МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ВОЛЖСКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра общематематических дисциплин

Е. В. Васильева, Н. А. Куторкина

Конспект лекций по дисциплине «Математические методы решения инженерных задач»

для студентов заочной формы обучения специальности
270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы»

Чебоксары 2007

Авторы:

Е.В. Васильева – преподаватель кафедры общематематических дисциплин Волжского филиала МАДИ (ГТУ);

Н.А. Куторкина – преподаватель кафедры общематематических дисциплин Волжского филиала МАДИ (ГТУ).

Рецензенты:

А.Н Михайлова – канд. ф.-м. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева;

С.В. Григорьева – канд. ф.-м. наук, доцент кафедры общематематических дисциплин Волжского филиала МАДИ (ГТУ).

Васильева Е.В., Куторкина Н.А.

Конспект лекций по дисциплине «математические методы решения инженерных задач» для студентов заочной формы обучения специальности 270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы» Волжского филиала МАДИ (ГТУ). – Чебоксары: Волжский филиал МАДИ (ГТУ), 2007. 51 с.

В кратком конспекте лекций приводятся основные разделы дисциплины «математические методы решения инженерных задач» в кратком, сжатом, наглядном и доступном виде. Рекомендуется студентам для изучения и подготовки к зачету по данной дисциплине.

Одобрено учебно-методическим советом Волжского филиала Московского автомобильно-дорожного института (ГТУ)

Содержание

1. Принятие решений

Принятие решений – основная часть работы управленческого персонала любого звена любого предприятия. Поэтому понимание всех тонкостей процесса принятия решений в различных условиях, знание и применение различных методов и моделей принятия решений играет значительную роль в повышении эффективности работы.

Процесс принятия решений для каждого человека индивидуален, очень сложен и мало кто может его избежать. Способность принимать решения быстро и правильно вырабатывается с опытом.

Решение – это выбор альтернативы.

В управлении, принятие решений – более систематизированный процесс, чем в частной жизни. Это связано с большей ответственностью. Руководители принимают решения, связанные со многими людьми и с большой материальной ответственностью. Поэтому они не могут принимать непродуманных решений.

Необходимо отметить, что любое решение не может иметь чисто положительных результатов. В любом результате есть отрицательные моменты. Поэтому любое организационное решение – это компромисс. В каждом случае человек должен сделать выбор между неизбежными отрицательными моментами.

В различных организациях различные решение могут приниматься как одним человеком, так и коллегиально. Это зависит от уровня решения, от структуры организации, уровня делегирования полномочий. Обычно самые сложные решения стратегического плана принимаются коллегиально, что позволяет уменьшить риск принятия неоптимального решения и снизить моральную нагрузку на людей, принимающих решение.

Процесс принятия решений – процесс психологический. Люди, принимая решения, не всегда принимают логичные решения. Поэтому процессы принятия решений делятся на имеющий интуитивный, основанный на суждениях и рациональный, обоснованный с помощью объективного аналитического процесса, характер, хотя решение редко относится к какой либо одной категории.

Факторы, связанные со средой принятия решений: определенность, риск и неопределенность.

*Определённость***.**

Решение принимается в условиях определенности, когда руководитель может с точностью определить результат каждого альтернативного решения, возможного в данной ситуации. Сравнительно мало организационных или персональных решений принимается в условиях определенности. Однако они все-таки имеют место. Уровень определенности при принятии решений зависит от внешней среды. Он увеличивается при наличии твердой правовой базы, ограничивающей количество альтернатив и снижающей уровень риска.

Риск.

К решениям, принимаемым в условиях риска, относятся такие решения, результаты которых не являются определенными, но вероятность каждого возможного результата можно определить.

Решения, принимаемые в условиях риска, занимают весомую часть всего множества решений. Руководство должно учитывать уровень риска при принятии решений в качестве важнейшего фактора. Для принятия решений в условиях риска предприятие должно обладать достаточным объемом релевантной информации

Неопределенность.

Решение принимается в условиях неопределенности при отсутствии, неполноте информации об объекте, процессе, явлении; при неуверенности в достоверности информации. Это имеет место, когда требующие учета факторы настолько новы и сложны, что невозможно получить достаточно релевантной информации, могущей помочь объективно определить вероятность, либо имеющаяся ситуация не подчиняется известным закономерностям. Поэтому вероятность определенного последствия невозможно предсказать с достаточной степенью достоверности. Неопределенность характерна для некоторых решений, принимаемых в быстро меняющихся условиях.

Ярким примером принятия решений в условиях неопределенности может быть решение, о разработке нового очень сложного оборудования. Причина в том, что на разработку требуется длительное время, а за это время конкурентами может быть создано более эффективное оборудование или могут быть совершены открытия, исключающие применение разрабатываемого оборудования.

2. Модели и методы принятия решений

Для принятия оптимальных решений необходимо использовать научный метод. Научный метод подразумевает наличие определенной структуры процесса принятия решений и использование различных методов и моделей принятия решений.

Модели принятия решений. *Модель* – это представление объекта, системы или процесса в форме отличной от оригинала, но сохраняющей основные его характеристики. Причинами, обуславливающими применение моделирования, являются: естественная сложность многих организационных ситуаций, невозможность проведения экспериментов в реальной жизни и ориентация на будущее.

В данном курсе мы подробно остановимся на следующих моделях принятия решения:

- теории игр;
- моделях управления запасами;
- сетевом анализе.

Есть ещё модели принятия решения: линейное программирование, имитационное программирование, транспортные задачи и т.д., которые изучались ранее.

*Теория игр***.** Данный метод служит для моделирования оценки воздействия принятого решения на конкурентов. Изначально была разработана военными с тем, чтобы в стратегии учесть возможные действия противника. Благодаря применению данной теории организация может прогнозировать действия конкурентов, что является преимуществом и увеличивает конкурентоспособность.

Модели управления запасами используются для определения времени размещения заказов на ресурсы и их количества, а также массы готовой продукции на складах. Цель данной модели - оптимизация запасов на предприятии.

Сетевой анализ. Из сетевого анализа в основном используется теория графов. Теория графов позволяет составлять оптимальные графики осуществления различных проектов. Это позволяет минимизировать как время осуществления проекта, так и затраты по нему.

Методы принятия решений. При принятии решения вне зависимости от применяемых моделей существуют некоторые правила принятия решений. Правило принятия решения – это критерий, по которому выносится суждение об оптимальности данного конкретного исхода. Существует два типа правил. Один не использует численные значения вероятных исходов, второй – использует данные значения.

К первому типу относятся следующие правила принятия решений:

1. *Максимаксное решение* – это решение, при котором принимается решение по максимизации максимально возможных доходов. Данный метод очень оптимистичен, то есть не учитывает возможные потери и, следовательно, самый рискованный.
2. *Максиминное решение* – это решение, при котором максимизируется минимально возможный доход. Данный метод в большей степени учитывает отрицательные моменты различных исходов и является более осторожным подходом к принятию решений.
3. *Минимаксное решение* – это решение, при котором минимизируются максимальные потери. Это наиболее осторожный подход к принятию решений и наиболее учитывающий все возможные риски. Под потерями здесь учитываются не только реальные потери, но и упущенные возможности.
4. *Критерий Гурвича*. Данный критерий является компромиссом между максиминным и минимаксным решениями и является одним из самых оптимальных.

Ко второму типу принятия решений относятся решения, при которых кроме самих возможных доходов и потерь учитываются вероятности возникновения каждого исхода. К данному типу принятия решений относятся, например, правило максимальной вероятности и правило оптимизации математического ожидания. При данных методах обычно составляется таблица доходов, в которой указываются все возможные варианты доходов и вероятности их наступления.

Для принятия оптимальных решений применяются следующие методы:

платежная матрица;

дерево решений;

методы прогнозирования.

Платежная матрица – один из методов статистической теории решений, оказывающий помощь руководителю в выборе одного из нескольких вариантов.

Дерево решений – схематичное представление проблемы принятия решений – используется для выбора наилучшего направления действий из имеющихся вариантов. Дерево решений – удобный метод для принятия последовательных решений.

Методы прогнозирования. Прогнозирование – метод, в котором используется как накопленный в прошлом опыт, так и текущие допущения насчет будущего с целью его определения. Результат качественного прогнозирования может служить основой планирования. Существуют различные разновидности прогнозов: экономические прогнозы, прогнозы развития технологии, прогнозы развития конкуренции, прогнозы на основе опросов и исследований, социальное прогнозирование.

3. Игровые модели

3.1. Основные понятия

Игра – идеализированная математическая модель конфликтной ситуации. При конфликтных ситуациях решения принимаются в условиях неопределённости двумя и более разумными противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счёт других. Стороны, участвующие в конфликте называются игроками, а исход конфликта – выигрышем. Регулярное действие, выполняемое игроком, называется *ходом*. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется *стратегией*.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Наиболее изучены игры с двумя игроками. Такие игры называются *парными*.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной*. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется *бесконечной*.

По характеру взаимодействия игры делятся на *бескоалиционные*: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; *коалиционные* (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: *игры с нулевой суммой* (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и *игры с ненулевой суммой.*

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

В дальнейшем рассматриваются только парные игры с нулевой суммой.

3.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Пусть первый игрок имеет m стратегий, второй n стратегий. Обозначим через A_i – i–*тую* стратегию игрока 1 $(i=1...m)$, через B_j – j–*тую* стратегию игрока 2 $(j=1...n)$. Паре стратегий (i,j) поставим в соответствие число $a_{i,j}$ – выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою стратегию i, а второй – j.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей матрицей, которая называется платёжной или матрицей выигрышей.

$$\begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$

Каждая стратегия i,j называется *чистой стратегией.*

В каждой партии делается ход: игрок 1 выбирает стратегию i, игрок 2 – стратегию j.После чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij}(за счёт игрока 2). Если $a_{ij} < 0$, значит игрок 1 платит игроку 2 сумму $|a_{ij}|$ и игра заканчивается.

Для того чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока найти стратегию, которой называется оптимальной. Для первого это стратегия, которая приносит максимальный выигрыш, если второй придерживается своей. В то же время для второго - это стратегия, которая приносит минимальный проигрыш, если первый придерживается своей.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока.

Игрок 1 для каждого i выбирает минимальное значение выигрыша (при любых стратегий игрока 2) ,т.е.

$$\min_j a_{ij} \quad (i=1...m).$$

Затем отыскивается такая стратегия $i=i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i0j0} = v_н .$$

величина $v_н$ называется *максимином* матрицы или *нижней ценой игры*. Нижняя чистая цена игры показывает какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Стратегия игрока 2 максимально уменьшить выигрыш игрока 1 (за счёт своих стратегий). Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i1j1} = v_в .$$

или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $v_в$ называется *минимаксом* матрицы или *чистой верхней ценой игры.*

Таким образом, игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не менее $v_н$, а игрок 2 может не допустить выигрыш игрока 1 больше чем на $v_в$.

В случае если значения $v_н$ и $v_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $v_н = v_в = v = a_{i0,j0}$. В этом случае говорят, что игра имеет *решение в чистых стратегиях*, а стратегии i_0, j_0, в которых достигается v, называются *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара чистых стратегий (i_0, j_0) называется *седловой точкой*. Седловой элемент $a_{i0,j0}$ является минимальным в $i-ой$ строке и максимальным в $j-ом$ столбце платёжной матрицы. Значение v называется *чистой ценой игры*.

3. 3. Смешанные стратегии в матричных играх

3.3.1. Матричные игры со смешанным расширением

Рассмотрим игру $m \times n$, определяемую матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Решение матричной игры начинается с нахождения её верхней $v_в$ и нижней $v_н$ цены. Если эти значения совпадают, $v_н = v_в = v$ то на этом решение игры завершается. Если же матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях, то для нахождения её решения используются так называемые смешанные стратегии, а найденные ранее нижняя и верхняя цены игры указывают на то, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. В этом случае оптимальный результат игры достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются *активными стратегиями*.

Пусть игрок 1 имеет m чистых стратегий $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$. Обозначим через $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ вероятности, с которыми игрок 1 использует свои соответствующие чистые стратегии. Тогда смешанная стратегия игрока 1 – это набор чисел $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_m)$, удовлетворяющих соотношениям

$$x_i \geq 0 \ \ (i = 1...m), \qquad \sum_1^m x_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2. Обозначим через $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ вероятности, с которыми он использует свои чистые стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$. Смешанная стратегия для игрока 2 – набор чисел $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_j \geq 0 \ \ (j = 1...n), \qquad \sum_1^n y_j = 1.$$

Для соблюдения секретности, каждый игрок применяет свои смешанные стратегии независимо от выбора другого игрока.

Для того чтобы число v было ценой игры, а x^* и y^* - оптимальными стратегиями необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq v \ \ (j = 1...n) \ \ и \ \ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v \ \ (i = 1...m).$$

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение, и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

3.3.2. Графическое решение матричных игр

Рассмотрим смешанные стратегии с помощью графического решения матричных игр. Хотя минус этого метода в том, что он применим к тем играм, в которых хотя бы один из игроков имеет две стратегии.

Для лучшего понимания поясним метод на примерах.

***Пример* 1.**

Игра задаётся матрицей. $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{array}.$

Решение:

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – смешанная стратегия игрока 1, $y = (y_1, y_2)$ – смешанная стратегия игрока 2.

	B_1	B_2	Вероятности использования чистых стратегий игроком 1.
A_1	2	4	x_1
A_2	5	3	x_2
Вероятности использования чистых стратегий игроком 2	y_1	y_2	

$x_1 + x_2 = 1$

$y_1 + y_2 = 1$

На плоскости xOy введём систему координат и на оси Ox отрезок единичной длины A_1A_2, каждой точке которого поставим в соответствии смешанную стратегию $x = (x_1, x_2) = (x_1, 1 - x_1)$. В частности точке $A_1(0,0)$ отвечает стратегия A_1, точке $A_2(1,0)$ – стратегия A_2. В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляры. На полученных прямых будем откладывать выигрыш игрока 1. Т.е. на первой прямой (она совпадает с осью *Oy*) выигрыш игрока 1 при стратегии A_1, а на второй прямой – при стратегии A_2. В нашем случае, если игрок 1 примет свою стратегию A_1, то при стратегии игрока 2 B_1 он выиграет 2, а при стратегии игрока 2 B_2 – 4. Числам 2 и 4 на оси Оу поставим в соответствии точки B_1 и B_2.

Если же игрок 1 примет стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии игрока 2 B_1 составит 5, а при стратегии B_2 – 3. Этим числам на перпендикуляре (восстановленным в точке A_2) соответствуют точки $B_1^/$ и $B_2^/$. Если мы соединим точки B_1 *и* $B_1^/$ и точки B_2 *и* $B_2^/$ то получим две прямые, расстояние до которых от оси *Ox* определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например расстояние от оси *Ox* до прямой $B_1B_1^/$ определяет средний выигрыш игрока 1 при любом сочетании стратегий A_1 A_2 (с вероятностями x_1 *и* x_2) и стратегией B_1. Из курса планиметрии (если рассмотреть трапецию $A_1B_1B_1^/A_2$) это расстояние равно: $v_1 = 2x_1 + 5x_2$.

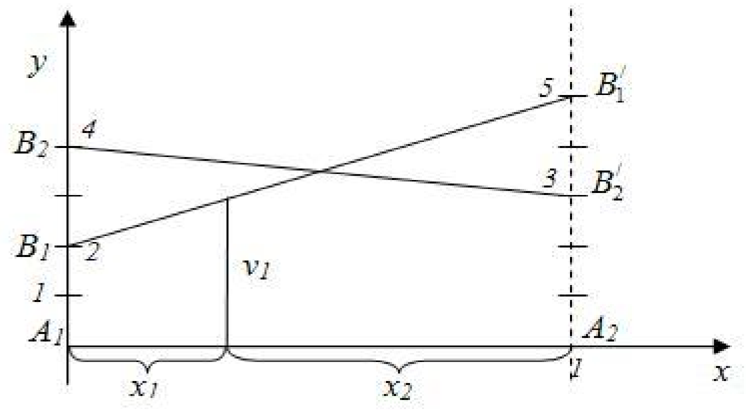


Рис. 3.1.

Аналогично определяется средний выигрыш при применении стратегии B_2.

Таким образом, минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий определяют ординаты точек, которые находятся на ломанной $B_1M\,B_2^/$ (эта ломанная будет нижней огибающей). И самый максимальный выигрыш среди всех минимальных будет достигаться в точке *M;* следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

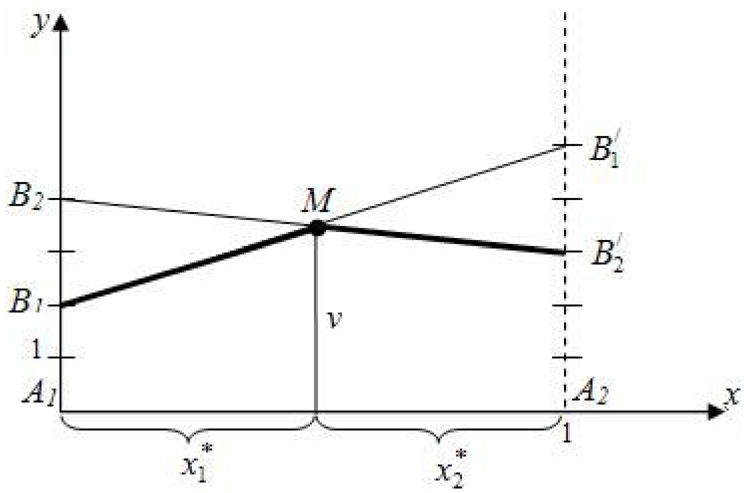


Рис. 3.2

Найдём неизвестные величины, рассмотрев две прямые $B_1B_1^{/}$ *и* $B_2B_2^{/}$. Составим следующую систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$\begin{cases} v &= 2x_1^* + 5x_2^*, \\ v &= 4x_1^* + 3x_2^* \\ x_1^* + x_2^* = 1, \end{cases}$, которая легко решается школьными методами.

Решив, найдём $x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = \frac{1}{2}, v = \frac{7}{2}$.

Аналогично находится оптимальная стратегия для игрока 2.

$$\begin{cases} 2y_1^* + 4y_2^* = v &= \frac{7}{2}, \\ 5y_1^* + 3y_2^* = v &= \frac{7}{2}, \end{cases}$$

или $y_1^* = \frac{1}{4},\ y_2^* = \frac{3}{4}$.

Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ y^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, а цена игры v=3,5.

Пример 2.

Графически решить игру, заданную платёжной матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Решение:

	B_1	B_2	Вероятности использования чистых стратегий игроком 1.
A_1	5	7	x_1
A_2	7	6	x_2
A_3	3	5	x_3
A_4	4	8	x_4
Вероятности использования чистых стратегий игроком 2	y_1	y_2	

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

В данном примере стратегия A_3 игрока 1 является доминируемой стратегиями A_2 и A_4. Всегда можно исключить доминируемую строку и уменьшить платёжную матрицу в размерах (при этом вероятность использования игроком 1 своей чистой стратегии A_1 будет нулевая: $x_3 = 0$):

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Теперь отложим на оси *Oy* отрезок единичной длины B_1B_2. Восстановим перпендикуляры в токах B_1 *и* B_2 (в данном случае один перпендикуляр совпадёт с осью *Ox*) и будем отмечать выигрыши игрока 1 в зависимости от принимаемых им стратегий и стратегии B_1 *и* B_2 игрока 2. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока 1. В нашем примере ломанная $A_2MA_4^{/}$ соответствует верхней границе выигрыша игрока 1 (верхняя огибающая). И самый минимальный из максимальных выигрышей будет достигаться в точке M, которой соответствует оптимальная смешанная стратегия игрока 2 $y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

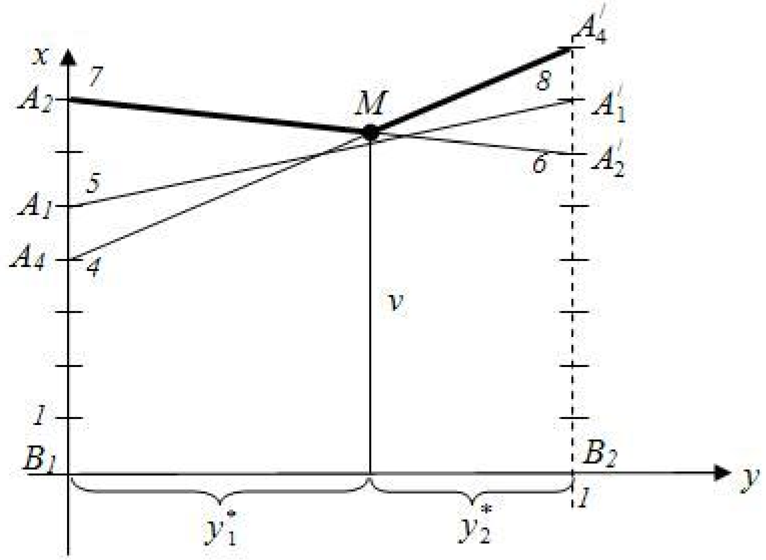


Рис. 3.3

Для нахождения неизвестных y_1^*, y_2^* *и* v, рассмотрим прямые $A_2A_2^/$ *и* $A_4A_4^/$. Составим систему с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 7y_1^* + 6y_2^* = v, \\ 4y_1^* + 8y_2^* = v, \\ y_1^* + y_2^* = 1. \end{cases}$$

Решим её. Из второго вычтем первое, получим

$$\begin{cases} 3y_1^* - 2y_2^* = 0, \\ y_1^* + y_2^* = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1^* - 2y_2^* = 0, \\ y_1^* = 1 - y_2^*; \end{cases} \Rightarrow 3(1 - y_2^*) - 2y_2^* = 0; \Rightarrow y_2^* = \frac{3}{5}.$$

Из второго уравнения последней системы:

$$y_1^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Из первого уравнения первой системы:

$$v = 7 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{32}{5}.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока 2: $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, а цена игры $v = \frac{32}{5}$.

Для игрока 1 (при стратегиях A_2 и A_4) система для нахождения неизвестных будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} 7x_2^* + 4x_4^* = \frac{32}{5}, \\ 6x_2^* + 8x_4^* = \frac{32}{5}. \end{cases}$$ Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму, получим

$$-14x_2^* + 6x_2^* = -\frac{64}{5} + \frac{32}{5}, \quad -8x_2^* = \frac{-32}{5}, \quad x_2^* = \frac{4}{5}.$$

Из первого уравнения: $4x_4^* = \frac{32}{5} - \frac{28}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_4^* = \frac{1}{5}$.

Оптимальная смешанная стратегия для первого игрока $x^* = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$.

Таким образом, решение игры $x^* = \left(0, \frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$, $y^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и $v = \frac{32}{5}$.

Основные этапы нахождения решения игры $2 \times n$ *или* $m \times 2$*:*

1. Строят прямые, соответствующие стратегиям первого (второго) игрока.
2. Определяют нижнюю (верхнюю) границу выигрыша.
3. Находят две стратегии второго (первого) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной (минимальной) ординатой.
4. Определяют цену игры и оптимальные стратегии.

3.4. Игры с природой

3.4.1. Основные понятия

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется *статистической игрой* или «*игрой с природой*».

Пусть игрок располагает m стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$. Относительно «природы» известно, что она может принимать n различных состояний $S_1, S_2, \dots, S_n$. Известен выигрыш a_{ij} игрока при каждой паре стратегий игрока и «природы», т.е. известна платёжная матрица игры:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array},$$

Замечание: элементы a_{ij} платёжной матрицы могут быть потерями от принимаемого решения (плана), а также полезностью, риском и другими количественными критериями.

Игрок определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи определяется по одному из критериев принятия решения.

3.4.2. Критерии принятия решения

Критерий максимального математического ожидания выигрыша или критерий Бейеса-Лапласа.

Применяется в тех случаях, когда игроку известны вероятности состояний окружающей среды. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой значение математического ожидания выигрыша при выборе соответствующей стратегии игрока:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ip} p_j$$

где p_j – вероятность *j*-го состояния окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия игрока, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$W = \max w_i .$$

Применение критерия максимального математического ожидания выигрыша, таким образом, оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая: игроку известны вероятности всех состояний окружающей среды; минимизация риска проигрыша максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Замечание: в случае, когда матрица возможных результатов (a_{ij}) представляет собой матрицу потерь (затрат), то оптимальной по данному критерию считается та стратегия игрока, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша минимально:

$$W = \min w_i .$$

Критерий недостаточного основания Лапласа.

Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии игрока в платёжной матрице определяется, таким образом, среднее значение выигрыша:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}}{n}$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия игрока, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$W = \max w_i .$$

Использование данного критерия оправдано в следующей ситуации: игрок не имеет информации, либо имеет неполную информацию о вероятностях состояний окружающей среды; вероятности состояний окружающей среды близки по своим значениям; минимизация риска проигрыша представляется игроку менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Замечание: в случае, когда матрица возможных результатов (a_{ij}) представляет собой матрицу потерь (затрат), то оптимальной по данному критерию считается та стратегия игрока, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша минимально:

$$W = \min w_i .$$

Максиминный критерий Вальда.

Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний. Этот критерий основывается на принципе осторожности, т.к. выбирается наилучшая из наихудших стратегий. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой минимальное значение выигрыша в соответствующей стратегии игрока:

$$w_i = \min_j a_{ij} .$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия игрока, при выборе которой минимальное значение выигрыша максимально:

$$W = \max w_i .$$

Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение его оправдано, если: о возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно; даже минимальный риск недопустим.

Замечание: если в исходной матрице (по условию задачи) результаты a_{ij} представляют потери (затраты) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий Вальда. Для каждой строки ищется элемент

$$w_i = \max_j a_{ij} .$$

Затем выбирается стратегия

$$W = \min w_i$$

Критерий минимаксного риска Сэвиджа.

Выбирается стратегия, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается матрица рисков, каждый коэффициент которой (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij} .$$

Матрица рисков дополняется столбцом, содержащим максимальные значения коэффициентов r_{ij} по каждой из стратегий игрока:

$$R_i = \max_j r_{ij} .$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение R_i минимально:

$$W = \min R_i .$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична предыдущей ситуации, однако наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

Замечание: если в исходной матрице (по условию задачи) результаты a_{ij} представляют потери (затраты) лица, принимающего решение, то каждый коэффициент матрицы рисков (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = a_{ij} - a_{\min j} .$$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

В практике принятия решений игрок руководствуется не только критериями, связанными с крайним пессимизмом или учётом максимального риска. Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, игрок может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале [0, 1] и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма.

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого рассчитываются по формуле:

$$w_i = \alpha \cdot \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \min_j a_{ij},$$

где α – коэффициент пессимизма.

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, в которой значение w_i максимально:

$$W = \max w_i .$$

При α=1 критерий Гурвица превращается в пессимистический критерий Вальда. При α = 0 он превращается в критерий крайнего оптимизма, рассчитанный на лучшее стечение обстоятельств. Обычно α выбирают в пределах от 0,5 до 0,7.

Критерий Гурвица применяется в ситуации, когда: информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна; необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды; реализуется только малое количество решений; допускается некоторый риск.

Замечание: если в исходной матрице (по условию задачи) результаты a_{ij} представляют потери (затраты) лица, принимающего решение, то

$$w_i = \alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_j a_{ij} .$$

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, в которой значение w_i минимально:

$$W = \min w_i .$$

В общем случае, выбор критерия принятия решения в условиях полной неопределённости является сложным и ответственным. Так как не существует каких-либо общих рекомендаций и советов, игрок должен выбирать критерий с учётом конкретной специфики решаемой задачи, опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

4. Модели управления запасами

4.1. Определяющие понятия теории управления запасами

Запасом называется любой материальный ресурс, который хранится на предприятии для удовлетворения будущих поребностей. Например, полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, сырьё, запчасти для ремонта оборудования. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии и тактики управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что в конечном итоге позволяет повышать эффективность используемых запасов.

Рассмотрим определяющие понятия теории управления запасами.

Спрос. Спрос на запасаемый продукт может быть *детерминированным* (т.е. постоянным во времени) или случайным.

Издержки заказа – накладные расходы, связанные с оформлением заказа. В промышленном производстве такими издержками являются затраты на переналадку оборудования и подготовительные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием единицы товара на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определённым промежутком времени.

Упущенная прибыль (*издержки дефицита*) – издержки, связанные с неудовлетворённым спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенной прибыли.

Объём заказа. Объём заказа зависит от того состояния, которое наблюдается в момент подачи заявки. Заказ обычно подаётся на одну и ту же величину при достижении запасом заданного уровня – так называемой *точки восстановления.*

Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

Срок выполнения заказа – время с момента заказа до момента его выполнения.

4.2. Детерменированные модели управления запасами

4.2.1. Модель Уилсона

Предпосылки: темп спроса (интенсивность потребления) на товар известен и постоянен; время выполнения заказа известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; отсутствие запаса (дефицит) является недопустимым.

Исходные данные: темп спроса, время поставки заказа, издержки заказа и хранения.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа и время выполнения заказа являются постоянными. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает точки восстановления n_0. В этот момент времени и делается заказ, который выполняется за время $t_д$. К моменту поступления заказа на склад размер запаса будет нулевым. Оптимальным решением задачи будет такой заказ, при котором минимизируются общие издержки за период.

Пусть:

Q – размер заказа;

T – протяжённость периода планирования;

ν – величина спроса за единицу времени (интенсивность потребления запаса);

K – затраты на осуществление заказа, включающие оформление и доставку заказа;

s – удельные издержки хранения в единицу времени;

t_{∂} – время выполнения заказа.

Тогда:

$C_1 = \frac{\nu}{Q} K$ – издержки заказа;

$C_2 = \frac{Q}{2} s$ – издержки хранения;

$C = \frac{\nu}{Q} K + \frac{Q}{2} s$ – общие затраты на управление запасами в единицу времени (совокупные издержки).

Кривые издержек заказа, издержек хранения и совокупных издержек приведены на рис.4.1.

Определив минимум функции совокупных издержек, получаем

$Q^* = \sqrt{\frac{2\nu K}{s}}$ – оптимальный размер заказа в модели Уилсона;

$n_0 = \nu \cdot t_{\partial}$ – точка восстановления;

$\tau = \frac{Q^*}{\nu}$ – время цикла (оптимальное время между заказами).

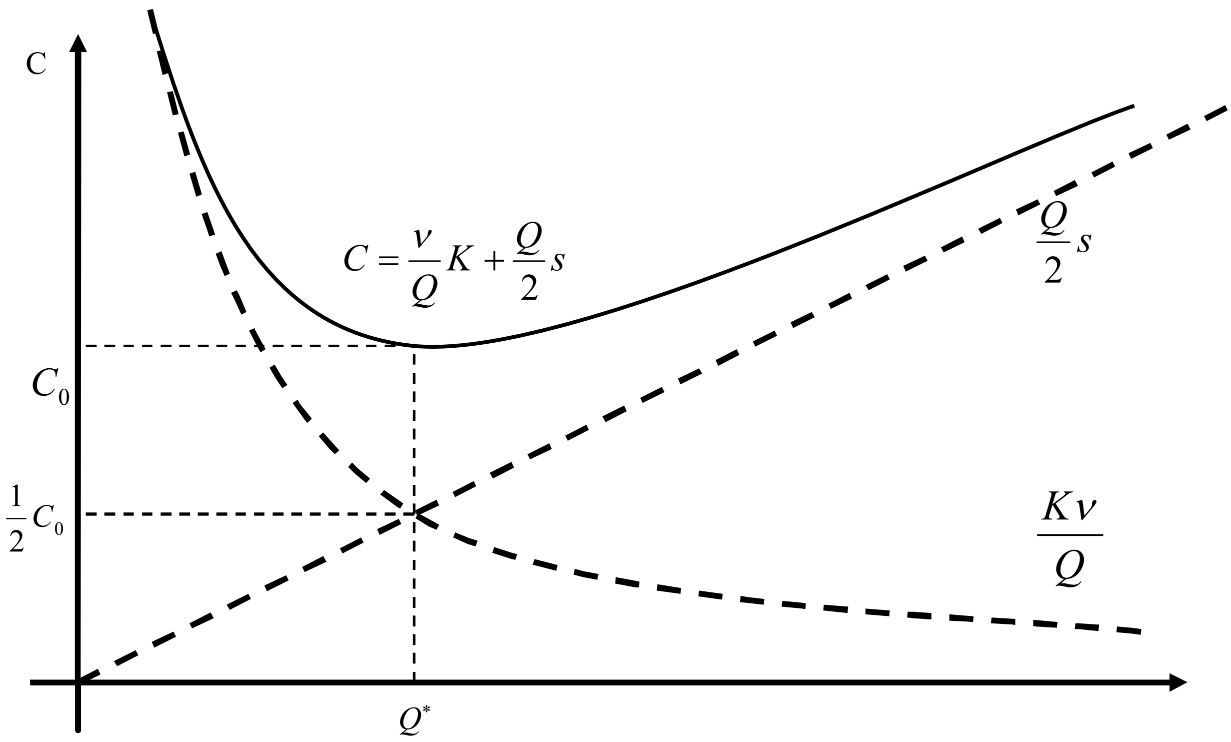


Рис. 4.1. *График затрат на УЗ в модели Уилсона.*

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рис. 4.2.

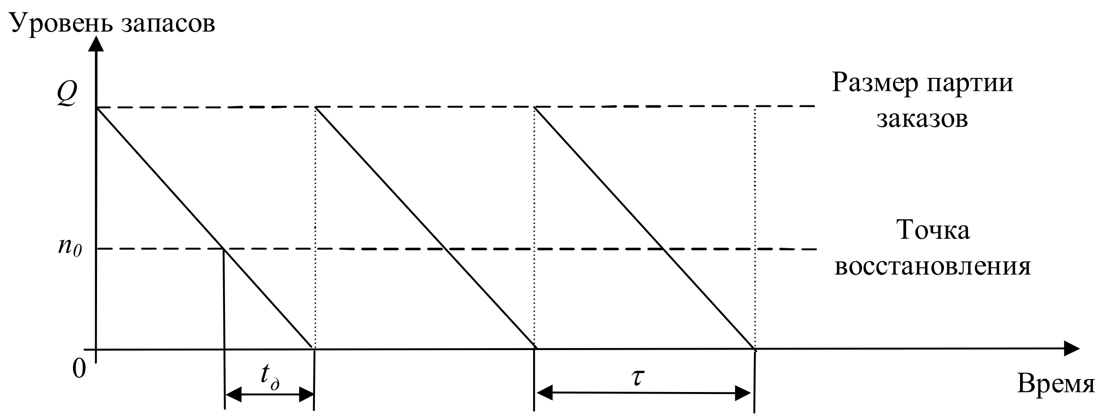


Рис. 4.2. *График циклов изменения запасов в модели Уилсона.*

Сложность при решении задач по управлению запасами состоит в правильном определении входных параметров задачи. При использовании формул, необходимо следить за тем, чтобы все используемые в формуле числовые величины были согласованы по единицам измерения. Например, параметры s и ν должны быть приведены к одним и тем же временным единицам (к годам, к дням, к сменам и т.п.).

4.2.2. Модель управления запасов с производством

Модель Уилсона, используемую для моделирования процессов закупки продукции у внешнего поставщика, можно модифицировать и применять в случае собственного производства продукции.

Предпосылки: темп спроса известен и постоянен; темп производста товара известен и постоянен; время выполнения известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, темп производства, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса.

Итак, фирма производит продукт самостоятельно, хранит его на складе и расходует в постоянном темпе. Если темп производства выше темпа спроса, то излишки продукта накапливаются на складе. Когда количество продукта на складе достигает максимального значения, производство прекращается и продукт расходуется со склада. Когда запас на складе достигает точки восстановления, производство возобнавляется. При этом оптимальным решением задачи будет тот размер заказа Q^*, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление производства.

Пусть:

Q – размер заказа;

p – темп производства;

T – протяжённость периода планирования;

v – величина спроса за единицу времени (интенсивность потребления запаса);

K – фиксированные издержки на запуск производства;

s – удельные издержки хранения в единицу времени;

t_n – время, необходимое для запуска производства.

Тогда:

$\frac{v}{Q}K$ – издержки на запуск производства;

$\frac{sQ}{2}\left(1-\frac{v}{p}\right)$ – издержки хранения;

$Q^* = \sqrt{\frac{2vK}{s\left(1-\frac{v}{p}\right)}}$ – оптимальный размер заказа;

$d^* = Q^*\left(1-\frac{v}{p}\right)$ – максимальный уровень запасов;

$n_0 = v \cdot t_n$ – точка восстановления;

$\tau = \frac{Q^*}{v}$ – время цикла (оптимальное время между заказами).

В этой модели оптимальный размер заказа также не зависит от цены продукта.

4.2.3. Модель оптимального размера заказа с дефицитом

Предпосылки: темп спроса известен и постоянен; темп производста товара известен и постоянен; время выполнения известно и постоянно; закупочная цена не зависит от размера заказа; дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, издержки дефицита, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Уровень запаса убывает с постоянной интенсивностью. Допускается дефицит продукта. После получения заказа фирма компенсирует дефицит и восстанавливает запас продукта на складе. Заказ делается тогда, когда дефицит продукта на складе достигает оптимального размера. Оптимальным решением задачи будет такой размер заказа Q^*, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения количества продукта на складе показана на рис 4.3.

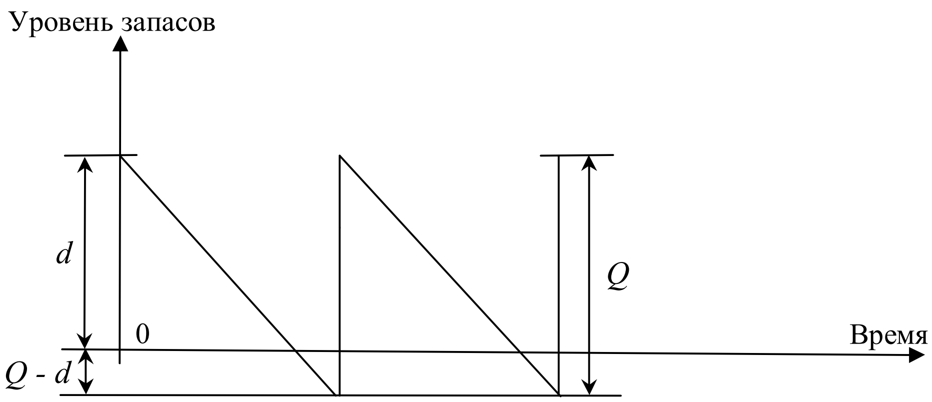


Рис. 4.3. *График изменения количества продукта на складе*

Пусть:

Q – размер заказа;

T – протяжённость периода планирования;

v – величина спроса за единицу времени (интенсивность потребления запаса);

K – издержки заказа;

s – удельные издержки хранения в единицу времени;

b – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта;

d – запас за единицу времени.

Тогда:

$\frac{\nu}{Q}K$ – издержки заказа;

$\frac{d^2}{2Q}s$ – издержки хранения;

$\frac{(Q-d)^2}{2Q}b$ – издержки дефицита;

$C=\frac{\nu}{Q}K+\frac{d^2}{2Q}s+\frac{(Q-d)^2}{2Q}b$ – совокупные издержки;

$Q^*=\sqrt{\frac{2\nu K(b+s)}{sb}}$ – оптимальный размер заказа;

$d^*=\sqrt{\frac{2\nu Kb}{s(b+s)}}$ – максимальный размер запаса;

$R^*=Q^*-d^*$ – максимальный дефицит;

$n_0=\nu\cdot t_n$ – точка восстановления запаса.

4.2.4. Модель с количественными скидками

Предпосылки: темп спроса известен и постоянен; время выполнения известно и постоянно.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, цена товара, количественные скидки в случае закупки крупных партий товара.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Пусть:

Q – размер заказа;

T – протяжённость периода планирования;

ν – величина спроса за единицу времени (интенсивность потребления запаса);

K – издержки заказа;

s – удельные издержки хранения в единицу времени.

Предположим, что известны числа c_i, a_i, $i=1,...,n$, где c_i – цена товара при размере заказа Q в интервале $a_{i-1}\le Q<a_i$. Будем считать, что a_o=0 и a_n=+∞.

Тогда:

$\frac{\nu}{Q}K$ – издержки заказа;

$\frac{Q}{2}s$ – издержки хранения;

$c_i \cdot v$ – издержки на закупку товара;

$C = \frac{v}{Q} K + \frac{Q}{2} s + c_i \cdot v$ – совокупные издержки.

Оптимальный размер заказа определяется в результате решения n задач. Каждая из этих задач сводится к определению такого размера заказа Q_i,, $i = 1,...,n$, при котором функция совокупных издержек достигает минимума при ограничениях $a_{i-1} \le Q < a_i$. Решение исходной задачи определяется из условия $Q^* = \arg\max\{ C_i(Q_i)\}$.

Изобразим функции совокупных издержек для трех значений цен продукта на рис. 4.4.

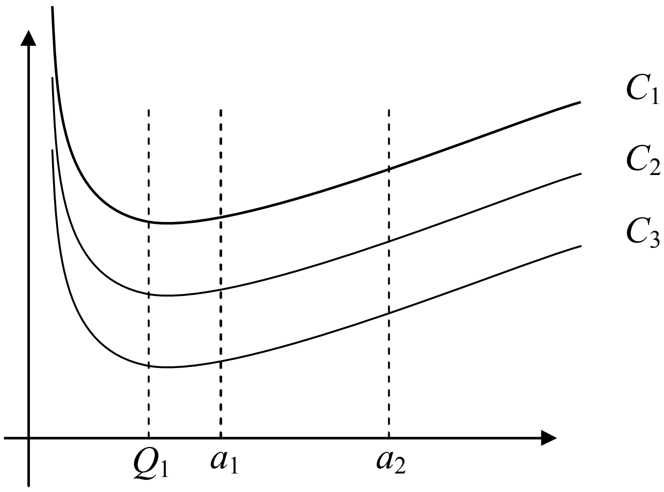


Рис. 4.4.

Значение цены:

c_1 определено на интервале $0 \le Q < a_1$;

c_2 определено на интервале $a_1 \le Q < a_2$;

c_3 определено на интервале $a_2 \le Q < +\infty$.

Соответственно функция общих издержек:

$C_1(Q)$ определена при значении цены c_1 на интервале $0 \le Q < a_1$;

$C_2(Q)$ определена при значении цены c_2 на интервале $a_1 \le Q < a_2$;

$C_3(Q)$ определена при значении цены c_3 на интервале $a_2 \le Q < +\infty$.

Минимальное значение функции:

$C_1(Q)$ в области ее допустимых значений достигается в точке a_1;

$C_2(Q)$ в области ее допустимых значений достигается в точке Q_2;

$C_3(Q)$ в области ее допустимых значений достигается в точке a_2 .

Оптимальный размер заказа следует выбирать из величин Q_1, a_1, a_2 по формуле:

$$Q^* = \arg\max\{ C_1(Q), C_2(a_1), C_3(a_2)\}.$$

5. Сетевые модели

5.1. Основные понятия методов сетевого планирования

При организации работы над различными проектами, планировании комплексов работ широкое распространение получили методы *сетевого планирования и управления.* Начальная информация о проекте задается перечнем всех работ, их продолжительностью, последовательностью выполнения (для каждой работы должно быть указано, каким работам она предшествует или за какими следует).

Сетевой график проекта – графическое изображение работ, выполнение которых необходимо для достижения поставленной цели. Анализ и расчет сетевого графика позволяет установить наиболее напряженные, так называемые *критические работы*, вычислить резервы ненапряженных работ, рационально распределить трудовые и материальные ресурсы для достижения намеченной цели в кратчайшее время с минимальными затратами.

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия *события* и *работы.*

В понятие «работа» входит: *действительная работа* – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (каждая действительная работа должна быть конкретной и четко описанной); *ожидание* – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки сооружения после покраски). А также *фиктивная работа* – логическая связь между двумя или несколькими работами, не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Продолжительность и стоимость фиктивной работы равна нулю.

Событие – момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ.

Таким образом, начало и окончание любой работы описывается парой событий, которые называются *начальным* и *конечным* событиями. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы (*i, j*), состоящий из номеров начального (*i*-го) и конечного (*j*-го) событий при этом номер начального события должен быть меньше номера конечного события, например (3,5); 3-5; 3,5. События на сетевом графике изображаются кругами, в котором проставлены их номера, а работы – направленными стрелками. Над каждой стрелкой проставляют продолжительность соответствующей работы $t_{i,j}$.

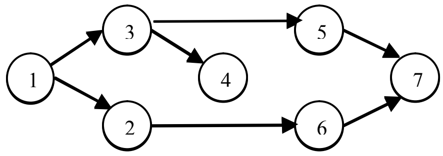
$$(i) \xrightarrow{t_{i,j}} (j)$$

Работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие.

Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют *исходным*. Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется *завершающим*.

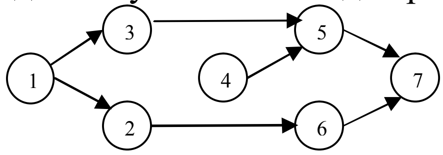
При построении сетевых графиков следует соблюдать следующие правила:

1. График должен быть простым, без лишних пересечений.
2. Стрелки (работы) должны быть направлены слева направо.
3. В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.



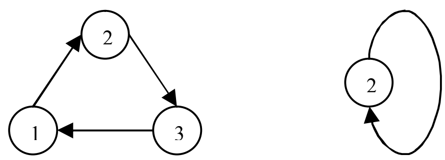
Здесь либо работа (3, 4) не нужна, и ее необходимо аннулировать, либо не замечена необходимость определенной работы, следующей за событием 4 для свершения какого-либо последующего события. В таких случаях необходимо тщательное изучение взаимосвязей событий и работ для исправления возникшего недоразумения.

4. В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий (кроме исходного), которым не предшествует хотя бы одна работа.

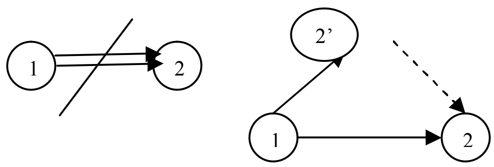


Здесь работы, предшествующие событию 4, не предусмотрены. Поэтому событие 4 не может свершиться, а, следовательно, не может быть выполнена и следующая за ним работа (4,5). Обнаружив в сети такие события, необходимо определить исполнителей предшествующих им работ и включить эти работы в сеть.

5. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.



6. Между двумя событиями может быть изображена только одна работа.
7.



Нарушение этого условия происходит при изображении параллельно выполняемых работ. В этом случае рекомендуется ввести фиктивное событие (событие 2') и фиктивную работу (работа (2', 2)), при этом одна из параллельных работ (1, 2') замыкается на это фиктивное событие. Фиктивные работы изображаются на графике пунктирными линиями.

8. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

9. Нумерацию событий проводят после построения сетевого графика, следя за тем, чтобы номер начального события каждой работы был меньше номера ее конечного события.

***Пример* 1.**

Исходные данные включают название и продолжительность каждой работы (табл. 5.1), а также описание упорядочения работ. Постройте сетевую модель проекта.

Таблица 5.1.

Название работы	Продолжительность (ед. времени)
A	3
B	6
C	1
D	2
E	1
F	5
G	4
H	9
I	7
J	6
K	3
L	7

Упорядочение работ:

а) *A* – исходная работа проекта;
б) работа *A* предшествует работе *B*;
в) работа *B* предшествует работам *C* и *D*;
г) работы *E*, *H* и *I* следуют за работой *D*;
д) работы *C* и *E* предшествуют работе *F*;
е) работа *G* следует за работой *F*;
ж) работа *J* следует за работами *H* и *I*;
з) работа *K* следует за работами *G* и *J*;
к) работа *L* следует за работой *K*.

Решение:

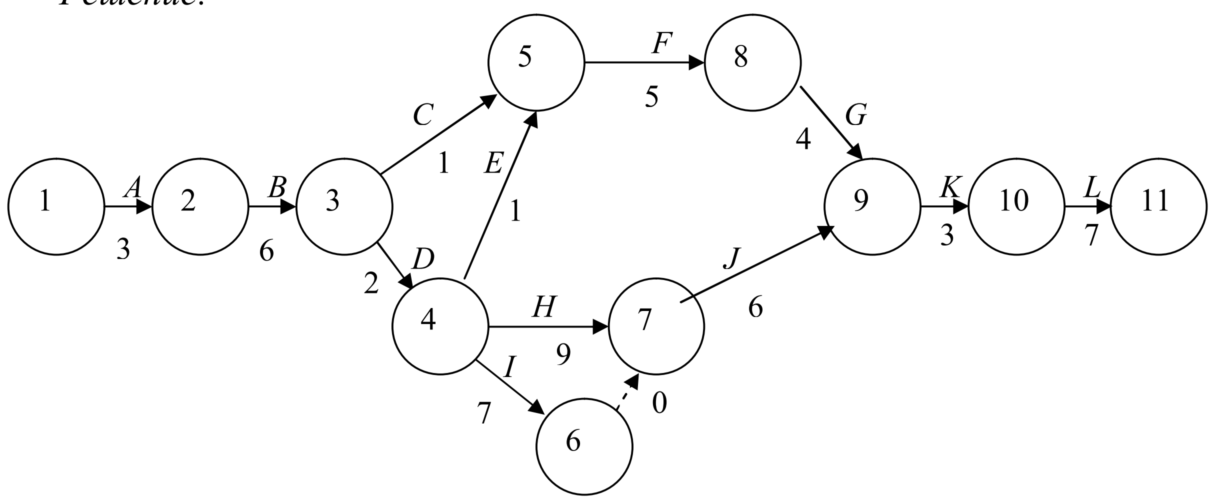


Рис. 5.1. *Сетевая модель проекта.*

Разберем построение сетевой модели с помощью рис. 5.1.

В пункте *а*) условия явно указано, что работа *A* является исходной работой проекта, поэтому изобразим его исходящей из исходного события 1. В соответствии с пунктом *б*) из события 2 выходит одна стрелка работы *B*, которая заканчивается в событии 3. Исходя из пункта *в*) из события 3 направляем две стрелки работ *D* и *C*, которые заканчиваются соответственно в событиях 4 и 5. Из события 4 выводим 3 стрелки работ *E*, *H* и *J* (пункт *г*). Согласно пункту *д*) условия задачи стрелки работ *C* и *E* заканчиваются в одном событии 5, из которого выходит стрелка работы *F*. В соответствии с пунктом *е*) из события 8 выводим стрелку работы *G*. Пункт *ж*) означает, что стрелки работ *H* и *I* должны окончиться в одном событии, из которого выйдет стрелка работы *J*. Но поскольку работы *H* и *I* также и начинаются в одном событии, то имеет место параллельность работ, которая недопустима правилами построения сетевых моделей. Для его устранения введем дополнительное событие 6, в которое войдет работа *I*, после чего соединим события 6 и 7 пунктирной стрелкой фиктивной работы, которая в данном случае не соответствует никакой реальной работе, а лишь отображает логическую связь между работами *I* и *J*. Из пункта *з*) следует, что стрелки работ *J* и *G* заканчиваются в одном событии 9 из которого выходит стрелка работы *K*. Стрелка работы *L* выходит из события 10, т.е. после окончания работы *K* в соответствии с пунктом *к*) условия задачи. Поскольку в условии не указано, что работа *L* предшествует каким-либо другим работам, то эта работа является завершающей и ее стрелка войдет в завершающее событие 11. Продолжительность каждой работы указываем рядом с соответствующей стрелкой.

5.2. Понятие о пути

Одно из важнейших понятий сетевого графика – *понятие пути*.

Путь – это любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет *полный путь L* – это путь от исходного до завершающего события.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется *критическим.* Критическими называют также работы и события, расположенные на этом пути. Продолжительность критического пути определяет срок выполнения всего комплекса работ.

Подкритический путь – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Например, для рассматриваемого нами сетевого графика (см. рис5.1) полными путями будут:

а) путь L_1=(1,2)(2,3)(3,5)(5,8)(8,9)(9,10)(10,11) продолжительностью $T(L_1)$=29 суток.

б) путь L_2=(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,8)(8,9)(9,10)(10,11) продолжитель-ностью $T(L_2)$=31 сутки.

в) путь L_3=(1,2)(2,3)(3,4)(4,7)(7,9)(9,10)(10,11) продолжительностью $T(L_3)$=36 суток.

г) путь L_4=(1,2)(2,3)(3,4)(4,6)(6,7)(7,9)(9,10)(10,11) продолжитель-ностью $T(L_4)$=34 сутки.

Путь L_3 имеет наибольшую продолжительность, поэтому он и является критическим (способ определения критического пути, не основанного на переборе всех полных путей сетевого графика, приводится в разд.). Продолжительность критического пути определяет срок выполнения всего комплекса работ.

Полный резерв времени пути L – разность между продолжительностью критического пути $T(L_{кр})$ и продолжительностью пути L $T(L)$:

$$R_L = T(L_{кр}) - T(L).$$

Величина R_L показывает, насколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути L, чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ, т.е. $T(L_{кр})$.

5.3. Временные параметры сетевых моделей

При анализе сетевых графиков используются *временные параметры событий* и *временные параметры работ*.

К временным параметрам событий относятся:

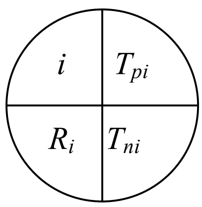
1. ранний срок наступления события i – $T_p(i)$;
2. поздний срок наступления события i – $T_n(i)$;
3. резерв времени наступления события i – $R(i)$.

$T_p(i)$ – это время, необходимое для выполнения всех работ, предшествующих данному событию i.

$T_n(i)$ – это такое время наступления события i, превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события в сети.

$R(i)$ – это такой промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление этого события без нарушения сроков завершения разработки в целом.

Значения временных параметров записываются прямо в вершины на сетевом графике следующим образом:



Методика расчетов временных параметров событий:

1) Расчет ранних сроков свершения событий ведется от исходного к завершающему событию.

а) для исходного события $T_p(i)=T_n(i)=0$.

б) для всех остальных событий $T_p(i)=\max(T_p(k)+t(k, i))$, где максимум берется по всем работам (k, i), входящим в событие i.

2) Поздние сроки свершений событий рассчитываются от завершающего к исходному событию.

а) для завершающего события $T_n(i)=T_p(i)$.

б) для всех остальных событий $T_n(i) = \min(T_n(j) - t(i, j))$, где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i.

3) $R(i)=T_n(i) - T_p(i)$.

К временным параметрам работы относятся:

- ранний срок начала работы $T_{рн}(i, j)$;
- поздний срок начала работы $T_{пн}(i, j)$;
- ранний срок окончания работы $T_{ро}(i, j)$;
- поздний срок окончания работы $T_{по}(i, j)$;
- полный резерв $R_n(i, j)$;
- свободный резерв $R_c(i, j)$.

Методика расчета временных параметров работ:

1) $T_{рн}(i, j)=T_p(i)$;
2) $T_{пн}(i, j)=T_n(j) - t(i, j)$ или $T_{пн}(i, j)= T_{ро}(i, j) - t(i, j)$;
3) $T_{ро}(i, j)= T_p(i) + t(i, j)$ или $T_{ро}(i, j)= T_{рн}(i, j) + t(i, j)$;
4) $T_{по}(i, j)=T_n(j)$;
5) $R_n(i, j)= T_n(j) - T_p(i) - t(i, j)$;
6) $R_c(i, j)= T_p(j) - T_p(i) - t(i, j)$.

$R_n(i, j)$ показывает максимальное время на которое может быть увеличена продолжительность работы (i, j) или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через него максимального пути не превысило продолжительности критического пути. Если использовать полный резерв полностью или частично, то уменьшится полный резерв у работ, лежащих с работой (i, j) на одних путях. Таким образом, $R_n(i, j)$ принадлежит не только работе (i, j), а всем работам, лежащих на путях, проходящих через эту работу.

$R_c(i, j)$ показывает максимальное время на которое можно увеличить продолжительность работы (i, j) или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала следующих работ, при условии, что непосредственно предшествующее событие наступило в свой ранний срок. Использование свободного времени резерва одной из работ не меняет величины свободного резерва остальных работ в сети.

Результаты расчета временных параметров работ оформляется в виде таблицы, где коды работ обычно записывают в определенном порядке. Сначала записываются все работы, выходящие из исходного, первого, события, затем – выходящие из второго события, потом из третьего и т.д.

Сетевой график может иметь несколько критических путей. При поиске критических путей будем использовать следующие условия:

1) *Необходимое условие* – нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути;
2) *Достаточное условие* – нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути.

***Пример* 2.**

По данным примера 1 рассчитайте временные параметры событий и работ, определите критический путь.

Решение:

На рис. 5.2 представлена сетевая модель, соответствующая данному упорядочению работ. Каждому событию присвоен номер, что позволяет в дальнейшем использовать не названия работ, а их коды (см. таблицу 5.2). Численное значение временных параметров событий сети вписаны в соответствующие секторы вершин сетевого графика, а временные параметры работы сети представлены в табл. 5.2.

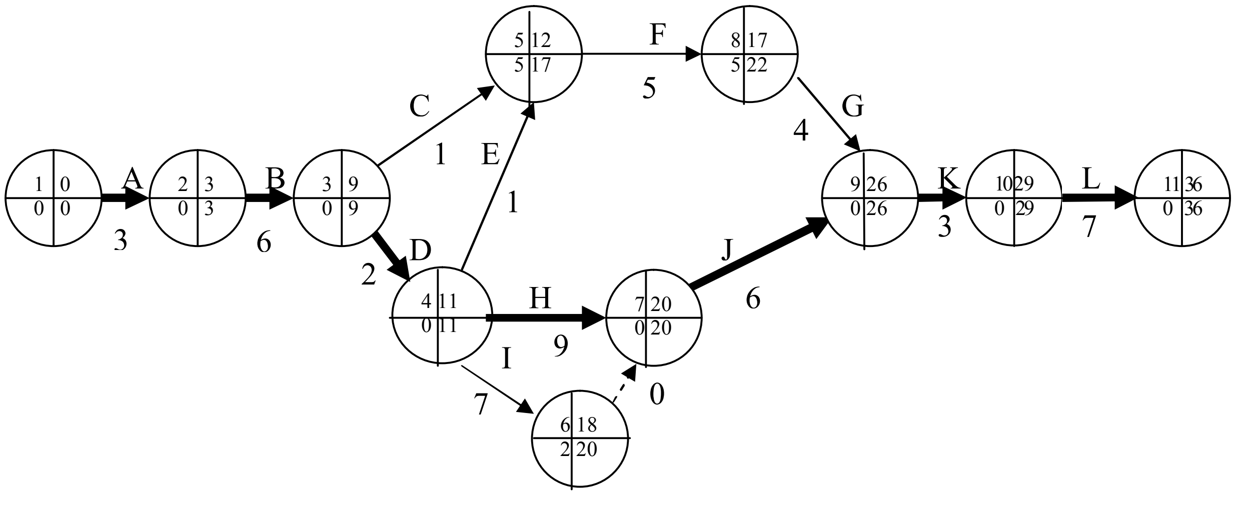


Рис. 5.2. *Сетевая модель.*

Временные параметры работ:

Таблица 5.2.

(i,j)	$t(i,j)$	$T_{рн}(i,j)$	$T_{ро}(i,j)$	$T_{пн}(i,j)$	$T_{по}(i,j)$	$R_{п}(i,j)$	$R_{с}(i,j)$
(1,2)	3	0	3	0	3	0	0
(2,3)	6	3	9	3	9	0	0
(3,4)	2	9	11	9	11	0	0
(3,5)	1	9	10	16	17	7	2
(4,5)	1	11	12	16	17	5	0
(4,6)	7	11	18	13	20	2	0
(4,7)	9	11	20	11	20	0	0
(5,8)	5	12	17	17	22	5	0
(6,7)	0	18	18	20	20	2	2
(7,9)	6	20	26	20	26	0	0
(8,9)	4	17	21	22	26	5	5
(9,10)	3	26	29	26	29	0	0
(10,11)	7	29	36	29	36	0	0

В примере 2 критическим путем является путь $L_{кр}$=(1;2)(2;3)(3;4)(4;7)(7;9)(9;10)(10;11).

5.4. График привязки

Классический вид сетевого графика – это сеть, вычерченная без масштаба времени. Поэтому сетевой график, хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, но недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый данный момент времени. В связи с этим сетевой график рекомендуется дополнить графиком привязки.

График привязки отображает взаимосвязь выполненных работ во времени и строится на основе данных о ранних сроках начала и окончания работ. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ).

График привязки можно построить без предварительного расчета ранних сроков начала и окончания всех работ, используя только данные о продолжительности работ. При этом необходимо помнить, что работа (i, j) может начать выполняться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j).

При поиске критических путей следует помнить, что признаком критической работы являются нулевые значения резервов времени. Это означает, что каждая последующая критическая работа будет начинаться строго в момент окончания предыдущей критической работы. Кроме того, учитываем, что критический путь является полным, т.е. соединяет исходное и завершающее событие в сети. Исходя из вышеперечисленного, запишем способ определения критического пути на графике привязки (все найденные значения выписываются последовательно справа налево):

1. Найти на графике привязки и выписать работу (i, j), которая заканчивается позже остальных. Это будет последняя работа критического пути (ее конечное событие будет иметь номер завершающего события сети);
2. Из всех работ сети (k, j), конечное событие которых совпадает с начальным событием I работы (i, j), найденной в п.1, выбрать и выписать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (i, j);
3. Из всех работ сети (l, k), конечные события которых совпадает с начальным событием работы (k, i), найденный в п.2, выбрать и написать ту, которая на графике вплотную примыкает к работе (k, i);
4. Продолжать п.3 до тех пор, пока не будет найдена исходная работа сети, т.е. начинающаяся в нулевой момент времени.

Если в сетевой модели несколько критических путей, то, выполняя вышеописанные действия, можно обнаружить несколько работ удовлетворяющих сформулированным требованиям. В таком случае необходимо продолжать поиск по каждой из таких работ в отдельности.

***Пример* 3**.

По данным примера 2 постройте график привязки сетевой модели, определите критические пути и их длительности и найдите полные и свободные резервы работ.

Решение:

1. График привязки представлен на рис 5.3.

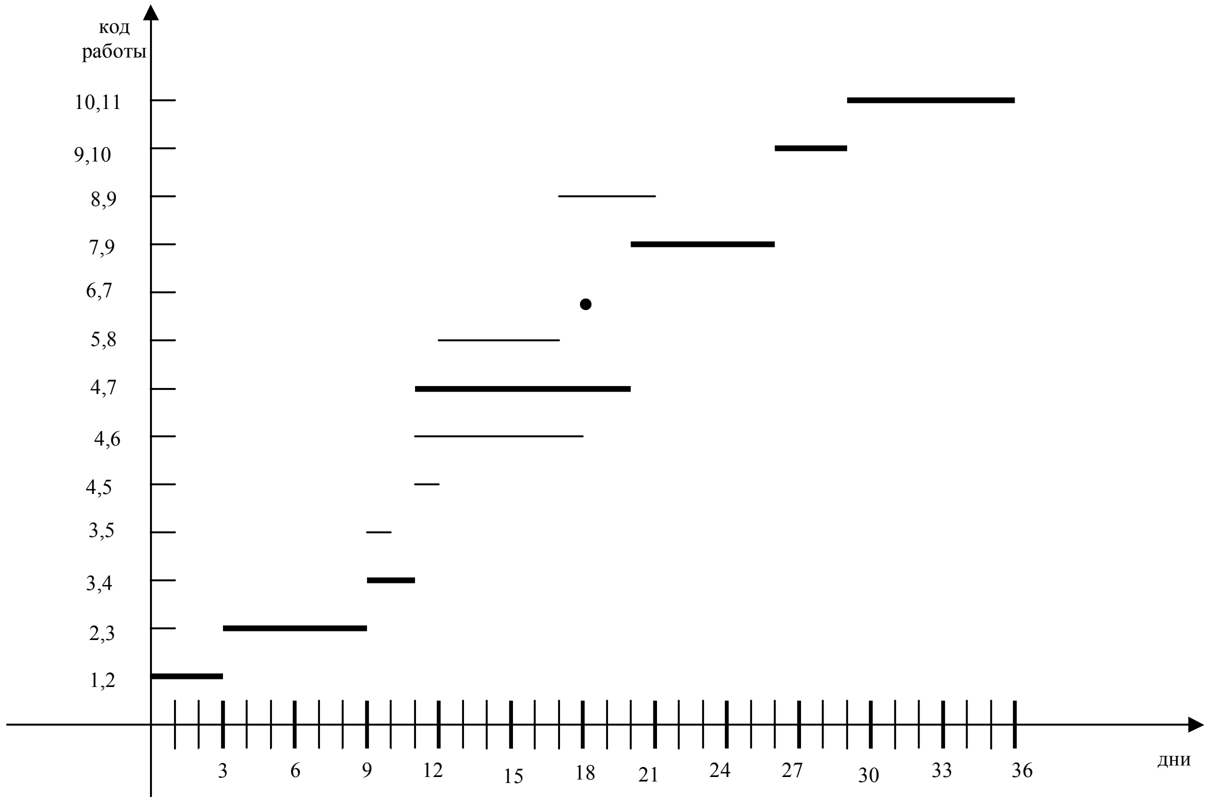


Рис. 5.3. *График привязки.*

2. Поиск критических работ:

а) на графике привязки одна работа (10;11) которая заканчивается позже всех в завершающем событии 11. Записываем работы, определенные как критические, справа налево:

$$L_{кр=\ldots}\ (10;11);$$

б) найдем критическую работу, предшествующую (10;11). Для этого на графике привязки найдем работу, которая по времени своего окончания вплотную примыкает к началу работы (10;11).Такая работа у нас одна (9,10)

$$L_{кр=\ldots}\ (9,10)(10,11);$$

в) найдем критическую работу, которая на графике привязки вплотную примыкает к работе (9,10). Эта работа (7,9).

Продолжая находить критические работы аналогичным образом, получим критический путь

$$L = (1,2)(2,3)(3,4)(4,7)(7,9)(9,10)(10,11).$$

Для наглядности выделим на графике привязки критические работы жирной линией.

Критическое время всего комплекса работ равно координате на оси времени самого правого конца всех отрезков диаграммы:

$$T_{кр}=36(\text{суток}).$$

3. Определение резервов работ:

Для всех найденных критических работ впишем в табл. 5.3 нулевые значения свободного и полного резервов. Рассмотрим некритические работы, начиная с конца табл. 5.3.

Таблица 5.3.

(i, j)	$t(i, j)$	R_c	R_n	Критичность
(1, 2)	3	0	0	Критическая
(2, 3)	6	0	0	Критическая
(3, 4)	2	0	0	Критическая
(3, 5)	1	2	7	
(4, 5)	1	0	5	
(4, 6)	7	0	2	
(4, 7)	9	0	0	Критическая
(5, 8)	5	0	5	
(6, 7)	0	2	2	
(7, 9)	6	0	0	Критическая
(8, 9)	4	5	5	
(9, 10)	3	0	0	Критическая
(10,11)	7	0	0	Критическая

а) работа (8,9), согласно графику привязки заканчивается в 21-ый день, а непосредственно следующая работа (9,10) начинается на 26-ой день, т.е. работа (8,9) может задержаться на 5 дней и это не повлияет на время начала последующей работы (9,10): $R_c(8,9)=5$

Правило: Полный резерв любой работы складывается из собственного свободного резерва и минимального из полных резервов непосредственного следующих работ.

$$R_n(i, j)=R_c(i, j)+\min\{R_n(j, k_1), R_n(j, k_2),\ldots R_n(j, k_n).\}$$

За работой (8,9) следует только критическая работа (9,10) с нулевым полным резервом:

$$R_n(8,9)= R_c(8,9)+ R_n(9,10)=5+0=5;$$

б) работа (6,7) заканчивается на 18-ый день, а следующая за ней работа (7,9) начинается на 20-ый день, отсюда следует, что $R_c(5,6)=2$, $R_n(5,6)= R_c(5,6)+ R_n(6,9)=2+0=2$;

в) работа (5,8) заканчивается в 17-ый день, а следующая за ней работа(8,9) начинается в этот же день, т.е. «зазора» времени между работами (7,8) и (8,9) нет, это означает что работа (5,8) имеет нулевой свободный резерв $R_c(7,8)=0$. Но, если мы сдвинем работу (5,8) на 5 дней, то работа (8,9) тоже сдвинется на 5 дней и это не нарушит сроков выполнения проекта, т.к. у работы (8,9) есть временной резерв. Таким образом, согласно правилу

$$R_n(7,8)= R_c(7,8)+ R_n(8,9)=0+5=5;$$

г) $R_c(4,6)=0$,

$$R_n(4,6)= R_c(4,6)+ R_n(6,7)=0+2=2;$$

д) работа (4,5) заканчивается на 12-ый день, работа (5,8) начинается в 12-ый день, это означает, что $R_c(4,7)=0$.

$$R_n(4,7)= R_c(4,7)+ R_n(7,8)=5+0=5;$$

е) работа (3,5) заканчивается на 10-ый день, а непосредственно следующая работа (5,8) начинается на 12-ый день, т.е. $R_c(3,5)=2$. Т.к. после работы (3,5) следует только работа (5,8) то $R_n(3,7)= R_c(3,7)+ R_n(7,8)=2+5=7$.

5.5. Оптимизация сетевых моделей

При оптимизации сетевых моделей используются разные критерии. В данном курсе рассмотрим оптимизацию по критерию «минимум исполнителей».

При оптимизации использования ресурса рабочей силы сетевые работы чаще всего стремятся организовать таким образом, чтобы:

– количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
– выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Для проведения подобных видов оптимизаций необходим *график загрузки.*

На графике загрузки по горизонтальной оси откладывается время, например, в днях, по вертикальной – количество человек, занятых работой в каждый конкретный день.

Для построения графика загрузки необходимо:

1) на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;

2) подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

Для удобства построения и анализа графика загрузки и привязки следует располагать один за другим.

Описанный вид оптимизации может быть выполнено с помощью сдвига работ, который осуществляется за счет резервов времени: свободного или полного. После сдвига работы работники выполняют ее уже в другое время, и поэтому для каждого дня изменяется количество занятых исполнителей одновременно. Резервы работ можно определить без специальных расчетов, только с помощью графика привязки. Суть оптимизации загрузки сетевых моделей по критерию и «минимум исполнителей» заключается в следующем: необходимо таким образом организовывать выполнение сетевых работ, чтобы количество одновременно работающих исполнителей было минимальным.

***Пример* 4.**

Провести оптимизацию сетевой модели по критерию «минимум исполнителей» по следующим исходным данным:

Таблица 5.4.

Код работы	Продолжительность работы	Количество исполнителей
(1,2)	4	6
(1,3)	3	1
(1,4)	5	5
(2,5)	7	3
(2,6)	10	1
(3,6)	8	8
(4,6)	12	4
(4,7)	9	2
(5,8)	8	6
(6,8)	10	1
(7,8)	11	3

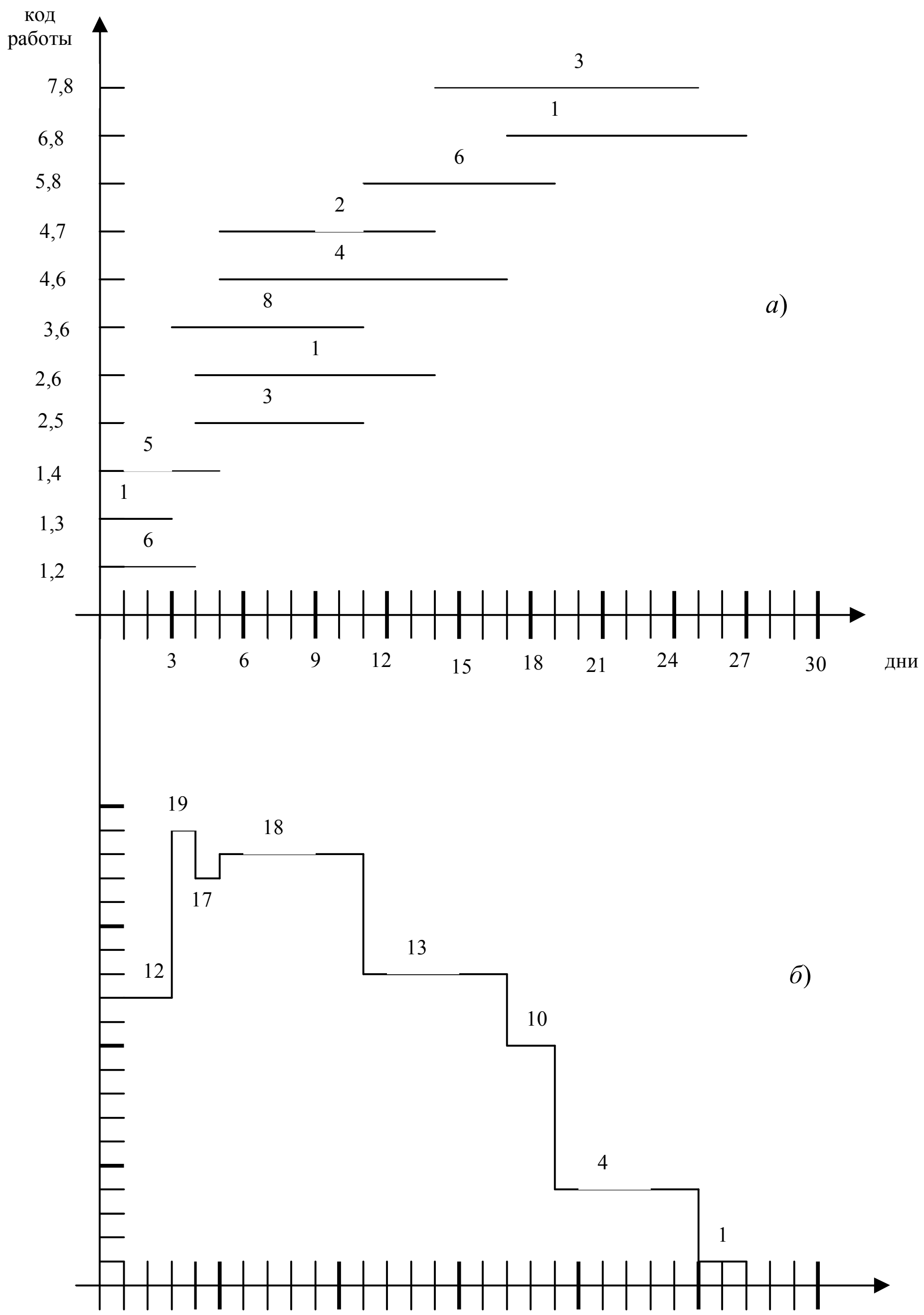


Рис. 5.4. График привязки и загрузки

Решение:

График привязки (*а*) и загрузки (*б*) исходных данных из табл. 5.4 представлены на рис. 5.4.

Допустим, что в распоряжении у нас имеется только 15 исполнителей. Но в соответствии с графиком загрузки (рис. 5.4), с третьего дня по одиннадцатый для выполнения проекта требуется работа одновременно 19, 17 и затем 18 человек. Таким образом, возникает необходимость снижения максимального количества одновременно занятых исполнителей с 19 до 15 человек.

Рассмотрим возможность уменьшения загрузки в течение 4-го дня. Используя $R_c(3,6)=6$, сдвинем работу (3,6) на 1 день, что снизит загрузку 4-го дня до 11 человек, но при этом в 12-ый день появится пик − 21 исполнитель. Для его устранения достаточно сдвинуть работу (5,8) на один день, используя $R_c(5,8)=8$.

Проанализируем возможность уменьшения загрузки (18 человек) с 6-го по 11-ый день, т.е. в течении интервала времени в 6 дней. Так как работа (2,5) является единственной, которую можно сдвинуть таким образом, чтобы она не выполнялась в указанные 6 дней с 6-го по 11-й день. Для этого, используя $R_n(2,5)=8$, сдвинем работу (2,5) на 8 дней, после чего она будет начинаться уже не в 4-й день, а в 12 день. Но поскольку $R_c(2,5)=0$ и для сдвига работы (2,5) был использован полный резерв, то это влечет за собой обязательный сдвиг на 7 дней работы (5,8), следующей за работой (2,5).

В результате произведенных сдвигов максимальная загрузка сетевой модели уменьшилась с 19 до 15 человек, что и являлось целью проводимой оптимизации. Окончательные изменения в графиках привязки и загрузки показаны на рис. 5.5 пунктирной линией.

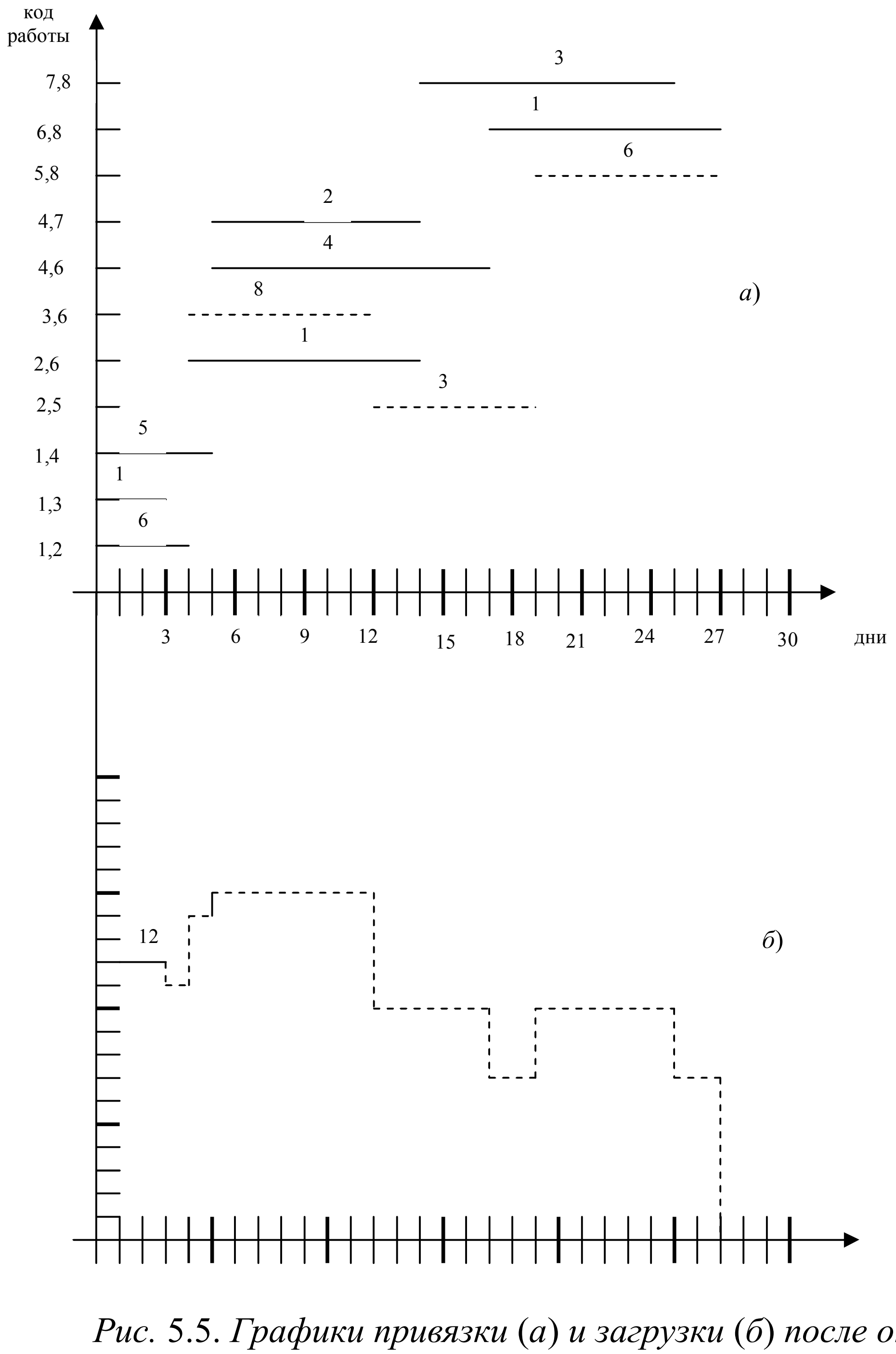


Рис. 5.5. Графики привязки (а) и загрузки (б) после оптимизации.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операция. – М.: Советское радио, 1972.
2. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: математическое программирование. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.
3. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
5. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2001.
6. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
7. Таха Х.А. Введение в исследование операций. В 2-х книгах. – М.: Мир, 1985.
8. Букан Дж., Кенинсберг Э. Научное управление запасами. – М.: Наука, 1967.
9. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
10. Зайченко Ю.П. исследование операций. – Киев: Вища школа, 1979.
11. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций. – М.: Издательский дом "ИНФРА-М", 2006.