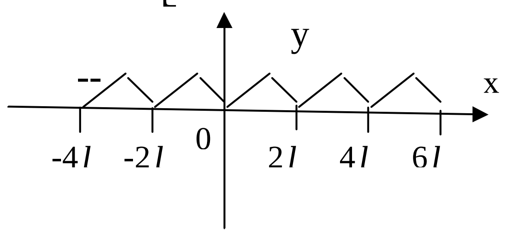
Шешуі Қарастырылып отырған функция жұп болғандықтан

$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=l,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2l}{\pi^2}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ егер } n \text{ жуп болса,}\\ -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2}, \text{ егер } n \text{ так болса}\end{cases}$$

Сондықтан жіктеудің түрі мынадай болады:

$$|x|=\frac{2}{l}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1}+\frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2k+1)}{l}x}{(2k+1)^2}+\ldots\right]$$



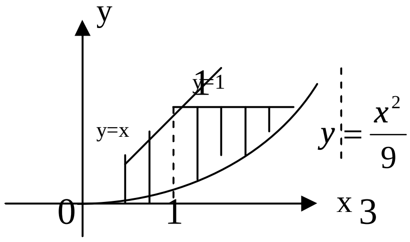
Қатар сандар өсі бойында жинақталады және оның қосындысының графигі сызбада көрсетілген.

Әдебиет: [2], 325-354 бет.

5 Тақырып Еселі интегралдар

Екі еселі интеграл және оның қасиеттері, оларды есептеу. Екі еселі интегралдардағы айнымалыларды алмастыру. Әртүрлі координаттар жүйесіндегі екі еселі интегралдар. Үш еселі интегралдар, олардың қасиеттері және айнымалыларды алмастыру. Әртүрлі координаттар жүйесіндегі үш еселі интегралдар. Екі және үш еселі интегралдардың қолданылулары.

33 – мысал Мына интегралда $\int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x;y)dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x;y)dy$ интегралдау ретін ауыстыру керек.



Сурет 36

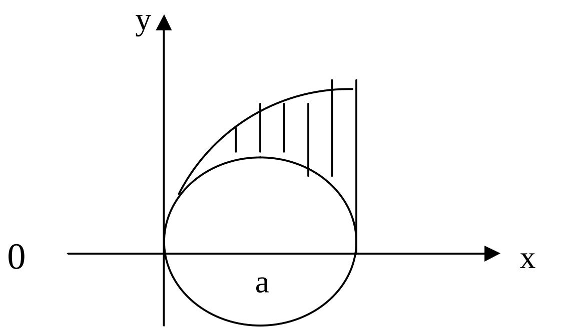
Шешуі Интегралдау облысын кескіндейік. Интегралдар қосындысын бірге қарастырып төменгі интегралдау шегі $0 \le x \le 1$ және $1 \le x \le 3$ аралықтарында бірдей, яғни $y = \frac{x^2}{9}$ екендігі көрінеді. Ал $0 \le x \le 1$ аралығында жоғарғы интегрлдау шегі $y = x$, $1 \le x \le 3$ аралығында $y = 1$ түзуі болады.

Осы мәліметтер бойынша интегралдау облысын салуға болады. Сызбадан y бойынша тұрақты интегралдау шектері 0 және 1 сандары екендігі көрінеді. Онда x бойынша төменгі өзгеру шегі $x = y$, ал жоғары шегі $x = 3\sqrt{y}$ болады. Түбірдің оң мәнін аламыз, өйткені облыстың барлық нүктелерінің абсциссалары теріс емес.

Енді қайталанған интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\int_0^1 dy \int_y^{3\sqrt{y}} f(x;y)dx$$

34 – мысал Бірінші ширекте жататын және $x^2 + y^2 = 2ax$ шеңберімен, $y^2 = 2ax$ параболасымен және $x = 2a$ түзуімен шектелген фигураның ауданын табу керек.



Сурет 37

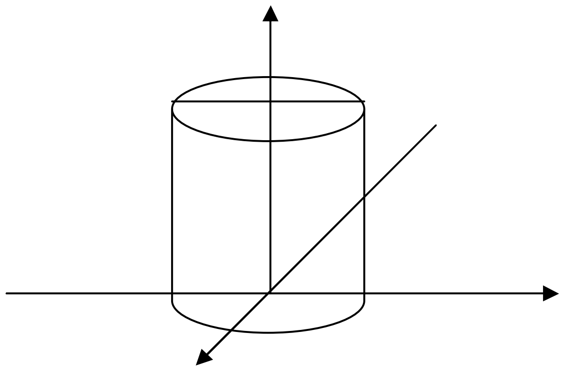
Шешуі Ауданды есептеу үшін

$$S=\iint_D dxdy \qquad (63)$$

формуласын пайдаланамыз. Сызбадан сыртқы интегралдау шектерін x бойынша алу қолайлы екендігі көрінеді. Тұрақты шектері 0 мен $2a$ сандары болады. Берілген облыс төменгі жағынан теңдеуі $y=\sqrt{2ax-x^2}$ болатын шеңбердің жоғарғы бөлігімен шектелген, яғни $\sqrt{2ax-x^2}$ төменгі интегралдау шегі. Жоғарғы жағынан облыс теңдеуі $y=\sqrt{2ax}$ болатын параболаның жоғарғы тармағымен шектелген. Сонда $\sqrt{2ax}$ жоғары интегралдау шегі болады. Сонымен іздеп отырған аудан шамасы мына интеграл мәніне тең.

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}dx=\int_0^{2a}\left(\sqrt{2ax}-\sqrt{2ax-x^2}\right)dx=\frac{8a^2}{3}-\frac{\pi a^2}{2}$$ (кв. бірлік)

35 – мысал Үш еселі $\Im=\iiint_V(2z-5)dx\,dy\,dz$ интегралын есептеу керек. Мұндағы V облысы $\delta_1: z=1$ және $\delta_2: z=2-x^2-y^2$ беттерімен шектелген.



Сурет 38

Шешуі δ_1 және δ_2 теңдеулерінен z - ті жойып V облысының xOy жазықтығына проекциясы болатын D_{xy} облысының шекаралық сызығының теңдеуін аламыз:

$$x^2+y^2=1$$

$\Im$ интегралын есептеу үшін (51) формулалар бойынша цилиндрлік координаталарға көшеміз. Сонда интегралдау шектері $0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le 1,\ 1\le z\le 2-\rho^2$ болады. Енді (52) формуланы пайдаланамыз:

$$\Im = \iiint_V (2z-5)dx\,dy\,dz = \int_0^{2p} dj \int_0^1 r\,dr \int_1^{2-r^2} (2z-5)dz = \int_0^{2p} dj \int_0^1 \left(\left(z^2-5z\right)\Big|_0^{2-r^2} \right) r\,dr =$$

$$= \int_0^{2p} dj \int_0^1 \left(r^5 + r^3 - 2r\right)dr = \int_0^{2p} \left[\left(\frac{1}{6} r^6 + \frac{1}{4} r^4 - r^2 \right)\Big|_0^1 \right] dj = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 1 \right) \int_0^{2p} dj = -\frac{7p}{6}$$

36 – мысал Берілген $u = xyz$ скалярлық өрісінің $\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ векторының бағыты бойынша $M(1;1;1)$ нүктесіндегі туындысын табу керек.

Шешуі Туындыны:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (64)$$

формуласымен есептейміз.

Егер $\vec{l}$ бағыты $\vec{l} = l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}$ векторы арқылы берілсе, онда

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \quad \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}, \quad \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} \qquad (65)$$

тең болады.

Берілген функцияның дербес туындыларын табамыз: $\frac{\partial u}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy$. Сонда $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1$. Берілген вектор $\vec{i} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$, сондықтан $\cos\alpha = \frac{1}{3},\quad \cos\beta = -\frac{2}{3},\quad \cos\gamma = \frac{2}{3}$. Бағыт бойынша туынды мынаған тең: $\frac{\partial u}{\partial l} = 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

37 – мысал Скалярлық өрістің $u(x;y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ $M(2;1)$ нүктесіндегі градиентін табу керек.

Шешуі $u(M) = u(x;y;z)$ функциясының градиенті:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (66)$$

Берілген $M(2;1)$ нүктедегі дербес туындылар мәнін табамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = \frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\Big|_M = \frac{2}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\Big|_M = \frac{1}{3}.$$

(66) формула бойынша $\operatorname{grad}u = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}.$

38 – мысал Егер $\vec{a}(N) = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j} + R(x;y)\vec{k}$ векторлық өрісі берілсе, оның векторлық сызықтар жиыны мына жүйеден анықталады:

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)} \qquad (67)$$

Мына $\vec{a}(N) = \frac{1}{x^2}\vec{i} - \frac{1}{y^2}\vec{j} + \frac{1}{z^2}\vec{k}$ өрісінің векторлық сызықтарын табу керек болсын дейік. Жүйе мына түрде жазылады:

$$\frac{dx}{\frac{1}{x^2}} = \frac{dy}{-\frac{1}{y^2}} = \frac{dz}{\frac{1}{z^2}}$$

немесе

$$x^2dx = -y^2dy = z^2dz.$$

Осыдан

$$\frac{x^3}{3} = -\frac{y^3}{3} + C_1, \quad \frac{z^3}{3} = -\frac{y^3}{3} + C_2, \quad x^3 + y^3 = C_1, \quad z^3 + y^3 = C_2.$$

39 – мысал Беттік интегралды есептеу керек:

$$\Im = \iint_{\delta_2} \frac{(2x^2 + 2y^2 - 5)z\,d\delta}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

мұндағы δ_2 - $z = 1$ жазықтығымен қиылған $z = 2 - x^2 - y^2$ параболоидының сыртқы беті.

Шешуі δ_2 беті xOy жазықтығына D_{xy} облысына бірмәнді проекциаланады және $\Im$ интегралы (54) формула бойынша есептеледі. Ал (55) формула бойынша δ_2 бетіне сыртқы нормаль болатын $\vec{n}_2$ бірлік векторын мына түрде анықтаймыз:

$$\vec{n}_2 = \pm\frac{-2x\vec{i}-2y\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} = \frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Мұнда нормаль үшін минус таңбасы алынады. Өйткені Oz өсі мен $\vec{n}_2$ нормаль арасындағы γ бұрышы сүйір және $\cos\gamma = \pm(-1)\big/\sqrt{4x^2+4y^2+1}$ оң болу керек. Сонымен,

$$\Im = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(2x^2+2y^2-5)(2-x^2-y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot\frac{dxdy}{\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}} =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(2x^2+2y^2-5)(2-x^2-y^2)dxdy$$

D_{xy} облысы $x^2+y^2\le 1$ дөңгелегі. Енді полярлық координаталарға көшеміз: $(0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le 1)$.

$$\Im = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(2\rho^2\cos^2\varphi+2\rho^2\sin^2\varphi-5)(2-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi)\rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1(9\rho^3-10\rho-2\rho^5)d\rho = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{9}{4}\rho^4-5\rho^2-\frac{2}{6}\rho^6\right)\Bigg|_0^1\right]d\varphi =$$

$$= \left(\frac{9}{4}-5-\frac{1}{3}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{37\pi}{6}$$

Дивергенция, ротор, градиент түсініктерін символикалық вектор ∇- набла арқылы жазуға болады.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

Бұл вектор скаляр – u - ға және скалярлық және векторлық түрде векторлық алгебраның кәдімгі ережелері бойынша вектор a-ға көбейтіледі.

Бірақ көбейту айтылған шамалардан дербес туынды алу деп түсініледі. Набла векторы арқылы бірінші ретті векторлық-дифференциалдық амалдар.

$$\mathrm{grad}u = \nabla u, \quad \mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

$$\mathrm{div}\bar{a} = \nabla\bar{a}, \quad \mathrm{div}\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\bar{k}$$

$$\mathrm{rot}\bar{a} = \nabla\times\bar{a}, \quad \mathrm{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Ал төмендегі амалдар екінші ретті векторлық-дифференциалдық амалдар деп аталады.

1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\bar{a}) = 0$

2) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \nabla\cdot(\nabla\cdot u) = (\nabla\cdot\nabla)\cdot u = \nabla^2\cdot u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, мұндағы ∇^2 - Лапластың дифференциалдық операторы;

3) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \nabla\times(\nabla\cdot u) = (\nabla\times\nabla)\cdot u = 0$

4) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\bar{a}) = \nabla\cdot(\nabla\cdot\bar{a}) = \nabla^2\cdot\bar{a} = \nabla^2 a_x\bar{i} + \nabla^2 a_y\bar{j} + \nabla^2 a_z\bar{k}$

5) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\bar{a}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\bar{a}) - \nabla^2\bar{a}$.

Соңғысын бір проекциясы үшін дәлелдейік.

$$\mathrm{rot}_x\mathrm{rot}\bar{a} = \frac{\partial}{\Im y}\mathrm{rot}_z\bar{a} - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{rot}_y\bar{a} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\bar{a} - \nabla\cdot a_x$$

40 – мысал $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - 5z\vec{k}$ векторлық өрісінің дивергенциясы мен роторын табу керек.

Шешуі Дивергенцияны (57) формула бойынша есептейміз:

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial_x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-5z) = z + z - 5 = 2z - 5$$

Роторды (58) формула бойынша есептейміз:

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & -5z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-5z) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right]\vec{i} -$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(-5z) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\vec{k} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$

41 – мысал Жоғарыдағы сызбада берілген $z=1$ жазықтығы мен $z = 2 - x^2 - y^2$ параболоиды арқылы пайда болған δ тұйық беті бойынша $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - 5z\vec{k}$ векторлық өрісінің ағынын есептеу керек.

Шешуі Қарастырылып отырған бет $z=1$ жазықтығының бөлігі δ_1 бетінен және $z = 2 - x^2 - y^2$ параболоидының бөлігі δ_2 бетінен тұрады. Сондықтан δ беті бойынша өтетін ағын $\vec{a}$ векторының құраушы беттер бойынша ағындарының қосындысына тең:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{\delta_1}\left(\vec{a}, \overrightarrow{n_1}\right)d\delta + \iint\limits_{\delta_2}\left(\vec{a}, \overrightarrow{n_2}\right)d\delta$$

мұндағы, $\vec{n}_1$ және $\vec{n}_2$ жазықтық пен пораболоидтың сыртқы нормаль векторлары.

Енді $z=1$ жазықтығының (55) формулаға сүйеніп $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ нормаль векторын табайық.

Сонда δ_1 бетінде $z=1$ болғандықтан $\Pi_1 = \iint\limits_{\delta_1}\left(\vec{a}, \vec{n}_1\right)d\delta = \iint\limits_{\delta_1} 5z d\delta = 5\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = 5\pi$ мәні алынады.

Әрі қарай δ_2 беті бойынша өтетін ағынды есептейміз. Жоғарыда (39 – мысал) $\vec{n}_2$ векторы анықталған болатын. Осыны пайдаланып Π_2 ағынын есептейміз:

$$\Pi_2 = \iint\limits_{\delta_2}\left(\vec{a}, \overrightarrow{n_2}\right)d\delta = \iint\limits_{\delta_2} \frac{\left(2x^2 + 2y^2\right)z - 5z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} d\delta = -\frac{37\pi}{6}.$$

Сонда δ беті бойынша өтетін ағын мынаған тең:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 5\pi - \frac{37\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

Остроградский осы есептің шешуін (61) Остроградский формуласы бойынша табайық. Жоғарыда $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - 5z\vec{k}$ өрісінің дивергенциясы есептелген болатын: $\operatorname{div}\vec{a} = 2z - 5$. Сондықтан

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dv = \iiint_V (2z-5)dv = -\frac{7\pi}{6}.$$

42 – мысал Мына $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - 5z\vec{k}$ векторлық өрісінің $z = 1$ теңдеуімен берілген d_1 беті мен $z = 2 - x^2 - y^2$ теңдеуімен берілген δ_2 бетінің қиылысу сызығы L контуры бойынша айналуын (циркуляциясын) есептеу керек.

Шешуі Бұл беттердің қиылысу сызығы $x^2 + y^2 = 1$ шеңбері, $z = 1$. Осы L контурымен шектелген облыс контур бойынша қозғалѓанда сол жақта қалып отыратындай бағытты таңдап аламыз. Осы L контурының параметрлік теңдеулері: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1. \end{cases}$ Осыдан $\begin{cases} dx = -\sin t dt, \\ dy = \cos t dt, \\ dz = 0. \end{cases}$ ал параметр t 0 – ден $2n$ - ге дейін өзгереді. Сонда

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \vec{a}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot 1 \cdot (-\sin t)dt + \sin t \cdot 1 \cdot \cos t dt - 5 \cdot 1 = 0.$$

Енді Стокс формуласын қолданайық. Мұнда d беті үшін $z = 1$ жазықтық бөлігін алуға болады. Бұл бетке $\vec{n} = \vec{k}$ нормаль бағыты L контурын айналып өту бағытына сәйкес келеді. Берілген өрістің роторы 40 – мысалда есептелген: $\operatorname{rot}\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$. Сондықтан өрістің циркуляциясы мынаған тең:

$$Ц = \iint_\delta (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})d\delta = \iint_\delta (-y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k})d\delta = 0.$$

Әдебиет: [2], 302-312 бет.

Әдебиеттер тізімі

Негізгі:

1. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулық].-Өнделіп, толықтырылған 3-ші басылымы.-Алматы:Қазақ университеті.-2006.-561 .

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика:оқу құралы.-Алматы.-2004.-439 б.б

3. Өсенбаева Қ. Жоғары математика курсы:оқу құралы.-Алматы:Қарасай.-2007.-328 б.

4. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы:[жоғары оқу орындарының бейматематика манадықтарының студ. арналған оқу құралы].-Алматы:Дәуір.-2008.-389 б.
5. Қабдықайыр Қ. Жоғары математика:[жоғары оқу орындарына арналған оқулық]. .-Алматы.-2007.-408 б.

Қосымша

6. Айдос Е.Ж. Жоғары математика-2:оқулық.-Алматы:Бастау.-2008.-466 б.
7. Мұхтаров М.М. Математика:тәжірибелік сабақтарды өткізуге арналған әдістемелік нұсқаулар.-Павлодар:С. Торайғыров атындағы ПМУ.-2007.-135 б.